Vorlesungsskript

Einführung in die Theoretische Informatik

Wintersemester 2011/12

Prof. Dr. Johannes Köbler
Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Komplexität und Kryptografie

13. Februar 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Reguläre Sprachen **2**
2.1 Endliche Automaten 2
2.2 Nichtdeterministische endliche Automaten 4
2.3 Reguläre Ausdrücke 7
2.4 Relationalstrukturen 9
2.4.1 Ordnungs- und Äquivalenzrelationen 13
2.4.2 Abbildungen 16
2.4.3 Homo- und Isomorphismen 17
2.5 Minimierung von DFAs 19
2.6 Das Pumping-Lemma 23
2.7 Grammatiken 24

3 Kontextfreie Sprachen **27**
3.1 Chomsky-Normalform 29
3.2 Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen 33
3.3 Der CYK-Algorithmus 34
3.4 Kellerautomaten 35
3.5 Deterministisch kontextfreie Sprachen 40

4 Kontextsensitive Sprachen **44**
4.1 Kontextsensitive Grammatiken 44
4.2 Turingmaschinen 45
4.3 Linear beschränkte Automaten 47

5 Entscheidbare und semi-entscheidbare Sprachen **50**

5.1 Unentscheidbarkeit des Halteproblems 53
5.2 Der Satz von Rice 56
5.3 Das Postsche Korrespondenzproblem 57
5.4 Weitere Unentscheidbarkeitsresultate 60
5.5 Die arithmetische Hierarchie 62
5.6 GOTO-Berechenbarkeit 63
5.7 WHILE- und LOOP-Berechenbarkeit 66

6 Komplexitätsklassen **68**
6.1 Zeitkomplexität 68
6.2 Das P-NP-Problem 69
6.3 Platzkomplexität 71

7 NP-vollständige Probleme **72**
7.1 Aussagenlogische Erfüllbarkeitsprobleme 72
7.2 Entscheidungsprobleme für reguläre Sprachen 77
7.3 Graphprobleme 79
7.3.1 Cliquen, Stabilität und Kantenüberdeckungen . 79
7.3.2 Färbung von Graphen 81
7.3.3 Euler- und Hamiltonkreise 82
7.4 Das Rucksack-Problem 87
7.5 Ganzzahlige lineare Programmierung 88
7.6 Max-Sat Probleme 89
7.7 Matchings und der Heiratssatz 89

1 Einleitung

Rechenmaschinen spielen in der Informatik eine zentrale Rolle. In dieser Vorlesung beschäftigen wir uns mit mathematischen Modellen für Maschinentypen von unterschiedlicher Berechnungskraft. Unter anderem lernen wir das Rechenmodell der Turingmaschine (TM) kennen, mit dem sich alle anderen Rechenmodelle simulieren lassen. Ein weiteres wichtiges Thema der Vorlesung ist die Frage, welche Probleme algorithmisch lösbar sind und wo die Grenzen der Berechenbarkeit verlaufen.

Schließlich untersuchen wir die Komplexität von algorithmischen Problemen, indem wir den benötigten Rechenaufwand möglichst gut nach oben und unten abschätzen. Eine besondere Rolle spielen hierbei die NP-vollständigen Probleme, deren Komplexität bis heute offen ist.

Themen der Vorlesung

- Welche Rechenmodelle sind für bestimmte Aufgaben adäquat? (Automatentheorie)
- Welche Probleme sind lösbar? (Berechenbarkeitstheorie)
- Welcher Aufwand ist zur Lösung eines algorithmischen Problems nötig? (Komplexitätstheorie)

In den theoretisch orientierten Folgeveranstaltungen wird es dagegen um folgende Themen gehen.

Thema der Vorlesung Algorithmen und Datenstrukturen

- Wie lassen sich praktisch relevante Problemstellungen möglichst effizient lösen? (Algorithmik)

Thema der Vorlesung Logik in der Informatik

- Mathematische Grundlagen der Informatik, Beweise führen, Modellierung (Aussagenlogik, Prädikatenlogik)

Der Begriff *Algorithmus* geht auf den persischen Gelehrten Muhammed Al Chwarizmi (8./9. Jhd.) zurück. Der älteste bekannte nicht-triviale Algorithmus ist der nach *Euklid* benannte Algorithmus zur Berechnung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen (300 v. Chr.). Von einem Algorithmus wird erwartet, dass er jede *Problemeingabe* nach endlich vielen Rechenschritten löst (etwa durch Produktion einer Ausgabe). Eine wichtige Rolle spielen Entscheidungsprobleme, bei denen jede Eingabe nur mit ja oder nein beantwortet wird. Problemeingaben können Zahlen, Formeln, Graphen etc. sein. Diese werden über einem *Eingabealphabet* Σ kodiert.

Definition 1.

a) Ein ***Alphabet*** $\Sigma = \{a_1, \dots, a_m\}$ *ist eine geordnete Menge von endlich vielen* ***Zeichen****.*

b) Eine Folge $x = x_1 \dots x_n$ *von* n *Zeichen heißt* ***Wort*** *(der* ***Länge*** n*).*

c) Die Menge aller Wörter über Σ *ist*

$$\Sigma^* = \bigcup_{n \geq 0} \Sigma^n,$$

wobei $\Sigma^n = \{x_1 \dots x_n \mid n \geq 0 \text{ und } x_i \in \Sigma \text{ für } i = 1, \dots, n\}$ *alle Wörter der Länge* n *enthält.*

d) Das (einzige) Wort der Länge $n = 0$ *ist das* ***leere Wort****, welches wir mit* ε *bezeichnen.*

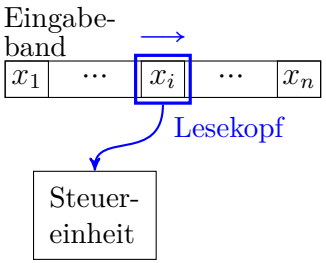
e) Jede Teilmenge $L \subseteq \Sigma^*$ *heißt* ***Sprache*** *über dem Alphabet* Σ*.*

Das zu einer Sprache L gehörige Entscheidungsproblem ist die Frage, ob ein gegebenes Wort x in L enthalten ist oder nicht.

2 Reguläre Sprachen

Wir betrachten zunächst Einschränkungen des TM-Modells, die vielfältige praktische Anwendungen haben, wie z.B. endliche Automaten (DFA, NFA), Kellerautomaten (PDA, DPDA) etc.

2.1 Endliche Automaten



Ein endlicher Automat führt bei einer Eingabe der Länge n nur n Rechenschritte aus. Um die gesamte Eingabe lesen zu können,
muss der Automat also in jedem Schritt ein Zeichen der Eingabe verarbeiten.

Definition 2. *Ein* ***endlicher Automat*** *(kurz: DFA; deterministic finite automaton) wird durch ein 5-Tupel $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ beschrieben, wobei*

- *$Z \neq \emptyset$ eine endliche Menge von* ***Zuständen****,*
- *Σ das* ***Eingabealphabet****,*
- *$\delta : Z \times \Sigma \to Z$ die* ***Überführungsfunktion****,*
- *$q_0 \in Z$ der* ***Startzustand*** *und*
- *$E \subseteq Z$ die Menge der* ***Endzustände*** *ist.*

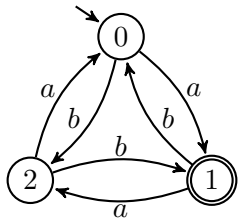
Die von M ***akzeptierte*** *oder* ***erkannte Sprache*** *ist*

$$L(M) = \left\{ x_1 \dots x_n \in \Sigma^* \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists\, q_1, \dots, q_{n-1} \in Z, q_n \in E: \\ \delta(q_i, x_{i+1}) = q_{i+1} \text{ für } i = 0, \dots, n-1 \end{array} \right\}.$$

Beispiel 3. *Betrachte den DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, 0, E)$ mit $Z = \{0, 1, 2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $E = \{1\}$ und der Überführungsfunktion*

δ	0	1	2
a	1	2	0
b	2	0	1

Graphische Darstellung:



Der Startzustand wird meist durch einen Pfeil und Endzustände werden durch einen doppelten Kreis gekennzeichnet. ◁

Bezeichne $\hat{\delta}(q, x)$ denjenigen Zustand, in dem sich M nach Lesen von x befindet, wenn M im Zustand q gestartet wird. Dann können wir die Funktion

$$\hat{\delta} : Z \times \Sigma^* \to Z$$

induktiv wie folgt definieren. Für $q \in Z$, $x \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$ sei

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(q, \varepsilon) &= q, \\ \hat{\delta}(q, xa) &= \delta(\hat{\delta}(q, x), a). \end{aligned}$$

Die von M erkannte Sprache lässt sich nun auch in der Form

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, x) \in E\}$$

schreiben.

Behauptung 4. *Der DFA M aus Beispiel 3 akzeptiert die Sprache*

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \#_a(x) - \#_b(x) \equiv 1 \mod 3\},$$

wobei $\#_a(x)$ die Anzahl der Vorkommen des Zeichens a in x bezeichnet und $j \equiv k \mod m$ bedeutet, dass $j - k$ durch m teilbar ist. Für Letzteres schreiben wir auch kurz $j \equiv_m k$.

Beweis. Da M nur den Endzustand 1 hat, ist $L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(0,x) = 1\}$, d.h. wir müssen folgende Äquivalenz zeigen:

$$\hat{\delta}(0,x) = 1 \Leftrightarrow \#_a(x) - \#_b(x) \equiv_3 1.$$

Hierzu reicht es, die Kongruenz

$$\hat{\delta}(0,x) \equiv_3 \#_a(x) - \#_b(x).$$

zu beweisen, wofür wir Induktion über die Länge n von x benutzen.

Induktionsanfang ($\mathbf{n = 0}$): klar, da $\hat{\delta}(0,\varepsilon) = \#_a(\varepsilon) = \#_b(\varepsilon) = 0$ ist.

Induktionsschritt ($\mathbf{n \rightsquigarrow n+1}$): Sei $x = x_1 \dots x_{n+1}$ gegeben und sei $i = \hat{\delta}(0, x_1 \dots x_n)$. Nach IV gilt dann

$$i \equiv_3 \#_a(x_1 \dots x_n) - \#_b(x_1 \dots x_n).$$

Wegen $\delta(i,a) \equiv_3 i+1$ und $\delta(i,b) \equiv_3 i-1$ folgt

$$\begin{aligned}\delta(i, x_{n+1}) &\equiv_3 i + \#_a(x_{n+1}) - \#_b(x_{n+1})\\ &\equiv_3 \#_a(x_1 \dots x_n) - \#_b(x_1 \dots x_n) + \#_a(x_{n+1}) - \#_b(x_{n+1})\\ &= \#_a(x) - \#_b(x).\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\hat{\delta}(0,x) = \delta(\hat{\delta}(0, x_1 \dots x_n), x_{n+1}) = \delta(i, x_{n+1}) \equiv_3 \#_a(x) - \#_b(x).$$

■

Eine von einem DFA akzeptierte Sprache wird als **regulär** bezeichnet. Die zugehörige Sprachklasse ist

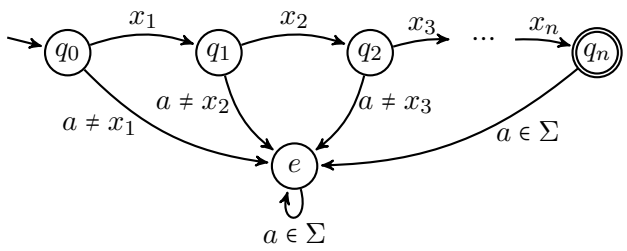
$$\mathsf{REG} = \{L(M) \mid M \text{ ist ein DFA}\}.$$

Um ein intuitives Verständnis für die Berechnungskraft von DFAs zu entwickeln, werden wir Antworten auf folgende Frage suchen.

Frage: Welche Sprachen gehören zu REG und welche nicht?

Dabei legen wir unseren Überlegungen ein beliebiges aber fest gewähltes Alphabet $\Sigma = \{a_1, \dots, a_m\}$ zugrunde.

Beobachtung 5. *Alle Sprachen, die aus einem einzigen Wort $x = x_1 \dots x_n \in \Sigma^*$ bestehen (diese Sprachen werden auch als* Singletonsprachen *bezeichnet), sind regulär. Für folgenden DFA M_x gilt nämlich $L(M_x) = \{x\}$.*



Formal ist M_x also das Tupel $(Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ mit $Z = \{q_0, \dots, q_n, e\}$, $E = \{q_n\}$ und der Überführungsfunktion

$$\delta(q, a_j) = \begin{cases} q_{i+1}, & q = q_i \text{ für ein } i \text{ mit } 0 \le i \le n-1 \text{ und } a_j = x_{i+1} \\ e, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Als nächstes betrachten wir Abschlusseigenschaften der Sprachklasse REG.

Definition 6. *Ein* **k-stelliger Sprachoperator** *ist eine Abbildung op, die k Sprachen $L_1, \dots, L_k$ auf eine Sprache $op(L_1, \dots, L_k)$ abbildet.*

Beispiel 7. *Der Schnittoperator $\cap$ bildet zwei Sprachen L_1 und L_2 auf die Sprache $L_1 \cap L_2$ ab.* ◁

Definition 8. *Eine Sprachklasse $\mathcal{K}$ heißt unter op* **abgeschlossen**, *wenn gilt:*

$$L_1, \dots, L_k \in \mathcal{K} \Rightarrow op(L_1, \dots, L_k) \in \mathcal{K}.$$

Der **Abschluss** *von $\mathcal{K}$ unter op ist die bzgl. Inklusion kleinste Sprachklasse $\mathcal{K}'$, die $\mathcal{K}$ enthält und unter op abgeschlossen ist.*

Beispiel 9. *Der Abschluss der Singletonsprachen unter Vereinigung besteht aus allen nichtleeren endlichen Sprachen.* ◁

Definition 10. *Für eine Sprachklasse $\mathcal{C}$ bezeichne co-$\mathcal{C}$ die Klasse $\{\bar{L} \mid L \in \mathcal{C}\}$ aller Komplemente von Sprachen in $\mathcal{C}$.*

Es ist leicht zu sehen, dass $\mathcal{C}$ genau dann unter Komplementbildung abgeschlossen ist, wenn *co-*$\mathcal{C} = \mathcal{C}$ ist.

Beobachtung 11. *Mit $L_1, L_2 \in \mathsf{REG}$ sind auch die Sprachen $\overline{L_1} = \Sigma^* \setminus L_1$, $L_1 \cap L_2$ und $L_1 \cup L_2$ regulär. Sind nämlich $M_i = (Z_i, \Sigma, \delta_i, q_0, E_i)$, $i = 1, 2$, DFAs mit $L(M_i) = L_i$, so akzeptiert der DFA*

$$\overline{M_1} = (Z_1, \Sigma, \delta_1, q_0, Z_1 \setminus E_1)$$

das Komplement $\overline{L_1}$ von L_1. Der Schnitt $L_1 \cap L_2$ von L_1 und L_2 wird dagegen von dem DFA

$$M = (Z_1 \times Z_2, \Sigma, \delta, (q_0, q_0), E_1 \times E_2)$$

mit

$$\delta((q, p), a) = (\delta_1(q, a), \delta_2(p, a))$$

akzeptiert (M wird auch **Kreuzproduktautomat** *genannt). Wegen $L_1 \cup L_2 = \overline{(\overline{L_1} \cap \overline{L_2})}$ ist dann aber auch die Vereinigung von L_1 und L_2 regulär. (Wie sieht der zugehörige DFA aus?)*

Aus Beobachtung 11 folgt, dass alle endlichen und alle co-endlichen Sprachen regulär sind. Da die in Beispiel 3 betrachtete Sprache weder endlich noch co-endlich ist, haben wir damit allerdings noch nicht alle regulären Sprachen erfasst.

Es stellt sich die Frage, ob REG neben den mengentheoretischen Operationen Schnitt, Vereinigung und Komplement unter weiteren Operationen wie etwa der **Produktbildung**

$$L_1 L_2 = \{xy \mid x \in L_1, y \in L_2\}$$

(auch **Verkettung** oder **Konkatenation** genannt) oder der Bildung der **Sternhülle**

$$L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n$$

abgeschlossen ist. Die n-fache Potenz L^n von L ist dabei induktiv definiert durch

$$L^0 = \{\varepsilon\},\ L^{n+1} = L^n L.$$

Die ***Plushülle*** von L ist

$$L^+ = \bigcup_{n \geq 1} L^n = LL^*.$$

Ist $L_1 = \{x\}$ eine Singletonsprache, so schreiben wir für das Produkt $\{x\}L_2$ auch einfach xL_2.

Im übernächsten Abschnitt werden wir sehen, dass die Klasse REG als der Abschluss der endlichen Sprachen unter Vereinigung, Produktbildung und Sternhülle charakterisierbar ist.

Beim Versuch, einen endlichen Automaten für das Produkt $L_1 L_2$ zweier regulärer Sprachen zu konstruieren, stößt man auf die Schwierigkeit, den richtigen Zeitpunkt für den Übergang von (der Simulation von) M_1 zu M_2 zu finden. Unter Verwendung eines nichtdeterministischen Automaten lässt sich dieses Problem jedoch leicht beheben, da dieser den richtigen Zeitpunkt „erraten“ kann.

Im nächsten Abschnitt werden wir nachweisen, dass auch nichtdeterministische endliche Automaten nur reguläre Sprachen erkennen können.

2.2 Nichtdeterministische endliche Automaten

Definition 12. *Ein* ***nichtdeterministischer endlicher Automat*** *(kurz: NFA; nondeterministic finite automaton) $N = (Z, \Sigma, \delta, Q_0, E)$ ist ähnlich aufgebaut wie ein DFA, nur dass er mehrere Startzustände (zusammengefasst in der Menge $Q_0 \subseteq Z$) haben kann*

und seine Überführungsfunktion die Form

$$\delta : Z \times \Sigma \to \mathcal{P}(Z)$$

hat. Hierbei bezeichnet $\mathcal{P}(Z)$ die Potenzmenge *(also die Menge aller Teilmengen) von Z. Diese wird auch oft mit 2^Z bezeichnet. Die von N akzeptierte Sprache ist*

$$L(N) = \left\{ x_1 \dots x_n \in \Sigma^* \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists\, q_0 \in Q_0, q_1, \dots, q_{n-1} \in Z, q_n \in E\colon \\ q_{i+1} \in \delta(q_i, x_{i+1}) \text{ für } i = 0, \dots, n-1 \end{array} \right\}.$$

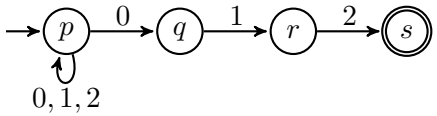
Ein NFA kann also nicht nur eine, sondern mehrere verschiedene Rechnungen ausführen. Die Eingabe gehört bereits dann zu $L(N)$, wenn bei einer dieser Rechnungen nach Lesen des gesamten Eingabewortes ein Endzustand erreicht wird.

Im Gegensatz zu einem DFA, dessen Überführungsfunktion auf der gesamten Menge $Z \times \Sigma$ definiert ist, kann ein NFA „stecken bleiben". Das ist dann der Fall, wenn er in einen Zustand q gelangt, in dem das nächste Eingabezeichen x_i wegen $\delta(q, x_i) = \varnothing$ nicht gelesen werden kann.

Beispiel 13. *Betrachte den NFA $N = (Z, \Sigma, \delta, Q_0, E)$ mit Zustandsmenge $Z = \{p, q, r, s\}$, Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1, 2\}$, Start- und Endzustandsmenge $Q_0 = \{p\}$ und $E = \{s\}$ sowie der Überführungsfunktion*

δ	p	q	r	s
0	$\{p, q\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
1	$\{p\}$	$\{r\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
2	$\{p\}$	$\varnothing$	$\{s\}$	$\varnothing$

Graphische Darstellung:



Offensichtlich akzeptiert N die Sprache $L(N) = \{x012 \mid x \in \Sigma^*\}$ aller Wörter, die mit dem Suffix 012 enden. ◁

Beobachtung 14. *Sind $N_i = (Z_i, \Sigma, \delta_i, Q_i, E_i)$ $(i = 1, 2)$ NFAs, so werden auch die Sprachen $L(N_1)L(N_2)$ und $L(N_1)^*$ von einem NFA erkannt. Wir können $Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$ annehmen. Dann akzeptiert der NFA*

$$N = (Z_1 \cup Z_2, \Sigma, \delta_3, Q_1, E)$$

mit

$$\delta_3(p, a) = \begin{cases} \delta_1(p, a), & p \in Z_1 \setminus E_1, \\ \delta_1(p, a) \cup \bigcup_{q \in Q_2} \delta_2(q, a), & p \in E_1, \\ \delta_2(p, a), & \textit{sonst} \end{cases}$$

und

$$E = \begin{cases} E_2, & Q_2 \cap E_2 = \varnothing \\ E_1 \cup E_2, & \textit{sonst} \end{cases}$$

die Sprache $L(N_1)L(N_2)$ und der NFA

$$N^* = (Z_1 \cup \{q_{neu}\}, \Sigma, \delta_4, Q_1 \cup \{q_{neu}\}, E_1 \cup \{q_{neu}\})$$

mit

$$\delta_4(p, a) = \begin{cases} \delta_1(p, a), & p \in Z_1 \setminus E_1, \\ \delta_1(p, a) \cup \bigcup_{q \in Q_1} \delta_1(q, a), & p \in E_1, \\ \varnothing, & \textit{sonst} \end{cases}$$

die Sprache $L(N_1)^*$.

Satz 15 (Rabin und Scott)**.**
$\mathsf{REG} = \{L(N) \mid N \textit{ ist ein NFA}\}$.

Beweis. Die Inklusion von links nach rechts ist klar, da jeder DFA auch als NFA aufgefasst werden kann. Für die Gegenrichtung konstruieren wir zu einem NFA $N = (Z, \Sigma, \delta, Q_0, E)$ einen DFA $M = (\mathcal{P}(Z), \Sigma, \delta', Q_0, E')$ mit $L(M) = L(N)$. Wir definieren die Überführungsfunktion $\delta' : \mathcal{P}(Z) \times \Sigma \to \mathcal{P}(Z)$ von M mittels

$$\delta'(Q, a) = \bigcup_{q \in Q} \delta(q, a).$$

Die Menge $\delta'(Q,a)$ enthält also alle Zustände, in die N gelangen kann, wenn N ausgehend von einem beliebigen Zustand $q \in Q$ das Zeichen a liest. Intuitiv bedeutet dies, dass der DFA M den NFA N simuliert, indem M in seinem aktuellen Zustand Q die Information speichert, in welchen Zuständen sich N momentan befinden könnte. Für die Erweiterung $\hat{\delta}' : \mathcal{P}(Z) \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Z)$ von δ' (siehe Seite 2) können wir nun folgende Behauptung zeigen:

> $\hat{\delta}'(Q_0, x)$ enthält alle Zustände, die N ausgehend von einem Startzustand nach Lesen der Eingabe x erreichen kann.

Wir beweisen die Behauptung induktiv über die Länge n von x.

Induktionsanfang ($\mathbf{n = 0}$): klar, da $\hat{\delta}'(Q_0, \varepsilon) = Q_0$ ist.

Induktionsschritt ($\mathbf{n - 1 \rightsquigarrow n}$): Sei $x = x_1 \dots x_n$ gegeben. Nach Induktionsvoraussetzung enthält

$$Q_{n-1} = \hat{\delta}'(Q_0, x_1 \dots x_{n-1})$$

alle Zustände, die $N(x)$ in genau $n-1$ Schritten erreichen kann. Wegen

$$\hat{\delta}'(Q_0, x) = \delta'(Q_{n-1}, x_n) = \bigcup_{q \in Q_{n-1}} \delta(q, x_n)$$

enthält dann aber $\hat{\delta}'(Q_0, x)$ alle Zustände, die $N(x)$ in genau n Schritten erreichen kann.

Deklarieren wir nun diejenigen Teilmengen $Q \subseteq Z$, die mindestens einen Endzustand von N enthalten, als Endzustände des **Potenzmengenautomaten** M, d.h.

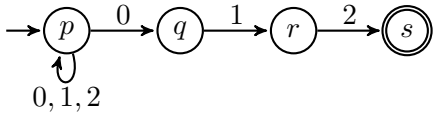
$$E' = \{Q \subseteq Z \mid Q \cap E \neq \varnothing\},$$

so folgt für alle Wörter $x \in \Sigma^*$:

$$\begin{aligned} x \in L(N) &\Leftrightarrow N(x) \text{ kann in genau } |x| \text{ Schritten einen Endzustand erreichen} \\ &\Leftrightarrow \hat{\delta}'(Q_0, x) \cap E \neq \varnothing \\ &\Leftrightarrow \hat{\delta}'(Q_0, x) \in E' \\ &\Leftrightarrow x \in L(M). \end{aligned}$$

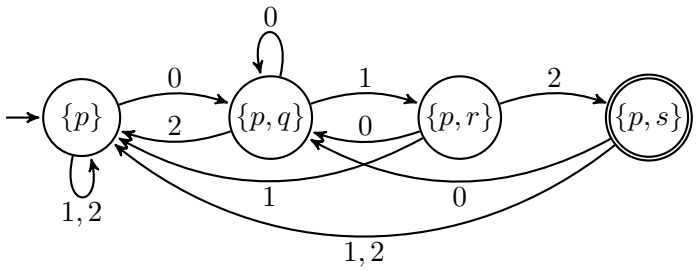
■

Beispiel 16. *Für den NFA $N = (Z, \Sigma, \delta, Q_0, E)$ aus Beispiel 13*



ergibt die Konstruktion des vorigen Satzes den folgenden DFA M (nach Entfernen aller vom Startzustand $Q_0 = \{p\}$ aus nicht erreichbaren Zustände):

δ'	0	1	2
$Q_0 = \{p\}$	$\{p,q\}$	$\{p\}$	$\{p\}$
$Q_1 = \{p,q\}$	$\{p,q\}$	$\{p,r\}$	$\{p\}$
$Q_2 = \{p,r\}$	$\{p,q\}$	$\{p\}$	$\{p,s\}$
$Q_3 = \{p,s\}$	$\{p,q\}$	$\{p\}$	$\{p\}$



◁

Im obigen Beispiel wurden für die Konstruktion des DFA M aus dem NFA N nur 4 der insgesamt $2^{\|Z\|} = 16$ Zustände benötigt, da die übrigen 12 Zustände in $\mathcal{P}(Z)$ nicht vom Startzustand $Q_0 = \{p\}$ aus erreichbar sind. Es gibt jedoch Beispiele, bei denen alle $2^{\|Z\|}$ Zustände in $\mathcal{P}(Z)$ für die Konstruktion des Potenzmengenautomaten benötigt werden (siehe Übungen).

Korollar 17. *Die Klasse* REG *der regulären Sprachen ist unter folgenden Operationen abgeschlossen:*

- *Komplement,*
- *Durchschnitt,*
- *Vereinigung,*
- *Produkt,*
- *Sternhülle.*

2.3 Reguläre Ausdrücke

Wir haben uns im letzten Abschnitt davon überzeugt, dass auch NFAs nur reguläre Sprachen erkennen können:

$$\mathsf{REG} = \{L(M) \mid M \text{ ist ein DFA}\} = \{L(N) \mid N \text{ ist ein NFA}\}.$$

In diesem Abschnitt werden wir eine weitere Charakterisierung der regulären Sprachen kennen lernen:

> REG ist die Klasse aller Sprachen, die sich mittels der Operationen Vereinigung, Durchschnitt, Komplement, Produkt und Sternhülle aus der leeren Menge und den Singletonsprachen bilden lassen.

Tatsächlich kann hierbei sogar auf die Durchschnitts- und Komplementbildung verzichtet werden.

Definition 18. *Die Menge der* ***regulären Ausdrücke*** γ *(über einem Alphabet* Σ*) und die durch* γ *dargestellte Sprache* $L(\gamma)$ *sind induktiv wie folgt definiert. Die Symbole* $\varnothing$*,* ϵ *und* a *(*$a \in \Sigma$*) sind reguläre Ausdrücke, die*

- *die leere Sprache* $L(\varnothing) = \varnothing$*,*
- *die Sprache* $L(\epsilon) = \{\varepsilon\}$ *und*
- *für jedes Zeichen* $a \in \Sigma$ *die Sprache* $L(a) = \{a\}$

beschreiben. Sind α *und* β *reguläre Ausdrücke, die die Sprachen* $L(\alpha)$ *und* $L(\beta)$ *beschreiben, so sind auch* $\alpha\beta$*,* $(\alpha|\beta)$ *und* $(\alpha)^*$ *reguläre Ausdrücke, die die Sprachen*

- $L(\alpha\beta) = L(\alpha)L(\beta)$*,*
- $L(\alpha|\beta) = L(\alpha) \cup L(\beta)$ *und*
- $L((\alpha)^*) = L(\alpha)^*$

beschreiben.

Bemerkung 19.

- *Um Klammern zu sparen, definieren wir folgende* ***Präzedenzordnung****: Der Sternoperator* * *bindet stärker als der Produktoperator und dieser wiederum stärker als der Vereinigungsoperator. Für* $((a|b(c)^*)|d)$ *können wir also kurz* $a|bc^*|d$ *schreiben.*
- *Da der reguläre Ausdruck* $\gamma\gamma^*$ *die Sprache* $L(\gamma)^+$ *beschreibt, verwenden wir* γ^+ *als Abkürzung für den Ausdruck* $\gamma\gamma^*$*.*

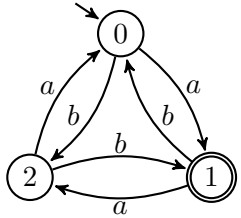
Beispiel 20. *Die regulären Ausdrücke* ϵ^**,* $\varnothing^*$*,* $(0|1)^*00$ *und* $(\epsilon 0|\varnothing 1^*)$ *beschreiben folgende Sprachen:*

γ	ϵ^*	$\varnothing^*$	$(0\|1)^*00$	$(\epsilon 0\|\varnothing 1^*)$
$L(\gamma)$	$\{\varepsilon\}^* = \{\varepsilon\}$	$\varnothing^* = \{\varepsilon\}$	$\{x00 \mid x \in \{0,1\}^*\}$	$\{0\}$

$\triangleleft$

Beispiel 21. *Betrachte nebenstehenden DFA M. Um für die von M erkannte Sprache*

$$L(M) = \{x \in \{a,b\}^* \mid \#_a(x) - \#_b(x) \equiv_3 1\}$$



einen regulären Ausdruck zu finden, betrachten wir zunächst die Sprache $L_{0,0}$ aller Wörter x, die den DFA M ausgehend vom Zustand 0 in den Zustand 0 überführen. Weiter sei $L_{0,0}^{\neq 0}$ die Teilsprache der Wörter $y \neq \varepsilon$ in $L_{0,0}$, die dies tun ohne zwischendurch den Zustand 0 zu besuchen. Dann setzt sich jedes $x \in L_{0,0}$ aus beliebig vielen Teilwörtern $y_1, \ldots, y_k \in L_{0,0}^{\neq 0}$ zusammen, d.h. $L_{0,0} = (L_{0,0}^{\neq 0})^*$.

Jedes $y \in L_{0,0}^{\neq 0}$ beginnt entweder mit einem a (Übergang von 0 nach 1) oder mit einem b (Übergang von 0 nach 2). Im ersten Fall folgt eine beliebige Anzahl von Teilwörtern ab (Wechsel zwischen 1 und 2), an die sich entweder das Suffix aa (Rückkehr von 1 nach 0 über 2) oder das Suffix b (direkte Rückkehr von 1 nach 0) anschließt. Analog folgt im zweiten Fall eine beliebige Anzahl von Teilwörtern ba (Wechsel zwischen 2 und 1), an die sich entweder das Suffix a (direkte Rückkehr von 2 nach 0) oder das Suffix bb (Rückkehr von 2 nach 0 über 1) anschließt. Daher lässt sich $L_{0,0}^{\neq 0}$ durch den regulären Ausdruck

$$\gamma_{0,0}^{\neq 0} = a(ab)^*(aa|b) \mid b(ba)^*(a|bb)$$

beschreiben. Eine ähnliche Überlegung zeigt, dass sich die die Sprache $L_{0,1}^{\neq 0}$ aller Wörter, die M ausgehend von 0 in den Zustand 1 überführen, ohne dass zwischendurch der Zustand 0 nochmals besucht wird, durch den regulären Ausdruck $\gamma_{0,1}^{\neq 0} = (a|bb)(ab)^*$ beschreibbar ist. Somit erhalten wir für $L(M)$ den regulären Ausdruck

$$\gamma_{0,1} = (\gamma_{0,0}^{\neq 0})^* \gamma_{0,1}^{\neq 0} = (a(ab)^*(aa|b) \mid b(ba)^*(a|bb))^*(a|bb)(ab)^*.$$

◁

Satz 22. $\{L(\gamma) \mid \gamma$ *ist ein regulärer Ausdruck*$\} \subseteq$ REG.

Beweis. Die Inklusion von rechts nach links ist klar, da die Basisausdrücke $\varnothing$, ϵ und a, $a \in \Sigma^*$, nur reguläre Sprachen beschreiben und die Sprachklasse REG unter Produkt, Vereinigung und Sternhülle abgeschlossen ist (siehe Beobachtungen 11 und 14).

Für die Gegenrichtung konstruieren wir zu einem DFA M einen regulären Ausdruck γ mit $L(\gamma) = L(M)$. Sei also $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ ein DFA, wobei wir annehmen können, dass $Z = \{1, \ldots, m\}$ und $q_0 = 1$ ist. Dann lässt sich $L(M)$ als Vereinigung

$$L(M) = \bigcup_{q \in E} L_{1,q}$$

von Sprachen der Form

$$L_{p,q} = \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(p,x) = q\}$$

darstellen. Folglich reicht es zu zeigen, dass die Sprachen $L_{p,q}$ durch reguläre Ausdrücke beschreibbar sind. Hierzu betrachten wir die Sprachen

$$L_{p,q}^r = \left\{ x_1 \ldots x_n \in \Sigma^* \;\middle|\; \begin{array}{c} \hat{\delta}(p, x_1 \ldots x_n) = q \text{ und für} \\ i = 1, \ldots, n-1 \text{ gilt } \hat{\delta}(p, x_1 \ldots x_i) \leq r \end{array} \right\}.$$

Wegen $L_{p,q} = L_{p,q}^m$ reicht es, reguläre Ausdrücke $\gamma_{p,q}^r$ für die Sprachen $L_{p,q}^r$ anzugeben. Im Fall $r = 0$ enthält

$$L_{p,q}^0 = \begin{cases} \{a \in \Sigma \mid \delta(p,a) = q\} \cup \{\varepsilon\}, & p = q, \\ \{a \in \Sigma \mid \delta(p,a) = q\}, & \text{sonst} \end{cases}$$

nur Buchstaben (und eventuell das leere Wort) und ist somit leicht durch einen regulären Ausdruck $\gamma_{p,q}^0$ beschreibbar. Wegen

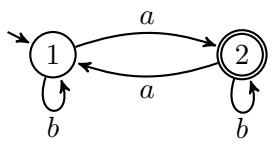
$$L_{p,q}^{r+1} = L_{p,q}^r \cup L_{p,r+1}^r (L_{r+1,r+1}^r)^* L_{r+1,q}^r$$

lassen sich aus den regulären Ausdrücken $\gamma_{p,q}^r$ für die Sprachen $L_{p,q}^r$ leicht reguläre Ausdrücke für die Sprachen $L_{p,q}^{r+1}$ gewinnen:

$$\gamma_{p,q}^{r+1} = \gamma_{p,q}^r | \gamma_{p,r+1}^r (\gamma_{r+1,r+1}^r)^* \gamma_{r+1,q}^r.$$

■

Beispiel 23. *Betrachte den DFA*



Da M insgesamt $m = 2$ Zustände und nur den Endzustand 2 besitzt, ist

$$L(M) = \bigcup_{q \in E} L_{1,q} = L_{1,2} = L^2_{1,2} = L(\gamma^2_{1,2}).$$

Um $\gamma^2_{1,2}$ zu berechnen, benutzen wir die Rekursionsformel

$$\gamma^{r+1}_{p,q} = \gamma^r_{p,q} | \gamma^r_{p,r+1} (\gamma^r_{r+1,r+1})^* \gamma^r_{r+1,q}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \gamma^2_{1,2} &= \gamma^1_{1,2} | \gamma^1_{1,2} (\gamma^1_{2,2})^* \gamma^1_{2,2}, \\ \gamma^1_{1,2} &= \gamma^0_{1,2} | \gamma^0_{1,1} (\gamma^0_{1,1})^* \gamma^0_{1,2}, \\ \gamma^1_{2,2} &= \gamma^0_{2,2} | \gamma^0_{2,1} (\gamma^0_{1,1})^* \gamma^0_{1,2}. \end{aligned}$$

Um den regulären Ausdruck $\gamma^2_{1,2}$ für $L(M)$ zu erhalten, genügt es also, die regulären Ausdrücke $\gamma^0_{1,1}$, $\gamma^0_{1,2}$, $\gamma^0_{2,1}$, $\gamma^0_{2,2}$, $\gamma^1_{1,2}$ und $\gamma^1_{2,2}$ zu berechnen:

r	p,q			
	$1,1$	$1,2$	$2,1$	$2,2$
0	$\epsilon \mid b$	a	a	$\epsilon \mid b$
1	-	$\underbrace{a \mid (\epsilon \mid b)(\epsilon \mid b)^* a}_{b^* a}$	-	$\underbrace{(\epsilon \mid b) \mid a(\epsilon \mid b)^* a}_{\epsilon \mid b \mid ab^* a}$
2	-	$\underbrace{b^* a \mid b^* a(\epsilon \mid b \mid ab^* a)^*(\epsilon \mid b \mid ab^* a)}_{b^* a(b \mid ab^* a)^*}$	-	-

◁

Korollar 24. *Sei L eine Sprache. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- *L ist regulär,*
- *es gibt einen DFA M mit $L = L(M)$,*
- *es gibt einen NFA N mit $L = L(N)$,*
- *es gibt einen regulären Ausdruck γ mit $L = L(\gamma)$,*
- *L lässt sich mit den Operationen Vereinigung, Produkt und Sternhülle aus endlichen Sprachen gewinnen,*
- *L lässt sich mit den Operationen $\cap$, $\cup$, Komplement, Produkt und Sternhülle aus endlichen Sprachen gewinnen.*

Wir werden bald noch eine weitere Charakterisierung von REG kennenlernen, nämlich durch reguläre Grammatiken. Zuvor befassen wir uns jedoch mit dem Problem, DFAs zu minimieren. Dabei spielen Relationen (insbesondere Äquivalenzrelationen) eine wichtige Rolle.

2.4 Relationalstrukturen

Sei A eine nichtleere Menge, R_i eine k_i-stellige Relation auf A, d.h. $R_i \subseteq A^{k_i}$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann heißt $(A; R_1, \ldots, R_n)$ ***Relationalstruktur***. Die Menge A heißt ***Grundmenge***, ***Trägermenge*** oder ***Individuenbereich*** der Relationalstruktur.

Wir werden hier hauptsächlich den Fall $n = 1$, $k_1 = 2$, also (A, R) mit $R \subseteq A \times A$ betrachten. Man nennt dann R eine ***(binäre) Relation*** auf A. Oft wird für $(a, b) \in R$ auch die ***Infix-Schreibweise*** aRb benutzt.

Beispiel 25.

- *(F, M) mit $F = \{f \mid f$ ist Fluss in Europa$\}$ und*

$$M = \{(f, g) \in F \times F \mid f \text{ mündet in } g\}.$$

- (U, B) *mit* $U = \{x \mid x$ *ist Berliner*$\}$ *und*

$$B = \{(x, y) \in U \times U \mid x \text{ ist Bruder von } y\}.$$

- $(\mathsf{P}(M), \subseteq)$, *wobei* $\mathsf{P}(M)$ *die Potenzmenge einer beliebigen Menge* M *und* $\subseteq$ *die Inklusionsbeziehung auf den Teilmengen von* M *ist.*
- (A, Id_A), *wobei* $Id_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$ *die* ***Identität auf*** A *ist.*
- $(\mathbb{R}, \leq)$.
- $(\mathbb{Z}, |)$, *wobei* $|$ *die "teilt"-Relation bezeichnet (d.h.* $a|b$*, falls ein* $c \in \mathbb{Z}$ *mit* $b = ac$ *existiert).* $\triangleleft$

Da Relationen Mengen sind, sind auf ihnen die mengentheoretischen Operationen ***Durchschnitt***, ***Vereinigung***, ***Komplement*** und ***Differenz*** definiert. Seien R und S Relationen auf A, dann ist

$$\begin{aligned} R \cap S &= \{(x, y) \in A \times A \mid xRy \wedge xSy\}, \\ R \cup S &= \{(x, y) \in A \times A \mid xRy \vee xSy\}, \\ R - S &= \{(x, y) \in A \times A \mid xRy \wedge \neg xSy\}, \\ \overline{R} &= (A \times A) - R. \end{aligned}$$

Sei allgemeiner $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(A \times A)$ eine beliebige Menge von Relationen auf A. Dann sind der ***Schnitt über*** $\mathcal{M}$ und die ***Vereinigung über*** $\mathcal{M}$ folgende Relationen:

$$\begin{aligned} \bigcap \mathcal{M} &= \bigcap_{R \in \mathcal{M}} R = \{(x, y) \mid \forall R \in \mathcal{M} : xRy\}, \\ \bigcup \mathcal{M} &= \bigcup_{R \in \mathcal{M}} R = \{(x, y) \mid \exists R \in \mathcal{M} : xRy\}. \end{aligned}$$

Die ***transponierte (konverse) Relation*** zu R ist

$$R^T = \{(y, x) \mid xRy\}.$$

R^T wird oft auch mit R^{-1} bezeichnet. Z.B. ist $(\mathbb{R}, \leq^T) = (\mathbb{R}, \geq)$.

Seien R und S Relationen auf A. Das ***Produkt*** oder die ***Komposition*** von R und S ist

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times A \mid \exists y \in A : xRy \wedge ySz\}.$$

Beispiel 26. *Ist* B *die Relation "ist Bruder von",* V *"ist Vater von",* M *"ist Mutter von" und* $E = V \cup M$ *"ist Elternteil von", so ist* $B \circ E$ *die Onkel-Relation.* $\triangleleft$

Übliche Bezeichnungen für das Relationenprodukt sind auch $R;S$ und $R \cdot S$ oder einfach RS. Das n-fache Relationenprodukt $R \circ \cdots \circ R$ von R wird mit R^n bezeichnet. Dabei ist $R^0 = Id$.

Vorsicht: Das n-fache Relationenprodukt R^n von R sollte nicht mit dem n-fachen kartesischen Produkt $R \times \cdots \times R$ der *Menge* R verwechselt werden. Wir vereinbaren, dass R^n das n-fache Relationenprodukt bezeichnen soll, falls R eine Relation ist.

Eigenschaften von Relationen

Sei R eine Relation auf A. Dann heißt R

reflexiv,	falls $\forall x \in A : xRx$	(also $Id_A \subseteq R$)
irreflexiv,	falls $\forall x \in A : \neg xRx$	(also $Id_A \subseteq \overline{R}$)
symmetrisch,	falls $\forall x, y \in A : xRy \Rightarrow yRx$	(also $R \subseteq R^T$)
asymmetrisch,	falls $\forall x, y \in A : xRy \Rightarrow \neg yRx$	(also $R \subseteq \overline{R^T}$)
antisymmetrisch,	falls $\forall x, y \in A : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$	(also $R \cap R^T \subseteq Id$)
konnex,	falls $\forall x, y \in A : xRy \vee yRx$	(also $A \times A \subseteq R \cup R^T$)
semikonnex,	falls $\forall x, y \in A : x \neq y \Rightarrow xRy \vee yRx$	(also $\overline{Id} \subseteq R \cup R^T$)
transitiv,	falls $\forall x, y, z \in A : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$	(also $R^2 \subseteq R$)

gilt.

Die nachfolgende Tabelle gibt einen Überblick über die wichtigsten Relationalstrukturen.

	refl.	sym.	trans.	antisym.	asym.	konnex	semikon.
Äquivalenzrelation	✓	✓	✓				
(Halb-)Ordnung	✓		✓	✓			
Striktordnung			✓		✓		
lineare Ordnung			✓	✓		✓	
lin. Striktord.			✓		✓		✓
Quasiordnung	✓		✓				

In der Tabelle sind nur die definierenden Eigenschaften durch ein "✓" gekennzeichnet. Das schließt nicht aus, dass gleichzeitig auch noch weitere Eigenschaften vorliegen können.

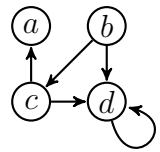
Beispiel 27.

- *Die Relation "ist Schwester von" ist zwar in einer reinen Damengesellschaft symmetrisch, i.a. jedoch weder symmetrisch noch asymmetrisch noch antisymmetrisch.*
- *Die Relation "ist Geschwister von" ist zwar symmetrisch, aber weder reflexiv noch transitiv und somit keine Äquivalenzrelation.*
- $(\mathbb{R}, <)$ *ist irreflexiv, asymmetrisch, transitiv und semikonnex und somit eine lineare Striktordnung.*
- $(\mathbb{R}, \leq)$ *und* $(\mathsf{P}(M), \subseteq)$ *sind reflexiv, antisymmetrisch und transitiv und somit Ordnungen.*
- $(\mathbb{R}, \leq)$ *ist auch konnex und somit eine lineare Ordnung.*
- $(\mathsf{P}(M), \subseteq)$ *ist zwar im Fall* $\|M\| \leq 1$ *konnex, aber im Fall* $\|M\| \geq 2$ *weder semikonnex noch konnex.* ◁

Graphische Darstellung von Relationen

Eine Relation R auf einer endlichen Menge A kann durch einen ***gerichteten Graphen*** (oder ***Digraphen***) $G = (V, E)$ mit ***Knotenmenge*** $V = A$ und ***Kantenmenge*** $E = R$ veranschaulicht werden. Hierzu stellen wir jedes Element $x \in A$ als einen Knoten dar und verbinden jedes Knotenpaar $(x, y) \in R$ durch eine gerichtete Kante (Pfeil). Zwei durch eine Kante verbundene Knoten heißen ***benachbart*** oder ***adjazent***.

Beispiel 28. *Für die Relation* (A, R) *mit* $A = \{a, b, c, d\}$ *und* $R = \{(b, c), (b, d), (c, a), (c, d), (d, d)\}$ *erhalten wir folgende graphische Darstellung.*



◁

Der ***Ausgangsgrad*** eines Knotens $x \in V$ ist $\deg^+(x) = \|R[x]\|$, wobei $R[x] = \{y \in V \mid xRy\}$ die Menge der ***Nachfolger*** von x ist. Entsprechend ist $\deg^-(x) = \|\{y \in V \mid yRx\}\|$ der ***Eingangsgrad*** von x und $R^{-1}[x] = \{y \in V \mid yRx\}$ die Menge der ***Vorgänger*** von x. Falls R symmetrisch ist, werden die Pfeilspitzen meist weggelassen. In diesem Fall ist $d(x) = \deg^-(x) = \deg^+(x)$ der ***Grad*** von x und $R[x] = R^{-1}[x]$ heißt die ***Nachbarschaft*** von x. Ist R zudem irreflexiv, so ist G ***schleifenfrei*** und wir erhalten einen ***(ungerichteten) Graphen***.

Darstellung durch eine Adjazenzmatrix

Eine Relation R auf einer endlichen (geordneten) Menge $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ lässt sich durch eine boolesche $n \times n$-Matrix $M_R = (m_{ij})$ mit

$$m_{ij} := \begin{cases} 1, & a_i R a_j, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

darstellen. Beispielsweise hat die Relation

$$R = \{(b, c), (b, d), (c, a), (c, d), (d, d)\}$$

auf der Menge $A = \{a, b, c, d\}$ die Matrixdarstellung

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Darstellung durch eine Adjazenzliste

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, eine endliche Relation R in Form einer Tabelle darzustellen, die jedem Element $x \in A$ seine Nachfolgermenge $R[x]$ in Form einer Liste zuordnet:

x	$R[x]$
a	-
b	c, d
c	a, d
d	d

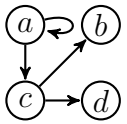
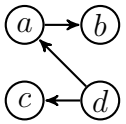
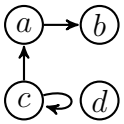
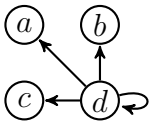
Sind $M_R = (r_{ij})$ und $M_S = (s_{ij})$ boolesche $n \times n$-Matrizen für R und S, so erhalten wir für $T = R \circ S$ die Matrix $M_T = (t_{ij})$ mit

$$t_{ij} = \bigvee_{k=1,\ldots,n} (r_{ik} \wedge s_{kj})$$

Die Nachfolgermenge $T[x]$ von x bzgl. der Relation $T = R \circ S$ berechnet sich zu

$$T[x] = \bigcup \{S[y] \mid y \in R[x]\} = \bigcup_{y \in R[x]} S[y].$$

Beispiel 29. *Betrachte die Relationen* $R = \{(a, a), (a, c), (c, b), (c, d)\}$ *und* $S = \{(a, b), (d, a), (d, c)\}$ *auf der Menge* $A = \{a, b, c, d\}$.

Relation	R	S	$R \circ S$	$S \circ R$
Digraph				
Adjazenz-matrix	1 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0	0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0	0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1
Adjazenz-liste	$a : a, c$ $b :$ - $c : b, d$ $d :$ -	$a : b$ $b :$ - $c :$ - $d : a, c$	$a : b$ $b :$ - $c : a, c$ $d :$ -	$a :$ - $b :$ - $c :$ - $d : a, b, c, d$

◁

Beobachtung: Das Beispiel zeigt, dass das Relationenprodukt nicht kommutativ ist, d.h. i.a. gilt nicht $R \circ S = S \circ R$.

Als nächstes zeigen wir, dass die Menge $\mathcal{R} = \mathsf{P}(A \times A)$ aller binären Relationen auf A mit dem Relationenprodukt $\circ$ als binärer Operation und der Relation Id_A als neutralem Element eine Halbgruppe (oder ***Monoid***) bildet.

Satz 30. *Seien Q, R, S Relationen auf A. Dann gilt*

(i) $(Q \circ R) \circ S = Q \circ (R \circ S)$, *d.h. $\circ$ ist assoziativ,*

(ii) $Id \circ R = R \circ Id = R$, *d.h. Id ist neutrales Element.*

Beweis.

(i) Es gilt:

$$\begin{aligned} x\,(Q \circ R) \circ S\,y &\Leftrightarrow \exists u \in A : x\,(Q \circ R)\,u \;\wedge\; u\,S\,y \\ &\Leftrightarrow \exists u \in A : (\exists v \in A : x\,Q\,v\,R\,u) \;\wedge\; u\,S\,y \\ &\Leftrightarrow \exists u, v \in A : x\,Q\,v\,R\,u\,S\,y \\ &\Leftrightarrow \exists v \in A : x\,Q\,v \;\wedge\; (\exists u \in A : v\,R\,u \;\wedge\; u\,S\,y) \\ &\Leftrightarrow \exists v \in A : x\,Q\,v\,(R \circ S)\,y \\ &\Leftrightarrow x\,Q \circ (R \circ S)\,y \end{aligned}$$

(ii) Wegen $x\ Id \circ R\ y \Leftrightarrow \exists z : x = z \wedge z\ R\ y \Leftrightarrow x\ R\ y$ folgt $Id \circ R = R$. Die Gleichheit $R \circ Id = R$ folgt analog.

■

Manchmal steht man vor der Aufgabe, eine gegebene Relation R durch eine möglichst kleine Modifikation in eine Relation R' mit vorgegebenen Eigenschaften zu überführen. Will man dabei alle in R enthaltenen Paare beibehalten, dann sollte R' aus R durch Hinzufügen möglichst weniger Paare hervorgehen.

Es lässt sich leicht nachprüfen, dass der Schnitt über eine Menge reflexiver (bzw. transitiver oder symmetrischer) Relationen wieder reflexiv (bzw. transitiv oder symmetrisch) ist. Folglich existiert zu jeder Relation R auf einer Menge A eine kleinste reflexive (bzw. transitive oder symmetrische) Relation R', die R enthält.

Definition 31. *Sei R eine Relation auf A.*

- *Die* ***reflexive Hülle*** *von R ist*

$$h_{refl}(R) = \bigcap\{S \subseteq A \times A \mid S \text{ ist reflexiv und } R \subseteq S\}.$$

- *Die* ***symmetrische Hülle*** *von R ist*

$$h_{sym}(R) = \bigcap\{S \subseteq A \times A \mid S \text{ ist symmetrisch und } R \subseteq S\}.$$

- *Die* ***transitive Hülle*** *von R ist*

$$R^+ = \bigcap\{S \subseteq A \times A \mid S \text{ ist transitiv und } R \subseteq S\}.$$

- *Die* ***reflexiv-transitive Hülle*** *von R ist*

$$R^* = \bigcap\{S \subseteq A \times A \mid S \text{ ist reflexiv, transitiv und } R \subseteq S\}.$$

- *Die* ***Äquivalenzhülle*** *von R ist*

$$h_{äq}(R) = \bigcap\{S \mid S \text{ ist eine Äquivalenzrelation auf } A \text{ und } R \subseteq S\}.$$

Satz 32. *Sei R eine Relation auf A.*

(i) $h_{refl}(R) = R \cup Id_A$,

(ii) $h_{sym}(R) = R \cup R^T$,

(iii) $R^+ = \bigcup_{n \geq 1} R^n$,

(iv) $R^* = \bigcup_{n \geq 0} R^n$,

(v) $h_{äq}(R) = (R \cup R^T)^*$.

Beweis. Siehe Übungen. ■

Anschaulich besagt der vorhergehende Satz, dass ein Paar (a, b) genau dann in der reflexiv-transitiven Hülle R^* von R ist, wenn es ein $n \geq 0$ gibt mit aR^nb, d.h. es gibt Elemente $x_0, \ldots, x_n \in A$ mit $x_0 = a$, $x_n = b$ und

$$x_0 R x_1 R x_2 \ldots x_{n-1} R x_n.$$

In der Graphentheorie nennt man $x_0, \ldots, x_n$ einen ***Weg*** der Länge n von a nach b.

2.4.1 Ordnungs- und Äquivalenzrelationen

Wir betrachten zunächst ***Ordnungsrelationen***, die durch die drei Eigenschaften reflexiv, antisymmetrisch und transitiv definiert sind.

Beispiel 33.

- $(\mathsf{P}(M), \subseteq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{R}, \leq)$ *und* $(\mathbb{N}, |)$ *sind Ordnungen.* $(\mathbb{Z}, |)$ *ist keine Ordnung, aber eine Quasiordnung.*
- *Für jede Menge M ist die relationale Struktur $(\mathcal{P}(M); \subseteq)$ eine Ordnung. Diese ist nur im Fall $\|M\| \leq 1$ linear.*
- *Ist R eine Relation auf A und $B \subseteq A$, so ist $R_B = R \cap (B \times B)$ die* Einschränkung *von R auf B.*
- *Einschränkungen von (linearen) Ordnungen sind ebenfalls (lineare) Ordnungen.*

- *Beispielsweise ist* $(\mathbb{Q}, \leq)$ *die Einschränkung von* $(\mathbb{R}, \leq)$ *auf* $\mathbb{Q}$ *und* $(\mathbb{N}, |)$ *die Einschränkung von* $(\mathbb{Z}, |)$ *auf* $\mathbb{N}$. $\triangleleft$

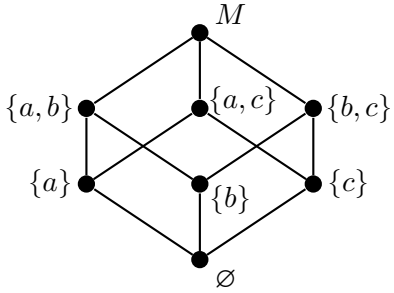
Ordnungen lassen sich sehr anschaulich durch Hasse-Diagramme darstellen. Sei $\leq$ eine Ordnung auf A und sei $<$ die Relation $\leq \cap \overline{Id}_A$. Um die Ordnung $\leq$ in einem ***Hasse-Diagramm*** darzustellen, wird nur der Graph der Relation

$$\lessdot = < \setminus <^2, \text{ d.h. } x \lessdot y \;\Leftrightarrow\; x < y \wedge \neg \exists z : x < z < y$$

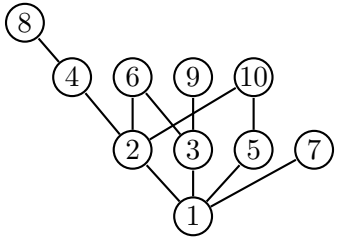
gezeichnet. Für $x \lessdot y$ sagt man auch, y ist ***oberer Nachbar*** von x. Weiterhin wird im Fall $x \lessdot y$ der Knoten y oberhalb vom Knoten x gezeichnet, so dass auf Pfeilspitzen verzichtet werden kann.

Beispiel 34.

Die Inklusionsrelation auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ *von* $M = \{a, b, c\}$ *lässt sich durch nebenstehendes Hasse-Diagramm darstellen.*



Schränken wir die "teilt"-Relation auf die Menge $\{1, 2, \ldots, 10\}$ *ein, so erhalten wir folgendes Hasse-Diagramm.*



$\triangleleft$

Definition 35. *Sei* $\leq$ *eine Ordnung auf* A *und sei* b *ein Element in einer Teilmenge* $B \subseteq A$.

- b *heißt* ***kleinstes Element*** *oder* ***Minimum*** *von* B *(kurz* $b = \min B$*), falls gilt:*

$$\forall b' \in B : b \leq b'.$$

- b *heißt* ***größtes Element*** *oder* ***Maximum*** *von* B *(kurz* $b = \max B$*), falls gilt:*

$$\forall b' \in B : b' \leq b.$$

- b *heißt* ***minimal*** *in* B*, falls es in* B *kein kleineres Element gibt:*

$$\forall b' \in B : b' \leq b \Rightarrow b' = b.$$

- b *heißt* ***maximal*** *in* B*, falls es in* B *kein größeres Element gibt:*

$$\forall b' \in B : b \leq b' \Rightarrow b = b'.$$

Bemerkung 36. *Da Ordnungen antisymmetrisch sind, kann es in jeder Teilmenge* B *höchstens ein kleinstes und höchstens ein größtes Element geben. Die Anzahl der minimalen und maximalen Elemente in* B *kann dagegen beliebig groß sein.*

Definition 37. *Sei* $\leq$ *eine Ordnung auf* A *und sei* $B \subseteq A$.

- *Jedes Element* $u \in A$ *mit* $u \leq b$ *für alle* $b \in B$ *heißt* ***untere*** *und jedes* $o \in A$ *mit* $b \leq o$ *für alle* $b \in B$ *heißt* ***obere Schranke*** *von* B.
- B *heißt* ***nach oben beschränkt****, wenn* B *eine obere Schranke hat, und* ***nach unten beschränkt****, wenn* B *eine untere Schranke hat.*
- B *heißt* ***beschränkt****, wenn* B *nach oben und nach unten beschränkt ist.*
- *Besitzt* B *eine größte untere Schranke* i*, d.h. besitzt die Menge* U *aller unteren Schranken von* B *ein größtes Element* i*, so heißt* i *das* ***Infimum*** *von* B *(kurz* $i = \inf B$*):*

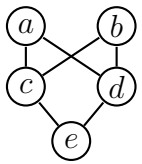
$$(\forall b \in B : b \geq i) \wedge [\forall u \in A : (\forall b \in B : b \geq u) \Rightarrow u \leq i].$$

- *Besitzt B eine kleinste obere Schranke s, d.h. besitzt die Menge O aller oberen Schranken von B ein kleinstes Element s, so heißt s das* **Supremum** *von B ($s = \sup B$):*

$$(\forall b \in B : b \leq s) \wedge [\forall o \in A : (\forall b \in B : b \leq o) \Rightarrow s \leq o]$$

Bemerkung 38. *B kann nicht mehr als ein Supremum und ein Infimum haben.*

Beispiel 39. *Betrachte nebenstehende Ordnung auf der Menge $A = \{a, b, c, d, e\}$. Die folgende Tabelle zeigt für verschiedene Teilmengen $B \subseteq A$ alle minimalen und maximalen Elemente in B Minimum und Maximum, alle unteren und oberen Schranken, sowie Infimum und Supremum von B (falls existent).*



B	*minimal*	*maximal*	*min*	*max*	*untere Schranken*	*obere Schranken*	*inf*	*sup*
$\{a, b\}$	a, b	a, b	-	-	c, d, e	-	-	-
$\{c, d\}$	c, d	c, d	-	-	e	a, b	e	-
$\{a, b, c\}$	c	a, b	c	-	c, e	-	c	-
$\{a, b, c, e\}$	e	a, b	e	-	e	-	e	-
$\{a, c, d, e\}$	e	a	e	a	e	a	e	a

◁

Bemerkung 40.

- *Auch in linearen Ordnungen muss nicht jede beschränkte Teilmenge ein Supremum oder Infimum besitzen.*
- *So hat in der linear geordneten Menge $(\mathbb{Q}, \leq)$ die Teilmenge*

$$B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$$

  weder ein Supremum noch ein Infimum.

- *Dagegen hat in einer linearen Ordnung jede* endliche *Teilmenge ein kleinstes und ein größtes Element und somit erst recht ein Supremum und ein Infimum.*

Als nächstes betrachten wir Äquivalenzrelationen, die durch die drei Eigenschaften reflexiv, symmetrisch und transitiv definiert sind.

Ist E eine Äquivalenzrelation, so nennt man die Nachbarschaft $E[x]$ die ***von x repräsentierte Äquivalenzklasse*** und bezeichnet sie mit $[x]_E$ oder einfach mit $[x]$. Eine Menge $S \subseteq A$ heißt ***Repräsentantensystem***, falls sie genau ein Element aus jeder Äquivalenzklasse enthält.

Beispiel 41.

- *Auf der Menge aller Geraden im $\mathbb{R}^2$ die Parallelität. Offenbar bilden alle Geraden mit derselben Richtung (oder Steigung) jeweils eine Äquivalenzklasse. Daher wird ein Repräsentantensystem beispielsweise durch die Menge aller Ursprungsgeraden gebildet.*
- *Auf der Menge aller Menschen "im gleichen Jahr geboren wie". Hier bildet jeder Jahrgang eine Äquivalenzklasse.*
- *Auf $\mathbb{Z}$ die Relation "gleicher Rest bei Division durch m". Die zugehörigen Äquivalenzklassen sind*

$$[r] = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv r \mod m\}, \; r = 0, 1, \ldots, m-1.$$

  Ein Repräsentantensystem wird beispielsweise durch die Reste $0, 1, \ldots, m-1$ gebildet. ◁

Definition 42. *Eine Familie $\{B_i \mid i \in I\}$ von nichtleeren Teilmengen $B_i \subseteq A$ heißt* **Partition** *der Menge A, falls gilt:*

a) die Mengen B_i **überdecken** *A, d.h. $A = \bigcup_{i \in I} B_i$ und*

b) die Mengen B_i sind **paarweise disjunkt**, *d.h. für je zwei verschiedene Mengen $B_i \neq B_j$ gilt $B_i \cap B_j = \varnothing$.*

Die Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation E bilden eine Partition $\{[x] \mid x \in A\}$ von A (siehe Satz 43). Diese Partition wird auch ***Quotienten-*** oder ***Faktormenge*** genannt und mit A/E bezeichnet. Die Anzahl der Äquivalenzklassen von E wird auch als der ***Index*** von E bezeichnet. Wie der nächste Satz zeigt, beschreiben Äquivalenzrelationen auf A und Partitionen von A denselben Sachverhalt.

Satz 43. *Sei E eine Relation auf A. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) E ist eine Äquivalenzrelation auf A.

(ii) Für alle $x, y \in A$ gilt

$$xEy \Leftrightarrow E[x] = E[y] \qquad (*)$$

(iii) Es gibt eine Partition $\{B_i \mid i \in I\}$ von A mit

$$xEy \Leftrightarrow \exists i \in I : x, y \in B_i.$$

Beweis.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Sei E eine Äquivalenzrelation auf A. Da E transitiv ist, impliziert xEy die Inklusion $E[y] \subseteq E[x]$:

$$z \in E[y] \Rightarrow yEz \Rightarrow xEz \Rightarrow z \in E[x].$$

Da E symmetrisch ist, folgt aus xEy aber auch $E[x] \subseteq E[y]$.

Umgekehrt folgt aus $E[x] = E[y]$ wegen der Reflexivität von E, dass $y \in E[y] = E[x]$ enthalten ist, und somit xEy. Dies zeigt, dass E die Äquivalenz $(*)$ erfüllt.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Wir zeigen, dass die Äquivalenzklassen $E[x]$, $x \in A$, die Menge A partitionieren, falls E die Bedingung $(*)$ erfüllt.

Wegen $E[x] = E[x]$ folgt xEx und somit $x \in E[x]$. Folglich überdecken die Mengen $E[x]$ die Menge A.

Ist $E[x] \cap E[y] \neq \varnothing$ und z ein Element in $E[x] \cap E[y]$, so gilt xEz und yEz und daher folgt $E[x] = E[z] = E[y]$.

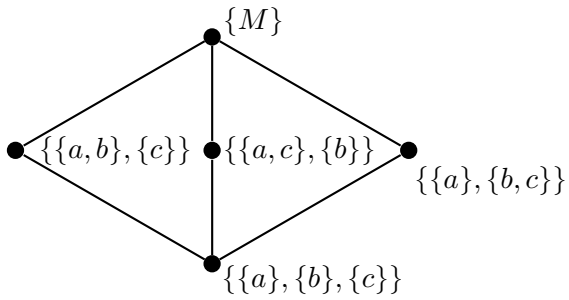
$(iii) \Rightarrow (i)$ Existiert schließlich eine Partition $\{B_i \mid i \in I\}$ von A mit $xEy \Leftrightarrow \exists i \in I : x, y \in B_i$, so ist E reflexiv, da zu jedem $x \in A$ eine Menge B_i mit $x \in B_i$ existiert. Zudem ist E symmetrisch, da aus $x, y \in B_i$ auch $y, x \in B_i$ folgt. Und E ist transitiv, da aus $x, y \in B_i$ und $y, z \in B_j$ wegen $z \in B_i \cap B_j$ die Gleichheit $B_i = B_j$ und somit $x, z \in B_i$ folgt.

■

Die kleinste Äquivalenzrelation auf A ist die ***Identität*** Id_A, die größte die ***Allrelation*** $A \times A$. Die Äquivalenzklassen der Identität enthalten jeweils nur ein Element, d.h. $A/Id_A = \{\{x\} \mid x \in A\}$, und die Allrelation erzeugt nur eine Äquivalenzklasse, nämlich $A/(A \times A) = \{A\}$.

Für zwei Äquivalenzrelationen $E \subseteq E'$ sind auch die Äquivalenzklassen $[x]_E$ von E in den Klassen $[x]_{E'}$ von E' enthalten. Folglich ist jede Äquivalenzklasse von E' die Vereinigung von (evtl. mehreren) Äquivalenzklassen von E. E bewirkt also eine ***feinere*** Partitionierung als E'. Demnach ist die Identität die ***feinste*** und die Allrelation die ***gröbste*** Äquivalenzrelation.

Die feiner-Relation auf der Menge aller Partitionen von $M = \{a, b, c\}$ hat das folgende Hasse-Diagramm:



2.4.2 Abbildungen

Definition 44. *Sei R eine binäre Relation auf einer Menge M.*

- *R heißt* **rechtseindeutig**, *falls für alle $x, y, z \in M$ gilt:*

$$xRy \wedge xRz \Rightarrow y = z.$$

- *R heißt* **linkseindeutig**, *falls für alle $x, y, z \in M$ gilt:*

$$xRz \wedge yRz \Rightarrow x = y.$$

- *Der* **Nachbereich** *$N(R)$ und der* **Vorbereich** *$V(R)$ von R sind*

$$N(R) = \bigcup_{x \in M} R[x] \quad \text{und} \quad V(R) = \bigcup_{x \in M} R^T[x].$$

- *Eine rechtseindeutige Relation R mit $V(R) = A$ und $N(R) \subseteq B$ heißt* **Abbildung** *oder* **Funktion von A nach B** *(kurz $R : A \to B$).*

Bemerkung 45.

- *Wie üblich werden wir Abbildungen meist mit kleinen Buchstaben $f, g, h, \ldots$ bezeichnen und für $(x, y) \in f$ nicht xfy sondern $f(x) = y$ oder $f : x \mapsto y$ schreiben.*
- *Ist $f : A \to B$ eine Abbildung, so wird der Vorbereich $V(f) = A$ der* **Definitionsbereich** *und die Menge B der* **Wertebereich** *oder* **Wertevorrat** *von f genannt.*
- *Der Nachbereich $N(f)$ wird als* **Bild** *von f bezeichnet.*

Definition 46.

- *Im Fall $N(f) = B$ heißt f* **surjektiv**.
- *Ist f linkseindeutig, so heißt f* **injektiv**. *In diesem Fall impliziert $f(x) = f(y)$ die Gleichheit $x = y$.*
- *Eine injektive und surjektive Abbildung heißt* **bijektiv**.
- *Ist f injektiv, so ist auch $f^{-1} : N(f) \to A$ eine Abbildung, die als die zu f* inverse Abbildung *bezeichnet wird.*

Man beachte, dass der Definitionsbereich $V(f^{-1}) = N(f)$ von f^{-1} nur dann gleich B ist, wenn f auch surjektiv, also eine Bijektion ist.

2.4.3 Homo- und Isomorphismen

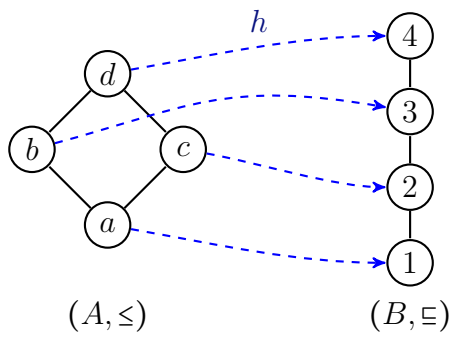
Definition 47. *Seien (A_1, R_1) und (A_2, R_2) Relationalstrukturen.*

- *Eine Abbildung $h : A_1 \to A_2$ heißt* **Homomorphismus**, *falls für alle $a, b \in A_1$ gilt:*

$$aR_1b \Rightarrow h(a)R_2h(b).$$

- *Sind (A_1, R_1) und (A_2, R_2) Ordnungen, so spricht man von* **Ordnungshomomorphismen** *oder einfach von* **monotonen** *Abbildungen.*
- *Injektive Ordnungshomomorphismen werden auch* **streng monotone** *Abbildungen genannt.*

Beispiel 48. *Folgende Abbildung $h : A_1 \to A_2$ ist ein bijektiver Ordnungshomomorphismus.*



Obwohl h ein bijektiver Homomorphismus ist, ist die Umkehrung h^{-1} kein Homomorphismus, da h^{-1} nicht monoton ist. Es gilt nämlich

$$2 \sqsubseteq 3, \text{ aber } h^{-1}(2) = b \not\leq c = h^{-1}(3).$$

◁

Definition 49. *Ein bijektiver Homomorphismus $h : A_1 \to A_2$, bei dem auch h^{-1} ein Homomorphismus ist, d.h. es gilt*

$$\forall a, b \in A_1 : aR_1b \Leftrightarrow h(a)R_2h(b).$$

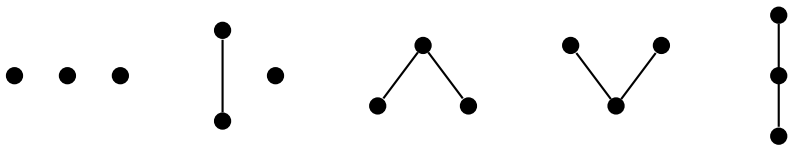
heißt **Isomorphismus**. *In diesem Fall heißen die Strukturen (A_1, R_1) und (A_2, R_2)* **isomorph** *(kurz: $(A_1, R_1) \cong (A_2, R_2)$).*

Beispiel 50.

- *Die Abbildung $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ mit*

  $$h : x \mapsto e^x$$

  ist ein Ordnungsisomorphismus zwischen $(\mathbb{R}, \leq)$ und $(\mathbb{R}^+, \leq)$.
- *Es existieren genau 5 nichtisomorphe Ordnungen mit 3 Elementen:*

  Anders ausgedrückt: Die Klasse aller dreielementigen Ordnungen zerfällt unter der Äquivalenzrelation $\cong$ in fünf Äquivalenzklassen, die durch obige fünf Hasse-Diagramme repräsentiert werden.
- *Für $n \in \mathbb{N}$ sei*

  $$T_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ teilt } n\}$$

  die Menge aller Teiler von n und

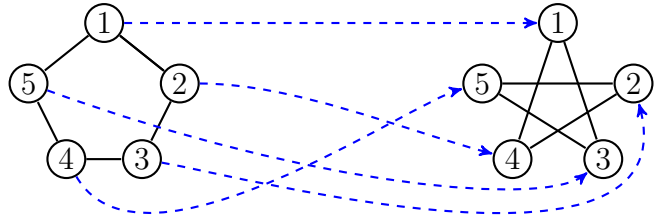
  $$P_n = \{p \in T_n \mid p \text{ ist prim}\}$$

  die Menge aller Primteiler von n. Dann ist die Abbildung

  $$h : k \mapsto P_k$$

  ein (surjektiver) Ordnungshomomorphismus von $(T_n, |)$ auf $(\mathcal{P}(P_n), \subseteq)$. h ist sogar ein Isomorphismus, falls n quadratfrei *ist (d.h. es gibt kein $k \geq 2$, so dass k^2 die Zahl n teilt).*

- *Die beiden folgenden Graphen G und G' sind isomorph. Zwei Isomorphismen sind beispielsweise h_1 und h_2.*

  $G = (V, E)$ $\qquad$ $G' = (V, E')$

v	1 2 3 4 5
$h_1(v)$	1 3 5 2 4
$h_2(v)$	1 4 2 5 3

- *Während auf der Knotenmenge $V = [3]$ insgesamt $2^3 = 8$ verschiedene Graphen existieren, gibt es auf dieser Menge nur 4 verschiedene nichtisomorphe Graphen:*

$\triangleleft$

Bemerkung 51. *Auf der Knotenmenge $V = \{1, \ldots, n\}$ existieren genau $2^{\binom{n}{2}}$ verschiedene Graphen. Sei $a(n)$ die Anzahl aller nichtisomorphen Graphen auf V. Da jede Isomorphieklasse mindestens einen und höchstens $n!$ verschiedene Graphen enthält, ist $2^{\binom{n}{2}}/n! \leq a(n) \leq 2^{\binom{n}{2}}$.*

Tatsächlich ist $a(n)$ **asymptotisch gleich** *$u(n) = 2^{\binom{n}{2}}/n!$ (in Zeichen: $a(n) \sim u(n)$), d.h.*

$$\lim_{n\to\infty} a(n)/u(n) = 1.$$

Also gibt es auf $V = \{1, \ldots, n\}$ nicht wesentlich mehr als $u(n)$ nichtisomorphe Graphen.

2.5 Minimierung von DFAs

Wie können wir feststellen, ob ein DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ unnötige Zustände enthält? Zunächst einmal können alle Zustände entfernt werden, die nicht vom Startzustand aus erreichbar sind. Im folgenden gehen wir daher davon aus, dass M keine unerreichbaren Zustände enthält. Offensichtlich können zwei Zustände q und p zu einem Zustand verschmolzen werden (kurz: $q \sim p$), wenn M von q und von p ausgehend jeweils dieselben Wörter akzeptiert. Bezeichnen wir den DFA $(Z, \Sigma, \delta, q, E)$ mit M_q und $L(M_q)$ mit L_q, so sind q und p genau dann verschmelzbar, wenn $L_q = L_p$ ist.

Fassen wir alle zu einem Zustand z äquivalenten Zustände in dem neuen Zustand

$$[z]_\sim = \{z' \in Z \mid L_{z'} = L_z\}$$

zusammen (wofür wir auch kurz $[z]$ oder $\tilde{z}$ schreiben) und ersetzen wir Z und E durch $\tilde{Z} = \{\tilde{z} \mid z \in Z\}$ und $\tilde{E} = \{\tilde{z} \mid z \in E\}$, so erhalten wir den DFA $M' = (\tilde{Z}, \Sigma, \delta', \tilde{q}_0, \tilde{E})$ mit

$$\delta'(\tilde{q}, a) = \widetilde{\delta(q, a)}.$$

Hierbei bezeichnet $\tilde{Q}$ für eine Teilmenge $Q \subseteq Z$ die Menge $\{\tilde{q} \mid q \in Q\}$ aller Äquivalenzklassen $\tilde{q}$, die mindestens ein Element $q \in Q$ enthalten. Der nächste Satz zeigt, dass M' tatsächlich der gesuchte Minimalautomat ist.

Satz 52. *Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ ein DFA, der nur Zustände enthält, die vom Startzustand q_0 aus erreichbar sind. Dann ist $M' = (\tilde{Z}, \Sigma, \delta', \tilde{q}_0, \tilde{E})$ mit*

$$\delta'(\tilde{q}, a) = \widetilde{\delta(q, a)}$$

ein DFA für $L(M)$ mit einer minimalen Anzahl von Zuständen.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass δ' wohldefiniert ist, also der Wert von $\delta'(\tilde{q}, a)$ nicht von der Wahl des Repräsentanten q abhängt. Hierzu zeigen wir, dass im Fall $p \sim q$ auch $\delta(q, a)$ und $\delta(p, a)$ äquivalent sind:

$$\begin{aligned} L_q = L_p \quad &\Rightarrow \quad \forall x \in \Sigma^* : x \in L_q \leftrightarrow x \in L_p \\ &\Rightarrow \quad \forall x \in \Sigma^* : ax \in L_q \leftrightarrow ax \in L_p \\ &\Rightarrow \quad \forall x \in \Sigma^* : x \in L_{\delta(q,a)} \leftrightarrow x \in L_{\delta(p,a)} \\ &\Rightarrow \quad L_{\delta(q,a)} = L_{\delta(p,a)}. \end{aligned}$$

Als nächstes zeigen wir, dass $L(M') = L(M)$ ist. Sei $x = x_1 \dots x_n$ eine Eingabe und seien

$$q_i = \hat{\delta}(q_0, x_1 \dots x_i), \; i = 0, \dots, n$$

die von M beim Abarbeiten von x durchlaufenen Zustände. Wegen

$$\delta'(\tilde{q}_{i-1}, x_i) = \delta(\widetilde{q_{i-1}, x_i}) = \tilde{q}_i$$

durchläuft M' dann die Zustände

$$\tilde{q}_0, \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n.$$

Da aber q_n genau dann zu E gehört, wenn $\tilde{q}_n \in \tilde{E}$ ist, folgt $L(M') = L(M)$ (man beachte, dass $\tilde{q}_n$ entweder nur Endzustände oder nur Nicht-Endzustände enthält, vgl. Beobachtung 53).

Es bleibt zu zeigen, dass M' eine minimale Anzahl $\|\tilde{Z}\|$ von Zuständen hat. Dies ist sicher dann der Fall, wenn bereits M minimal ist. Es reicht also zu zeigen, dass die Anzahl $k = \|\tilde{Z}\| = \|\{L_q \mid q \in Z\}\|$ der Zustände von M' nicht von M, sondern nur von $L = L(M)$ abhängt. Für $x \in \Sigma^*$ sei

$$L_x = \{y \in \Sigma^* \mid xy \in L\}.$$

Dann gilt $\{L_x \mid x \in \Sigma^*\} \subseteq \{L_q \mid q \in Z\}$, da $L_x = L_{\hat{\delta}(q_0,x)}$ ist. Die umgekehrte Inklusion gilt ebenfalls, da nach Voraussetzung jeder Zustand $q \in Z$ über ein $x \in \Sigma^*$ erreichbar ist. Also hängt $k = \|\{L_q \mid q \in Z\}\| = \|\{L_x \mid x \in \Sigma^*\}\|$ nur von L ab. ∎

Eine interessante Folgerung aus obigem Beweis ist, dass für eine reguläre Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ die Menge $\{L_x \mid x \in \Sigma^*\}$ nur endlich viele verschiedene Sprachen enthält, und somit die durch

$$x \, R_L \, y \Leftrightarrow L_x = L_y$$

auf Σ^* definierte Äquivalenzrelation R_L endlichen Index hat.

Für die algorithmische Konstruktion von M' aus M ist es notwendig herauszufinden, ob zwei Zustände p und q von M äquivalent sind oder nicht.

Bezeichne $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ die *symmetrische Differenz* von zwei Mengen A und B. Dann ist die Inäquivalenz $p \not\sim q$ zweier Zustände p und q gleichbedeutend mit $L_p \Delta L_q \neq \varnothing$. Wir nennen ein Wort $x \in L_p \Delta L_q$ einen *Unterscheider* zwischen p und q.

Beobachtung 53.

- *Endzustände $p \in E$ sind nicht mit Zuständen $q \in Z \setminus E$ äquivalent (da sie durch ε unterschieden werden).*
- *Wenn $\delta(p,a)$ und $\delta(q,a)$ inäquivalent sind, dann auch p und q (da jeder Unterscheider x von $\delta(p,a)$ und $\delta(q,a)$ einen Unterscheider ax von p und q liefert).*

Wenn also D nur Paare von inäquivalenten Zuständen enthält, dann trifft dies auch auf die Menge

$$D' = \{\{p,q\} \mid \exists a \in \Sigma : \{\delta(p,a), \delta(q,a)\} \in D\}$$

zu. Wir können somit ausgehend von der Menge

$$D_0 = \{\{p,q\} \mid p \in E, q \notin E\}$$

eine Folge von Mengen

$$D_0 \subseteq D_1 \subseteq \cdots \subseteq \{\{z,z'\} \subseteq Z \mid z \neq z'\}$$

mittels der Vorschrift

$$D_{i+1} = D_i \cup \{\{p,q\} \mid \exists a \in \Sigma : \{\delta(p,a), \delta(q,a)\} \in D_i\}$$

berechnen, indem wir zu D_i alle Paare $\{p,q\}$ hinzufügen, für die eines der Paare $\{\delta(p,a), \delta(q,a)\}$, $a \in \Sigma$, bereits zu D_i gehört. Da Z endlich ist, muss es ein j mit $D_{j+1} = D_j$ geben. In diesem Fall gilt (siehe Übungen):

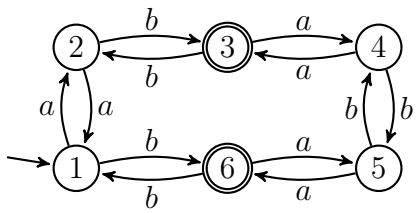
$$p \not\sim q \Leftrightarrow \{p,q\} \in D_j.$$

Folglich kann M' durch Verschmelzen aller Zustände p, q mit $\{p,q\} \notin D_j$ gebildet werden. Der folgende Algorithmus berechnet für einen beliebigen DFA M den zugehörigen Minimal-DFA M'.

Algorithmus `min-DFA`(M)

Input: DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$
  entferne alle nicht erreichbaren Zustaende
  $D' := \{\{z,z'\} \mid z \in E, z' \notin E\}$
  repeat
    $D := D'$
    $D' := D \cup \{\{p,q\} \mid \exists a \in \Sigma : \{\delta(p,a), \delta(q,a)\} \in D\}$
  until $D' = D$
Output: $M' = (\tilde{Z}, \Sigma, \delta', \tilde{q}_0, \tilde{E})$, wobei für jeden Zustand $z \in Z$ gilt: $\tilde{z} = \{z\} \cup \{z' \in Z \mid \{z,z'\} \notin D\}$

Beispiel 54. *Betrachte den DFA M*



Dann enthält D_0 die Paare

$$\{1,3\}, \{1,6\}, \{2,3\}, \{2,6\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,6\}, \{5,6\}.$$

Die Paare in D_0 sind in der folgenden Matrix durch den Unterscheider ε markiert.

2					
3	ε	ε			
4	a	a	ε		
5	a	a	ε		
6	ε	ε		ε	ε
	1	2	3	4	5

Wegen

$\{p,q\}$	$\{1,4\}$	$\{1,5\}$	$\{2,4\}$	$\{2,5\}$
$\{\delta(q,a),\delta(p,a)\}$	$\{2,3\}$	$\{2,6\}$	$\{1,3\}$	$\{1,6\}$

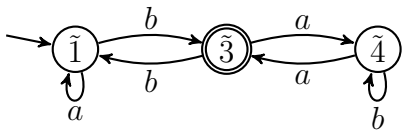
enthält D_1 zusätzlich die Paare $\{1,4\}$, $\{1,5\}$, $\{2,4\}$, $\{2,5\}$ (in obiger Matrix durch den Unterscheider a markiert). Da die verbliebenen Paare $\{1,2\}$, $\{3,6\}$, $\{4,5\}$ wegen

$\{p,q\}$	$\{1,2\}$	$\{3,6\}$	$\{4,5\}$
$\{\delta(p,a),\delta(q,a)\}$	$\{1,2\}$	$\{4,5\}$	$\{3,6\}$
$\{\delta(p,b),\delta(q,b)\}$	$\{3,6\}$	$\{1,2\}$	$\{4,5\}$

nicht zu D_1 hinzugefügt werden können, ist $D_2 = D_1$. Aus den unmarkierten Paaren $\{1,2\}$, $\{3,6\}$ und $\{4,5\}$ erhalten wir die Äquivalenzklassen

$$\tilde{1} = \{1,2\},\ \ \tilde{3} = \{3,6\}\ \ \textit{und}\ \ \tilde{4} = \{4,5\},$$

die auf folgenden Minimal-DFA M' führen:



◁

Es ist auch möglich, einen Minimalautomaten M_L direkt aus einer regulären Sprache L zu gewinnen (also ohne einen DFA M für L zu kennen). Da wegen

$$\begin{aligned}\widetilde{\hat{\delta}(q_0,x)} = \widetilde{\hat{\delta}(q_0,y)} &\Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0,x) \sim \hat{\delta}(q_0,y)\\ &\Leftrightarrow L_{\hat{\delta}(q_0,x)} = L_{\hat{\delta}(q_0,y)} \Leftrightarrow L_x = L_y\end{aligned}$$

zwei Eingaben x und y den DFA M' genau dann in denselben Zustand $\widetilde{\hat{\delta}(q_0,x)} = \widetilde{\hat{\delta}(q_0,y)}$ überführen, wenn $L_x = L_y$ ist, können wir den von M' bei Eingabe x erreichten Zustand $\widetilde{\hat{\delta}(q_0,x)}$ auch mit der Sprache L_x bezeichnen. Dies führt auf den zu M' isomorphen (also bis auf die Benennung der Zustände mit M' identischen) DFA $M_L = (Z_L, \Sigma, \delta_L, L_\varepsilon, E_L)$ mit

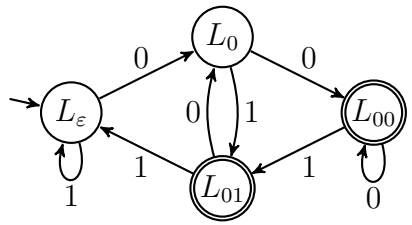
$$\begin{aligned} Z_L &= \{L_x \mid x \in \Sigma^*\},\\ E_L &= \{L_x \mid x \in L\} \text{ und}\\ \delta_L(L_x,a) &= L_{xa}.\end{aligned}$$

Notwendig und hinreichend für die Existenz von M_L ist, dass R_L endlichen Index hat, also die Menge $\{L_x \mid x \in \Sigma^*\}$ endlich ist.

Beispiel 55. *Für $L = \{x_1 \ldots x_n \in \{0,1\}^* \mid n \geq 2$ und $x_{n-1} = 0\}$ ist*

$$L_x = \begin{cases} L, & x \in \{\varepsilon, 1\} \textit{ oder } x \textit{ endet mit } 11,\\ L \cup \{0,1\}, & x = 0 \textit{ oder } x \textit{ endet mit } 10,\\ L \cup \{\varepsilon,0,1\}, & x \textit{ endet mit } 00,\\ L \cup \{\varepsilon\}, & x \textit{ endet mit } 01.\end{cases}$$

Somit erhalten wir den folgenden Minimalautomaten M_L.



◁

Im Fall, dass M bereits ein Minimalautomat ist, sind alle Zustände von M' von der Form $\tilde{q} = \{q\}$, so dass M isomorph zu M' und damit auch isomorph zu M_L ist. Dies zeigt, dass alle Minimalautomaten für eine Sprache L isomorph sind.

Satz 56 (Myhill und Nerode)**.**

1. $\mathsf{REG} = \{L \mid R_L$ *hat endlichen Index*$\}$.
2. *Sei L regulär und sei $index(R_L)$ der Index von R_L. Dann gibt es für L bis auf Isomorphie genau einen Minimal-DFA. Dieser hat $index(R_L)$ Zustände.*

Beispiel 57. *Sei $L = \{a^i b^i \mid i \geq 0\}$. Wegen $b^i \in L_{a^i} \Delta L_{a^j}$ für $i \neq j$ hat R_L unendlichen Index, d.h. L ist nicht regulär.* ◁

Die Zustände von M_L können anstelle von L_x auch mit den Äquivalenzklassen $[x]_{R_L}$ (bzw. mit geeigneten Repräsentanten) benannt werden. Der resultierende Minimal-DFA $M_{R_L} = (Z, \Sigma, \delta, [\varepsilon], E)$ mit

$$\begin{aligned} Z &= \{[x]_{R_L} \mid x \in \Sigma^*\}, \\ E &= \{[x]_{R_L} \mid x \in L\} \text{ und} \\ \delta([x]_{R_L}, a) &= [xa]_{R_L} \end{aligned}$$

wird auch als ***Äquivalenzklassenautomat*** bezeichnet.

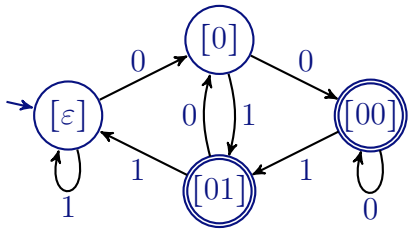
Die Konstruktion von M_{R_L} ist meist einfacher als die von M_L, da die Bestimmung der Sprachen L_x entfällt. Um die Überführungsfunktion von M_{R_L} aufzustellen, reicht es, ausgehend von $r_1 = \varepsilon$ eine Folge $r_1, \ldots, r_k$ von paarweise bzgl. R_L inäquivalenten Wörtern zu bestimmen, so dass zu jedem Wort $r_i a$, $a \in \Sigma$, ein r_j mit $r_i a R_L r_j$ existiert. In diesem Fall ist $\delta([r_i], a) = [r_i a] = [r_j]$.

Beispiel 58. *Für die Sprache $L = \{x_1 \ldots x_n \in \{0,1\}^* \mid x_{n-1} = 0\}$ lässt sich M_{R_L} wie folgt konstruieren:*

1. *Wir beginnen mit $r_1 = \varepsilon$.*
2. *Da $r_1 0 = 0 \notin [\varepsilon]$ ist, wählen wir $r_2 = 0$ und setzen $\delta([\varepsilon], 0) = [0]$.*
3. *Da $r_1 1 = 1 \in [\varepsilon]$ ist, setzen wir $\delta([\varepsilon], 1) = [\varepsilon]$.*
4. *Da $r_2 0 = 00 \notin [\varepsilon] \cup [0]$ ist, ist $r_3 = 00$ und wir setzen $\delta([0], 0) = [00]$.*
5. *Da $r_2 1 = 01 \notin [\varepsilon] \cup [0] \cup [00]$ ist, wählen wir $r_4 = 01$ und setzen $\delta([0], 1) = [01]$.*
6. *Da die Wörter $r_3 0 = 000 \in [00]$, $r_3 1 = 001 \in [01]$, $r_4 0 = 010 \in [0]$ und $r_4 1 = 011 \in [\varepsilon]$ sind, setzen wir $\delta([00], 0) = [00]$, $\delta([00], 1) = [01]$, $\delta([01], 0) = [0]$ und $\delta([01], 1) = [\varepsilon]$.*

Wir erhalten also folgenden Minimal-DFA M_{R_L}:

r	ε	0	00	01
$[r0]$	$[0]$	$[00]$	$[00]$	$[0]$
$[r1]$	$[\varepsilon]$	$[01]$	$[01]$	$[\varepsilon]$



◁

Wir fassen nochmals die wichtigsten Ergebnisse zusammen.

Korollar 59. *Sei L eine Sprache. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- *L ist regulär,*
- *es gibt einen DFA M mit $L = L(M)$,*
- *es gibt einen NFA N mit $L = L(N)$,*
- *es gibt einen regulären Ausdruck γ mit $L = L(\gamma)$,*
- *die Äquivalenzrelation R_L hat endlichen Index.*

Wir werden im nächsten Abschnitt noch eine weitere Methode kennenlernen, mit der man beweisen kann, dass eine Sprache nicht regulär ist, nämlich das Pumping-Lemma.

2.6 Das Pumping-Lemma

Wie kann man von einer Sprache nachweisen, dass sie nicht regulär ist? Eine Möglichkeit besteht darin, die Kontraposition folgender Aussage anzuwenden.

Satz 60 (Pumping-Lemma für reguläre Sprachen)**.**
Zu jeder regulären Sprache L gibt es eine Zahl l, so dass sich alle Wörter $x \in L$ mit $|x| \geq l$ in $x = uvw$ zerlegen lassen mit

1. $v \neq \varepsilon$,
2. $|uv| \leq l$ *und*
3. $uv^iw \in L$ *für alle* $i \geq 0$.

Falls eine Zahl l mit diesen Eigenschaften existiert, wird das kleinste solche l die ***Pumping-Zahl*** *von L genannt.*

Beweis. Sei $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ ein DFA für L und sei $l = \|Z\|$ die Anzahl der Zustände von M. Setzen wir M auf eine Eingabe $x = x_1 \dots x_n \in L$ der Länge $n \geq l$ an, so muss M nach spätestens l Schritten einen Zustand $q \in Z$ zum zweiten Mal besuchen:

$$\exists j, k : 0 \leq j < k \leq l \wedge \hat{\delta}(q_0, x_1 \dots x_j) = \hat{\delta}(q_0, x_1 \dots x_k) = q.$$

Wählen wir nun $u = x_1 \dots x_j$, $v = x_{j+1} \dots x_k$ und $w = x_{k+1} \dots x_n$, so ist $|v| = k - j \geq 1$ und $|uv| = k \leq l$. Ausserdem gilt $uv^iw \in L$ für $i \geq 0$, da wegen $\hat{\delta}(q, v) = q$

$$\hat{\delta}(q_0, uv^iw) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(\underbrace{\hat{\delta}(q_0, u)}_{q}, v^i), w) = \hat{\delta}(\underbrace{\hat{\delta}(q, v^i)}_{q}, w) = \hat{\delta}(q_0, x) \in E$$

ist. ■

Beispiel 61. *Die Sprache*

$$L = \{x \in \{a, b\}^* \mid \#_a(x) - \#_b(x) \equiv_3 1\}$$

hat die Pumping-Zahl $l = 3$. Sei nämlich $x \in L$ beliebig mit $|x| \geq 3$. Dann lässt sich innerhalb des Präfixes von x der Länge drei ein nichtleeres Teilwort v finden, das gepumpt werden kann:

1. Fall: *x hat das Präfix ab (oder ba).*
Zerlege $x = uvw$ mit $u = \varepsilon$ und $v = ab$ (bzw. $v = ba$).

2. Fall: *x hat das Präfix aab (oder bba).*
Zerlege $x = uvw$ mit $u = a$ (bzw. $u = b$) und $v = ab$ (bzw. $v = ba$).

3. Fall: *x hat das Präfix aaa (oder bbb).*
Zerlege $x = uvw$ mit $u = \varepsilon$ und $v = aaa$ (bzw. $v = bbb$). ◁

Beispiel 62. *Eine endliche Sprache L hat die Pumping-Zahl*

$$l = \begin{cases} 0, & L = \varnothing, \\ \max\{|x| + 1 \mid x \in L\}, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Tatsächlich lässt sich jedes Wort $x \in L$ der Länge $|x| \geq l$ „pumpen“ (da solche Wörter gar nicht existieren), weshalb die Pumping-Zahl höchstens l ist. Zudem gibt es im Fall $l > 0$ ein Wort $x \in L$ der Länge $|x| = l - 1$, das sich nicht „pumpen“ lässt, weshalb die Pumping-Zahl nicht kleiner als l sein kann. ◁

Wollen wir mit Hilfe des Pumping-Lemmas von einer Sprache L zeigen, dass sie nicht regulär ist, so genügt es, für jede Zahl l ein Wort $x \in L$ der Länge $|x| \geq l$ anzugeben, so dass für jede Zerlegung von x in drei Teilwörter u, v, w mindestens eine der drei in Satz 60 aufgeführten Eigenschaften verletzt ist.

Beispiel 63. *Die Sprache*

$$L = \{a^jb^j \mid j \geq 0\}$$

ist nicht regulär, da sich für jede Zahl $l \geq 0$ das Wort $x = a^lb^l$ der Länge $|x| = 2l \geq l$ in der Sprache L befindet, welches offensichtlich nicht in Teilwörter u, v, w mit $v \neq \varepsilon$ und $uv^2w \in L$ zerlegbar ist. ◁

Beispiel 64. *Die Sprache*

$$L = \{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$$

ist ebenfalls nicht regulär. Andernfalls müsste es nämlich eine Zahl l geben, so dass jede Quadratzahl $n^2 \geq l$ als Summe von natürlichen Zahlen $u + v + w$ darstellbar ist mit der Eigenschaft, dass $v \geq 1$ und $u + v \leq l$ ist, und für jedes $i \geq 0$ auch $u + iv + w$ eine Quadratzahl ist. Insbesondere müsste also $u + 2v + w = n^2 + v$ eine Quadratzahl sein, was wegen

$$n^2 < n^2 + v \leq n^2 + l < n^2 + 2l + 1 = (n+1)^2$$

ausgeschlossen ist. ◁

Beispiel 65. *Auch die Sprache*

$$L = \{a^p \mid p \text{ prim } \}$$

ist nicht regulär, da sich sonst jede Primzahl p einer bestimmten Mindestgröße l als Summe von natürlichen Zahlen $u+v+w$ darstellen ließe, so dass $v \geq 1$ und für alle $i \geq 0$ auch $u + iv + w = p + (i-1)v$ prim ist. Dies ist jedoch für $i = p + 1$ wegen

$$p + (p + 1 - 1)v = p(1 + v)$$

nicht der Fall. ◁

Bemerkung 66. *Mit Hilfe des Pumping-Lemmas kann nicht für jede Sprache $L \notin \mathsf{REG}$ gezeigt werden, dass L nicht regulär ist, da seine Umkehrung falsch ist. So hat beispielsweise die Sprache*

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i = 0 \text{ oder } j = k\}$$

die Pumping-Zahl 1 (d.h. jedes Wort $x \in L$ mit Ausnahme von ε kann „gepumpt“ werden). Dennoch ist L nicht regulär (siehe Übungen).

2.7 Grammatiken

Eine beliebte Methode, Sprachen zu beschreiben, sind Grammatiken. Implizit haben wir hiervon bei der Definition der regulären Ausdrücke bereits Gebrauch gemacht.

Beispiel 67. *Die Sprache RA aller regulären Ausdrücke über einem Alphabet $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_k\}$ lässt sich aus dem Symbol R durch wiederholte Anwendung folgender Regeln erzeugen:*

$$\begin{aligned} R &\to \varnothing, & R &\to RR, \\ R &\to \epsilon, & R &\to (R|R), \\ R &\to a_i,\ i = 1, \ldots, k, & R &\to (R)^*. \end{aligned}$$

◁

Definition 68. *Eine* ***Grammatik*** *ist ein 4-Tupel $G = (V, \Sigma, P, S)$, wobei*

- *V eine endliche Menge von* ***Variablen*** *(auch* ***Nichtterminalsymbole*** *genannt),*
- *Σ das* ***Terminalalphabet****,*
- *$P \subseteq (V \cup \Sigma)^+ \times (V \cup \Sigma)^*$ eine endliche Menge von* ***Regeln*** *(oder* ***Produktionen****) und*
- *$S \in V$ die* ***Startvariable*** *ist.*

Für $(u, v) \in P$ schreiben wir auch kurz $u \to_G v$ bzw. $u \to v$, wenn die benutzte Grammatik aus dem Kontext ersichtlich ist.

Definition 69. *Seien $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$.*

a) Wir sagen, β ***ist aus*** *α* ***in einem Schritt ableitbar*** *(kurz: $\alpha \Rightarrow_G \beta$), falls eine Regel $u \to_G v$ und Wörter $l, r \in (V \cup \Sigma)^*$ existieren mit*

$$\alpha = lur \text{ und } \beta = lvr.$$

Hierfür schreiben wir auch $l\underline{u}r \Rightarrow_G lvr$. (Man beachte, dass durch Unterstreichen von u in α sowohl die benutzte Regel als

auch die Stelle in α, an der u durch v ersetzt wird, eindeutig erkennbar sind.)

b) *Eine Folge $\sigma = (l_0, u_0, r_0), \ldots, (l_m, u_m, r_m)$ von Tripeln (l_i, u_i, r_i) heißt* **Ableitung** *von β aus α, falls gilt:*
   - $l_0 u_0 r_0 = \alpha$, $l_m u_m r_m = \beta$ *und*
   - $l_i \underline{u_i} r_i \Rightarrow l_{i+1} u_{i+1} r_{i+1}$ *für* $i = 0, \ldots, m-1$.

   Die **Länge** *von σ ist m und wir notieren σ auch in der Form*

$$l_0 \underline{u_0} r_0 \Rightarrow l_1 \underline{u_1} r_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow l_{m-1} \underline{u_{m-1}} r_{m-1} \Rightarrow l_m u_m r_m.$$

c) *Die durch G* **erzeugte Sprache** *ist*

$$L(G) = \{x \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_G^* x\}.$$

d) *Ein Wort $\alpha \in (V \cup \Sigma)^*$ mit $S \Rightarrow_G^* \alpha$ heißt* **Satzform** *von G.*

Zur Erinnerung: Die Relation $\Rightarrow^*$ bezeichnet die reflexive, transitive Hülle der Relation $\Rightarrow$, d.h. $\alpha \Rightarrow^* \beta$ bedeutet, dass es ein $n \geq 0$ gibt mit $\alpha \Rightarrow^n \beta$. Hierzu sagen wir auch, β ist aus α (in n Schritten) ***ableitbar***. Die Relation $\Rightarrow^n$ bezeichnet das n-fache Produkt der Relation $\Rightarrow$, d.h. es gilt $\alpha \Rightarrow^n \beta$, falls Wörter $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ existieren mit

- $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_n = \beta$ und
- $\alpha_i \Rightarrow \alpha_{i+1}$ für $i = 0, \ldots, n-1$.

Beispiel 70. *Wir betrachten nochmals die Grammatik $G = (\{R\}, \Sigma \cup \{\varnothing, \epsilon, (,), ^*, |\}, P, R)$, die die Menge der regulären Ausdrücke über dem Alphabet Σ erzeugt, wobei P die oben angegebenen Regeln enthält. Ist $\Sigma = \{0, 1\}$, so lässt sich der reguläre Ausdruck $(01)^*(\epsilon|\varnothing)$ beispielsweise wie folgt ableiten:*

$$\begin{aligned} \underline{R} &\Rightarrow \underline{R}R \Rightarrow (\underline{R})^*R \Rightarrow (RR)^*R \Rightarrow (\underline{R}R)^*(R|R) \\ &\Rightarrow (0\underline{R})^*(R|R) \Rightarrow (01)^*(\underline{R}|R) \Rightarrow (01)^*(\epsilon|\underline{R}) \Rightarrow (01)^*(\epsilon|\varnothing) \end{aligned}$$

◁

Man unterscheidet vier verschiedene Typen von Grammatiken.

Definition 71. *Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik.*

1. *G heißt vom* ***Typ 3*** *oder* ***regulär****, falls für alle Regeln $u \to v$ gilt: $u \in V$ und $v \in \Sigma V \cup \Sigma \cup \{\epsilon\}$.*
2. *G heißt vom* ***Typ 2*** *oder* ***kontextfrei****, falls für alle Regeln $u \to v$ gilt: $u \in V$.*
3. *G heißt vom* ***Typ 1*** *oder* ***kontextsensitiv****, falls für alle Regeln $u \to v$ gilt: $|v| \geq |u|$ (mit Ausnahme der ε-Sonderregel, siehe unten).*
4. *Jede Grammatik ist automatisch vom* ***Typ 0****.*

ε-Sonderregel: In einer kontextsensitiven Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ kann auch die verkürzende Regel $S \to \varepsilon$ benutzt werden. Aber nur, wenn das Startsymbol S nicht auf der rechten Seite einer Regel in P vorkommt.

Die Sprechweisen „vom Typ i“ bzw. „regulär“, „kontextfrei“ und „kontextsensitiv“ werden auch auf die durch solche Grammatiken erzeugte Sprachen angewandt. (Der folgende Satz rechtfertigt dies für die regulären Sprachen, die wir bereits mit Hilfe von DFAs definiert haben.) Die zugehörigen neuen Sprachklassen sind

$$\mathsf{CFL} = \{L(G) \mid G \text{ ist eine kontextfreie Grammatik}\},$$

(*context free languages*) und

$$\mathsf{CSL} = \{L(G) \mid G \text{ ist eine kontextsensitive Grammatik}\}$$

(*context sensitive languages*). Da die Klasse der Typ 0 Sprachen mit der Klasse der rekursiv aufzählbaren (*recursively enumerable*) Sprachen übereinstimmt, bezeichnen wir diese Sprachklasse mit

$$\mathsf{RE} = \{L(G) \mid G \text{ ist eine Grammatik}\}.$$

Die Sprachklassen

$$\mathsf{REG} \subset \mathsf{CFL} \subset \mathsf{CSL} \subset \mathsf{RE}$$

bilden eine Hierarchie (d.h. alle Inklusionen sind echt), die so genannte **Chomsky-Hierarchie**.

Als nächstes zeigen wir, dass sich mit regulären Grammatiken gerade die regulären Sprachen erzeugen lassen. Hierbei erweist sich folgende Beobachtung als nützlich.

Lemma 72. *Zu jeder regulären Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ gibt es eine äquivalente reguläre Grammatik G', die keine Produktionen der Form $A \to a$ hat.*

Beweis. Betrachte die Grammatik $G' = (V', \Sigma, P', S)$ mit

$$\begin{aligned} V' &= V \cup \{X_{neu}\}, \\ P' &= \{A \to aX_{neu} \mid A \to_G a\} \cup \{X_{neu} \to \varepsilon\} \cup P \setminus (V \times \Sigma). \end{aligned}$$

Es ist leicht zu sehen, dass G' die gleiche Sprache wie G erzeugt. ■

Satz 73. $\mathsf{REG} = \{L(G) \mid G$ *ist eine reguläre Grammatik*$\}$.

Beweis. Sei $L \in \mathsf{REG}$ und sei $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$ ein DFA mit $L(M) = L$. Wir konstruieren eine reguläre Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $L(G) = L$. Setzen wir

$$\begin{aligned} V &= Z, \\ S &= q_0 \text{ und} \\ P &= \{q \to ap \mid \delta(q, a) = p\} \cup \{q \to \varepsilon \mid q \in E\}, \end{aligned}$$

so gilt für alle Wörter $x = x_1 \dots x_n \in \Sigma^*$:

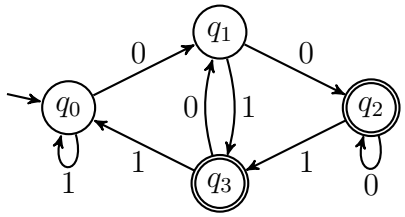
$$\begin{aligned} x \in L(M) &\Leftrightarrow \exists\, q_1, \dots, q_{n-1} \in Z\ \exists\, q_n \in E: \\ &\qquad \delta(q_{i-1}, x_i) = q_i \text{ für } i = 1, \dots, n \\ &\Leftrightarrow \exists\, q_1, \dots, q_n \in V: \\ &\qquad q_{i-1} \to_G x_i q_i \text{ für } i = 1, \dots, n \text{ und } q_n \to_G \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \exists\, q_1, \dots, q_n \in V: \\ &\qquad q_0 \Rightarrow_G^i x_1 \dots x_i q_i \text{ für } i = 1, \dots, n \text{ und } q_n \to_G \varepsilon \\ &\Leftrightarrow x \in L(G) \end{aligned}$$

Für die entgegengesetzte Inklusion sei nun $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine reguläre Grammatik, die keine Produktionen der Form $A \to a$ enthält. Dann können wir die gerade beschriebene Konstruktion einer Grammatik aus einem DFA „umdrehen“, um ausgehend von G einen NFA $M = (Z, \Sigma, \delta, \{S\}, E)$ mit

$$\begin{aligned} Z &= V, \\ E &= \{A \mid A \to_G \varepsilon\} \text{ und} \\ \delta(A, a) &= \{B \mid A \to_G aB\} \end{aligned}$$

zu erhalten. Genau wie oben folgt nun $L(M) = L(G)$. ■

Beispiel 74. *Der DFA*



führt auf die Grammatik $(\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, P, q_0)$ *mit*

$$\begin{aligned} P: \quad & q_0 \to 1q_0, 0q_1, \\ & q_1 \to 0q_2, 1q_3, \\ & q_2 \to 0q_2, 1q_3, \varepsilon, \\ & q_3 \to 0q_1, 1q_0, \varepsilon. \end{aligned}$$

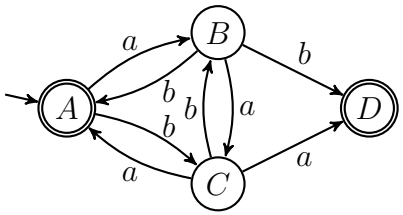
Umgekehrt führt die Grammatik $G = (\{A, B, C\}, \{a, b\}, P, A)$ *mit*

$$\begin{aligned} P: \quad & A \to aB, bC, \varepsilon, \\ & B \to aC, bA, b, \\ & C \to aA, bB, a \end{aligned}$$

über die Grammatik $G' = (\{A, B, C, D\}, \{a, b\}, P', A)$ *mit*

$$\begin{aligned} P': \quad & A \to aB, bC, \varepsilon, \\ & B \to aC, bA, bD, \\ & C \to aA, bB, aD, \\ & D \to \varepsilon \end{aligned}$$

auf den NFA



◁

3 Kontextfreie Sprachen

Wie wir gesehen haben, ist die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ nicht regulär. Es ist aber leicht, eine kontextfreie Grammatik für L zu finden:

$$G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aSb, S \to \varepsilon\}, S).$$

Damit ist klar, dass die Klasse der regulären Sprachen echt in der Klasse der kontextfreien Sprachen enthalten ist. Als nächstes wollen wir zeigen, dass die Klasse der kontextfreien Sprachen wiederum echt in der Klasse der kontextsensitiven Sprachen enthalten ist:

$$\mathsf{REG} \subsetneq \mathsf{CFL} \subsetneq \mathsf{CSL}.$$

Kontextfreie Grammatiken sind dadurch charakterisiert, dass sie nur Regeln der Form $A \to \alpha$ haben. Dies lässt die Verwendung von beliebigen ε-Regeln der Form $A \to \varepsilon$ zu. Eine kontextsensitive Grammatik darf dagegen höchstens die ε-Regel $S \to \varepsilon$ haben. Voraussetzung hierfür ist, dass S das Startsymbol ist und dieses nicht auf der rechten Seite einer Regel vorkommt. Daher sind nicht alle kontextfreien Grammatiken kontextsensitiv. Beispielsweise ist die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aSb, S \to \varepsilon\}, S)$ nicht kontextsensitiv, da sie die Regel $S \to \varepsilon$ enthält, obwohl S auf der rechten Seite der Regel $S \to aSb$ vorkommt.

Es lässt sich jedoch zu jeder kontextfreien Grammatik eine äquivalente kontextfreie Grammatik G' konstruieren, die auch kontextsensitiv ist. Hierzu zeigen wir zuerst, dass sich zu jeder kontextfreien Grammatik G, in der nicht das leere Wort ableitbar ist, eine äquivalente kontextfreie Grammatik G' ohne ε-Regeln konstruieren lässt.

Satz 75. *Zu jeder kontextfreien Grammatik G gibt es eine kontextfreie Grammatik G' ohne ε-Produktionen mit $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$.*

Beweis. Zuerst sammeln wir mit folgendem Algorithmus alle Variablen A, aus denen das leere Wort ableitbar ist. Diese werden auch als *ε-ableitbar* bezeichnet.

```
1 E' := {A ∈ V | A → ε}
2 repeat
3   E := E'
4   E' := E ∪ {A ∈ V | ∃ B_1, ..., B_k ∈ E : A → B_1 ... B_k}
5 until E = E'
```

Nun konstruieren wir $G' = (V, \Sigma, P', S)$ wie folgt:

> Nehme zu P' alle Regeln $A \to \alpha'$ mit $\alpha' \neq \varepsilon$ hinzu, für die P eine Regel $A \to \alpha$ enthält, so dass α' aus α durch Entfernen von beliebig vielen Variablen $A \in E$ hervorgeht.

■

Beispiel 76. *Betrachte die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, T, U, X, Y, Z\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ und den Regeln*

$$\begin{aligned} P: \quad & S \to aY, bX, Z; \quad Y \to bS, aYY; \quad T \to U; \\ & X \to aS, bXX; \quad Z \to \varepsilon, S, T, cZ; \quad U \to abc. \end{aligned}$$

Bei der Berechnung von $E = \{A \in V \mid A \Rightarrow^* \varepsilon\}$ ergeben sich der Reihe nach folgende Belegungen für die Mengenvariablen E und E':

E'	$\{Z\}$	$\{Z, S\}$
E	$\{Z, S\}$	$\{Z, S\}$

Um nun die Regelmenge P' zu bilden, entfernen wir aus P die einzige ε-Regel $Z \to \varepsilon$ und fügen die Regeln $X \to a$ (wegen $X \to aS$), $Y \to b$ (wegen $Y \to bS$) und $Z \to c$ (wegen $Z \to cZ$) hinzu:

$$\begin{aligned} P': \quad & S \to aY, bX, Z; \quad Y \to b, bS, aYY; \quad T \to U; \\ & X \to a, aS, bXX; \quad Z \to c, S, T, cZ; \quad U \to abc. \end{aligned}$$

◁

Als direkte Anwendung des obigen Satzes können wir die Inklusion der Klasse der Typ 2 Sprachen in der Klasse der Typ 1 Sprachen zeigen.

Korollar 77. $\mathsf{REG} \subsetneq \mathsf{CFL} \subseteq \mathsf{CSL} \subseteq \mathsf{RE}$.

Beweis. Die Inklusionen $\mathsf{REG} \subseteq \mathsf{CFL}$ und $\mathsf{CSL} \subseteq \mathsf{RE}$ sind klar. Wegen $\{a^n b^n | n \geq 0\} \in \mathsf{CFL} - \mathsf{REG}$ ist die Inklusion $\mathsf{REG} \subseteq \mathsf{CFL}$ auch echt. Also ist nur noch die Inklusion $\mathsf{CFL} \subseteq \mathsf{CSL}$ zu zeigen. Nach obigem Satz ex. zu $L \in \mathsf{CFL}$ eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ ohne ε-Produktionen mit $L(G) = L \setminus \{\varepsilon\}$. Da G dann auch kontextsensitiv ist, folgt hieraus im Fall $\varepsilon \notin L$ unmittelbar $L(G) = L \in \mathsf{CSL}$. Im Fall $\varepsilon \in L$ erzeugt die kontextsensitive Grammatik

$$G' = (V \cup \{S'\}, \Sigma, P \cup \{S' \to S, \varepsilon\}, S')$$

die Sprache $L(G') = L$, d.h. $L \in \mathsf{CSL}$. ■

Als nächstes zeigen wir folgende Abschlusseigenschaften der kontextfreien Sprachen.

Satz 78. *Die Klasse* CFL *ist abgeschlossen unter Vereinigung, Produkt und Sternhülle.*

Beweis. Seien $G_i = (V_i, \Sigma, P_i, S_i)$, $i = 1, 2$, kontextfreie Grammatiken für die Sprachen $L(G_i) = L_i$ mit $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ und sei S eine neue Variable. Dann erzeugt die kontextfreie Grammatik

$$G_3 = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1, S_2\}, S)$$

die Vereinigung $L(G_3) = L_1 \cup L_2$. Die Grammatik

$$G_4 = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 S_2\}, S)$$

erzeugt das Produkt $L(G_4) = L_1 L_2$ und die Sternhülle $(L_1)^*$ wird von der Grammatik

$$G_5 = (V_1 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup \{S \to S_1 S, \varepsilon\}, S)$$

erzeugt. ■

Offen bleibt zunächst, ob die kontextfreien Sprachen auch unter Durchschnitt und Komplement abgeschlossen sind. Hierzu müssen wir für bestimmte Sprachen nachweisen, dass sie nicht kontextfrei sind. Dies gelingt mit einem Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen, für dessen Beweis wir Grammatiken in Chomsky-Normalform benötigen.

Satz (Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen).
Zu jeder kontextfreien Sprache L gibt es eine Zahl l, so dass sich alle Wörter $z \in L$ mit $|z| \geq l$ in $z = uvwxy$ zerlegen lassen mit

1. $vx \neq \varepsilon$,
2. $|vwx| \leq l$ und
3. $uv^iwx^iy \in L$ für alle $i \geq 0$.

Beispiel 79. *Betrachte die Sprache $L = \{a^nb^n | n \geq 0\}$. Dann lässt sich jedes Wort $z = a^nb^n$ mit $|z| \geq 2$ pumpen: Zerlege $z = uvwxy$ mit $u = a^{n-1}$, $v = a$, $w = \varepsilon$, $x = b$ und $y = b^{n-1}$.* ◁

Beispiel 80. *Die Sprache $\{a^nb^nc^n \mid n \geq 0\}$ ist nicht kontextfrei. Für eine vorgegebene Zahl $l \geq 0$ hat nämlich $z = a^lb^lc^l$ die Länge $|z| = 3l \geq l$. Dieses Wort lässt sich aber nicht pumpen, da für jede Zerlegung $z = uvwxy$ mit $vx \neq \varepsilon$ und $|vwx| \leq l$ das Wort $z' = uv^2wx^2y$ nicht zu L gehört:*

- *Wegen $vx \neq \varepsilon$ ist $|z| < |z'|$.*
- *Wegen $|vwx| \leq l$ kann in vx nicht jedes der drei Zeichen a, b, c vorkommen.*
- *Kommt aber in vx beispielsweise kein a vor, so ist*

$$\#_a(z') = \#_a(z) = l = |z|/3 < |z'|/3,$$

also kann z' nicht zu L gehören. ◁

Die Chomsky-Normalform ist auch Grundlage für einen effizienten Algorithmus zur Lösung des Wortproblems für kontextfreie Grammatiken, das wie folgt definiert ist.

Wortproblem für kontextfreie Grammatiken:

Gegeben: Eine kontextfreie Grammatik G und ein Wort x.
Gefragt: Ist $x \in L(G)$?

Satz. Das Wortproblem für kontextfreie Grammatiken ist effizient entscheidbar.

3.1 Chomsky-Normalform

Definition 81. *Eine Grammatik (V, Σ, P, S) ist in **Chomsky-Normalform (CNF)**, falls $P \subseteq V \times (V^2 \cup \Sigma)$ ist, also alle Regeln die Form $A \to BC$ oder $A \to a$ haben.*

Um eine kontextfreie Grammatik in Chomsky-Normalform zu bringen, müssen wir neben den ε-Regeln $A \to \varepsilon$ auch sämtliche Variablenumbenennungen $A \to B$ loswerden.

Definition 82. *Regeln der Form $A \to B$ heißen **Variablenumbenennungen**.*

Satz 83. *Zu jeder kontextfreien Grammatik G ex. eine kontextfreie Grammatik G' ohne Variablenumbenennungen mit $L(G') = L(G)$.*

Beweis. Zuerst entfernen wir sukzessive alle Zyklen

$$A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_k \to A_1,$$

indem wir diese Regeln aus P entfernen und alle übrigen Vorkommen der Variablen $A_2, \ldots, A_k$ durch A_1 ersetzen. Falls sich unter den entfernten Variablen $A_2, \ldots, A_k$ die Startvariable S befindet, sei A_1 die neue Startvariable.

Nun entfernen wir sukzessive die restlichen Variablenumbenennungen, indem wir

- eine Regel $A \to B$ wählen, so dass in P keine Variablenumbenennung $B \to C$ mit B auf der rechten Seite existiert,

- diese Regel $A \to B$ aus P entfernen und
- für jede Regel $B \to \alpha$ in P die Regel $A \to \alpha$ zu P hinzunehmen.

■

Beispiel 84. *Ausgehend von den Produktionen*

$$\begin{aligned} P\colon S &\to aY, bX, Z; & Y &\to b, bS, aYY; & T &\to U; \\ X &\to a, aS, bXX; & Z &\to c, S, T, cZ; & U &\to abc \end{aligned}$$

entfernen wir den Zyklus $S \to Z \to S$, indem wir die Regeln $S \to Z$ und $Z \to S$ entfernen und dafür die Produktionen $S \to c, T, cS$ (wegen $Z \to c, T, cZ$) hinzunehmen:

$$\begin{aligned} S &\to aY, bX, c, T, cS; & Y &\to b, bS, aYY; & T &\to U; \\ X &\to a, aS, bXX; & U &\to abc. \end{aligned}$$

Nun entfernen wir die Regel $T \to U$ und fügen die Regel $T \to abc$ (wegen $U \to abc$) hinzu:

$$\begin{aligned} S &\to aY, bX, c, T, cS; & Y &\to b, bS, aYY; & T &\to abc; \\ X &\to a, aS, bXX; & U &\to abc. \end{aligned}$$

Als nächstes entfernen wir dann auch die Regel $S \to T$ und fügen die Regel $S \to abc$ (wegen $T \to abc$) hinzu:

$$\begin{aligned} S &\to abc, aY, bX, c, cS; & Y &\to b, bS, aYY; & T &\to abc; \\ X &\to a, aS, bXX; & U &\to abc. \end{aligned}$$

Da T und U nun nirgends mehr auf der rechten Seite vorkommen, können wir die Regeln $T \to abc$ und $U \to abc$ weglassen:

$$S \to abc, aY, bX, c, cS;\ Y \to b, bS, aYY;\ X \to a, aS, bXX.$$

◁

Nach diesen Vorarbeiten ist es nun leicht, eine gegebene kontextfreie Grammatik in Chomsky-Normalform umzuwandeln.

Satz 85. *Zu jeder kontextfreien Sprache $L \in \mathsf{CFL}$ gibt es eine CNF-Grammatik G' mit $L(G') = L \setminus \{\varepsilon\}$.*

Beweis. Aufgrund der beiden vorigen Sätze hat $L \setminus \{\varepsilon\}$ eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ ohne ε-Produktionen und ohne Variablenumbenennungen. Wir transformieren G wie folgt in eine CNF-Grammatik.

- Füge für jedes Terminalsymbol $a \in \Sigma$ eine neue Variable X_a zu V und eine neue Regel $X_a \to a$ zu P hinzu.
- Ersetze alle Vorkommen von a durch X_a, außer wenn a alleine auf der rechten Seite einer Regel steht.
- Ersetze jede Regel $A \to B_1 \dots B_k$, $k \geq 3$, durch die $k-1$ Regeln

  $$A \to B_1 A_1,\ A_1 \to B_2 A_2,\ \dots,\ A_{k-3} \to B_{k-2} A_{k-2},\ A_{k-2} \to B_{k-1} B_k,$$

  wobei $A_1, \dots, A_{k-2}$ neue Variablen sind. ■

Beispiel 86. *In der Produktionenmenge*

$$P\colon\ S \to abc, aY, bX, c, cS;\ \ X \to a, aS, bXX;\ \ Y \to b, bS, aYY$$

ersetzen wir die Terminalsymbole a, b und c durch die Variablen A, B und C (außer wenn sie alleine auf der rechten Seite einer Regel vorkommen) und fügen die Regeln $A \to a$, $B \to b$, $C \to c$ hinzu:

$$\begin{aligned} &S \to c, ABC, AY, BX, CS;\ \ X \to a, AS, BXX; \\ &Y \to b, BS, AYY;\ \ A \to a;\ \ B \to b;\ \ C \to c. \end{aligned}$$

Ersetze nun die Regeln $S \to ABC$, $X \to BXX$ und $Y \to AYY$ durch die Regeln $S \to AS'$, $S' \to BC$, $X \to BX'$, $X' \to XX$ und $Y \to AY'$, $Y' \to YY$:

$$\begin{aligned} &S \to c, AS', AY, BX, CS;\ \ S' \to BC; \\ &X \to a, AS, BX';\ \ X' \to XX;\ \ Y \to b, BS, AY';\ \ Y' \to YY; \\ &A \to a;\ B \to b;\ C \to c. \end{aligned}$$

◁

Eine interessante Frage ist, ob in einer kontextfreien Grammatik G jedes Wort $x \in L(G)$ "eindeutig" ableitbar ist. Es ist klar, dass in diesem Kontext Ableitungen, die sich nur in der Reihenfolge der Regelanwendungen unterscheiden, nicht als verschieden betrachtet werden sollten. Dies erreichen wir dadurch, dass wir die Reihenfolge der Regelanwendungen festlegen.

Definition 87. *Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik.*

a) Eine Ableitung

$$\alpha_0 = l_0 \underline{A_0} r_0 \Rightarrow l_1 \underline{A_1} r_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow l_{m-1} \underline{A_{m-1}} r_{m-1} \Rightarrow \alpha_m.$$

heißt **Linksableitung** *von α (kurz $\alpha_0 \Rightarrow_L^* \alpha_m$), falls in jedem Ableitungsschritt die am weitesten links stehende Variable ersetzt wird, d.h. es gilt $l_i \in \Sigma^*$ für $i = 0, \ldots, m-1$.*

b) **Rechtsableitungen** *$\alpha_0 \Rightarrow_R^* \alpha_m$ sind analog definiert.*

c) G heißt **mehrdeutig**, *wenn es ein Wort $x \in L(G)$ gibt, das zwei verschiedene Linksableitungen $S \Rightarrow_L^* x$ hat. Andernfalls heißt G* **eindeutig**.

Offenbar gelten für alle Wörter $x \in \Sigma^*$ folgende Äquivalenzen:

$$x \in L(G) \;\Leftrightarrow\; S \Rightarrow^* x \;\Leftrightarrow\; S \Rightarrow_L^* x \;\Leftrightarrow\; S \Rightarrow_R^* x.$$

Beispiel 88. *Wir betrachten die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aSbS, \varepsilon\}, S)$. Offenbar hat das Wort aabb in G zehn verschiedene Ableitungen, die sich allerdings nur in der Reihenfolge der Regelanwendungen unterscheiden:*

$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSb\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}bbS \Rightarrow aabb\underline{S} \Rightarrow aabb$$
$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSb\underline{S}bS \Rightarrow aaSbb\underline{S} \Rightarrow aa\underline{S}bb \Rightarrow aabb$$
$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}bSbS \Rightarrow aab\underline{S}bS \Rightarrow aabb\underline{S} \Rightarrow aabb$$
$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}bSbS \Rightarrow aabSb\underline{S} \Rightarrow aab\underline{S}b \Rightarrow aabb$$
$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSbSb\underline{S} \Rightarrow aa\underline{S}bSb \Rightarrow aab\underline{S}b \Rightarrow aabb$$
$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSbSb\underline{S} \Rightarrow aaSb\underline{S}b \Rightarrow aa\underline{S}bb \Rightarrow aabb$$
$$\underline{S} \Rightarrow aSb\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}b \Rightarrow aa\underline{S}bSb \Rightarrow aab\underline{S}b \Rightarrow aabb$$
$$\underline{S} \Rightarrow aSb\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}b \Rightarrow aaSb\underline{S}b \Rightarrow aa\underline{S}bb \Rightarrow aabb.$$

Darunter sind genau eine Links- und genau eine Rechtsableitung:

$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}bSbS \Rightarrow aab\underline{S}bS \Rightarrow aabb\underline{S} \Rightarrow aabb$$

und

$$\underline{S} \Rightarrow aSb\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}b \Rightarrow aaSb\underline{S}b \Rightarrow aa\underline{S}bb \Rightarrow aabb.$$

Die Grammatik G ist eindeutig. Dies liegt daran, dass in keiner Satzform von G die Variable S von einem a gefolgt wird. Daher muss jede Linksableitung eines Wortes $x \in L(G)$ die am weitesten links stehende Variable der aktuellen Satzform $\alpha S \beta$ genau dann nach $aSbS$ expandieren, falls das Präfix α in x von einem a gefolgt wird.

Dagegen ist die Grammatik $G' = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aSbS, ab, \varepsilon\}, S)$ mehrdeutig, da das Wort $x = ab$ zwei verschiedene Linksableitungen hat:

$$\underline{S} \Rightarrow ab \text{ und } \underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow ab\underline{S} \Rightarrow ab. \qquad \triangleleft$$

Wir gehen an dieser Stelle kurz der Frage nach, welche Sprache von der Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to aSbS, \varepsilon\}, S)$ erzeugt wird. Zunächst einmal ist klar, dass $L(G)$ nur Wörter $x \in \{a, b\}^*$ mit der Eigenschaft $\#_a(x) = \#_b(x)$ $(*)$ enthält. Allerdings sind nicht alle Wörter mit dieser Eigenschaft in $L(G)$ enthalten, da beispielsweise $ba \notin L(G)$ ist. Damit ein Wort x in G ableitbar ist, muss zudem für jedes Präfix u von x gelten, dass $\#_a(u) \geq \#_b(u)$ $(**)$ ist.

Wir zeigen durch Induktion über die Ableitungslänge l, dass jede in G ableitbare Satzform $\alpha \in \{a, b, S\}^*$ die Bedingungen $(*, **)$ erfüllt.

$l = 0$**:** Klar, da $\alpha = S$ beide Bedingungen erfüllt.

$l \rightsquigarrow l + 1$**:** Gelte $S \Rightarrow^l \alpha \Rightarrow \beta$.

- Falls β aus α durch Anwendung der Regel $S \to \varepsilon$ entsteht, ist dies ebenfalls klar.
- Entsteht β aus α durch die Regel $S \to aSbS$, so folgt $\#_a(\beta) = \#_a(\alpha) + 1 = \#_b(\alpha) + 1 = \#_b(\beta)$, also $(*)$. Zudem entspricht jedem Präfix u von β ein Präfix u' von α mit $\#_a(u) - \#_b(u) \geq \#_a(u') - \#_b(u')$, wodurch sich $(**)$ von α auf β überträgt.

Tatsächlich sind in G alle Wörter x ableitbar, die die Bedingungen $(*, **)$ erfüllen. Dazu zeigen wir durch Induktion über n folgende Behauptung.

Behauptung 89. *Alle Wörter $x \in \{a,b\}^*$ der Länge $\leq n$, die die Bedingungen $(*, **)$ erfüllen, sind in G ableitbar.*

$n = 0$**:** Klar, da $x = \varepsilon$ aus S ableitbar ist.

$n \rightsquigarrow n+1$**:** Sei x ein Wort der Länge $n+1$, das die Bedingungen $(*, **)$ erfüllt und sei u das kürzeste Präfix von x mit $\#_a(u) = \#_b(u) > 1$.

- Dann muss u die Form $u = avb$ haben, wobei v die Bedingungen $(*, **)$ erfüllt. Nach IV gilt daher $S \Rightarrow^* v$.
- Zudem hat x die Form $x = uw$, wobei auch w die Bedingungen $(*, **)$ erfüllt. Nach IV gilt daher $S \Rightarrow^* w$.
- Nun ist x aus S wie folgt ableitbar: $S \Rightarrow aSbS \Rightarrow^* avbS = uS \Rightarrow^* uw = x$.

Ableitungen in einer kontextfreien Grammatik lassen sich graphisch sehr gut durch einen Syntaxbaum (auch ***Ableitungsbaum*** genannt, engl. *parse tree*) veranschaulichen.

Definition 90. *Sei $G = (V, E)$ ein Digraph.*

- *Ein v_0-v_k-**Weg** in G ist eine Folge von Knoten $v_0, \ldots, v_k$ mit $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für $i = 0, \ldots, k-1$. Seine **Länge** ist k.*
- *Ein Weg heißt **einfach** oder **Pfad**, falls alle seine Knoten paarweise verschieden sind.*
- *Ein u-v-Weg der Länge ≥ 1 mit $u = v$ heißt **Zyklus**.*
- *G heißt **azyklisch**, wenn es in G keinen Zyklus gibt.*
- *G heißt **gerichteter Wald**, wenn G azyklisch ist und jeder Knoten $v \in V$ Eingangsgrad $\deg^-(v) \leq 1$ hat.*
- *Ein Knoten $u \in V$ vom Ausgangsgrad $\deg^+(u) = 0$ heißt **Blatt**.*
- *Ein Knoten $w \in V$ heißt **Wurzel** von G, falls alle Knoten $v \in V$ von w aus erreichbar sind (d.h. es gibt einen w-v-Weg in G).*

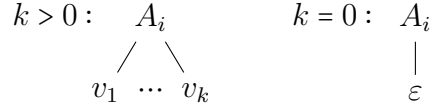
- *Ein **gerichteter Wald**, der eine Wurzel hat, heißt **gerichteter Baum**.*
- *Da die Kantenrichtungen durch die Wahl der Wurzel eindeutig bestimmt sind, kann auf ihre Angabe verzichtet werden. Man spricht dann auch von einem **Wurzelbaum**.*

Definition 91. *Wir ordnen einer Ableitung*

$$\underline{A_0} \Rightarrow l_1 \underline{A_1} r_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow l_{m-1} \underline{A_{m-1}} r_{m-1} \Rightarrow \alpha_m.$$

den Syntaxbaum T_m zu, wobei die Bäume $T_0, \ldots, T_m$ induktiv wie folgt definiert sind:

- *T_0 besteht aus einem einzigen Knoten, der mit A_0 markiert ist.*
- *Wird im $(i+1)$-ten Ableitungsschritt die Regel $A_i \to v_1 \ldots v_k$ mit $v_j \in \Sigma \cup V$ für $j = 1, \ldots, k$ angewandt, so ensteht T_{i+1} aus T_i, indem wir das Blatt A_i in T_i durch folgenden Unterbaum ersetzen:*

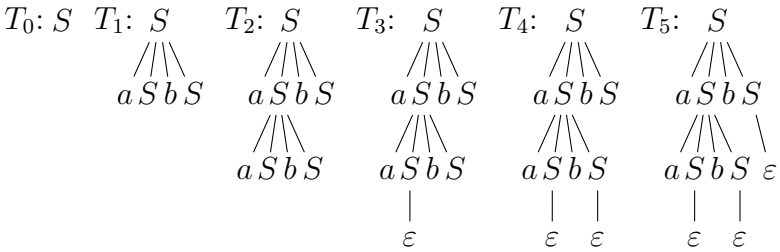


- *Hierbei stellen wir uns die Kanten von oben nach unten gerichtet und die Kinder $v_1 \ldots v_k$ von links nach rechts geordnet vor.*

Beispiel 92. *Betrachte die Grammatik $G = (\{S\}, \{a,b\}, \{S \to aSbS, \varepsilon\}, S)$ und die Ableitung*

$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSb\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}bbS \Rightarrow aabb\underline{S} \Rightarrow aabb.$$

Die zugehörigen Syntaxbäume sind dann



Die Satzform α_i ergibt sich aus T_i, indem wir die Blätter von T_i von links nach rechts zu einem Wort zusammensetzen. ◁

Bemerkung 93.

- *Aus einem Syntaxbaum ist die zugehörige Linksableitung eindeutig rekonstruierbar. Daher führen unterschiedliche Linksableitungen auch auf unterschiedliche Syntaxbäume. Linksableitungen und Syntaxbäume entsprechen sich also eineindeutig. Ebenso Rechtsableitungen und Syntaxbäume.*
- *Ist T Syntaxbaum einer CNF-Grammatik, so hat jeder Knoten in T höchstens zwei Kinder (d.h. T ist ein Binärbaum).*

3.2 Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

In diesem Abschnitt beweisen wir das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen. Dabei nutzen wir die Tatsache aus, dass die Syntaxbäume einer CNF-Grammatik Binärbäume sind.

Definition 94. *Die* ***Tiefe*** *eines Baumes mit Wurzel w ist die maximale Pfadlänge von w zu einem Blatt.*

Lemma 95. *Ein Binärbaum B der Tiefe k hat höchstens 2^k Blätter.*

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion über k.

$k = 0$: Ein Baum der Tiefe 0 kann nur einen Knoten haben.

$k \rightsquigarrow k+1$: Sei B ein Binärbaum der Tiefe $k+1$. Dann hängen an B's Wurzel maximal zwei Teilbäume. Da deren Tiefe $\leq k$ ist, haben sie nach IV höchstens 2^k Blätter. Also hat $B \leq 2^{k+1}$ Blätter. ■

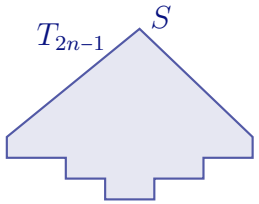
Korollar 96. *Ein Binärbaum B mit mehr als 2^{k-1} Blättern hat mindestens Tiefe k.*

Beweis. Würde B mehr als 2^{k-1} Blätter und eine Tiefe $\leq k-1$ besitzen, so würde dies im Widerspruch zu Lemma 95 stehen. ■

Satz 97 (Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen)**.**
Zu jeder kontextfreien Sprache L gibt es eine Zahl l, so dass sich alle Wörter $z \in L$ mit $|z| \geq l$ in $z = uvwxy$ zerlegen lassen mit

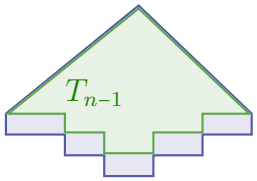
1. *$vx \neq \varepsilon$,*
2. *$|vwx| \leq l$ und*
3. *$uv^iwx^iy \in L$ für alle $i \geq 0$.*

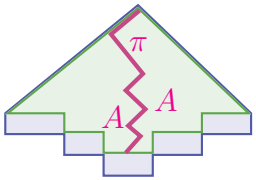
Beweis. Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CNF-Grammatik für $L \setminus \{\varepsilon\}$. Dann gibt es in G für jedes Wort $z = z_1 \dots z_n \in L$ mit $n \geq 1$, eine Ableitung



$$S = \alpha_0 \Rightarrow \alpha_1 \cdots \Rightarrow \alpha_m = z.$$

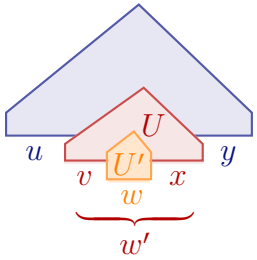
Da G in CNF ist, werden hierbei $n-1$ Regeln der Form $A \to BC$ und n Regeln der Form $A \to a$ angewandt, d.h. $m = 2n-1$ und z hat den Syntaxbaum T_{2n-1}. Wir können annehmen, dass zuerst alle Regeln der Form $A \to BC$ und danach die Regeln der Form $A \to a$ zur Anwendung kommen. Dann besteht die Satzform α_{n-1} aus n Variablen und der Syntaxbaum T_{n-1} hat ebenfalls n Blätter. Setzen wir $l = 2^k$, wobei $k = \|V\|$ ist, so hat T_{n-1} im Fall $n \geq l$ mindestens



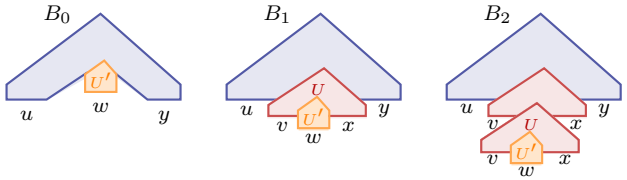


$l = 2^k > 2^{k-1}$ Blätter und daher mindestens die Tiefe k. Sei π ein von der Wurzel ausgehender Pfad maximaler Länge in T_{n-1}. Dann hat π die Länge $\geq k$ und unter den letzten $k+1$ Knoten von π müssen zwei mit derselben Variablen A markiert sein.

Seien U und U' die von diesen Knoten ausgehenden Unterbäume des vollständigen Syntaxbaums T_{2n-1}. Nun zerlegen wir z wie folgt. w' ist das Teilwort von $z = uw'y$, das von U erzeugt wird und w ist das Teilwort von $w' = vwx$, das von U' erzeugt wird. Jetzt bleibt nur noch zu zeigen, dass diese Zerlegung die geforderten 3 Eigenschaften erfüllt.



- Da U mehr Blätter hat als U', ist $vx \neq \varepsilon$ (Bedingung 1).
- Da der Baum $U^* = U \cap T_{n-1}$ die Tiefe $\leq k$ hat (andernfalls wäre π nicht maximal), hat U^* höchstens $2^k = l$ Blätter. Da U^* genau $|vwx|$ Blätter hat, folgt $|vwx| \leq l$ (Bedingung 2).
- Für den Nachweis von Bedingung 3 lassen sich schließlich Syntaxbäume B^i für die Wörter uv^iwx^iy, $i \geq 0$, wie folgt konstruieren:



B^0 entsteht also aus $B^1 = T_{2n-1}$, indem wir U durch U' ersetzen, und B^{i+1} entsteht aus B^i, indem wir U' durch U ersetzen. ■

Satz 98. *Die Klasse* CFL *ist nicht abgeschlossen unter Durchschnitt und Komplement.*

Beweis. Die beiden Sprachen

$$L_1 = \{a^n b^m c^m \mid n, m \geq 0\} \quad \text{und} \quad L_2 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \geq 0\}$$

sind kontextfrei. Nicht jedoch $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$. Also ist CFL nicht unter Durchschnitt abgeschlossen.

Da CFL zwar unter Vereinigung aber nicht unter Schnitt abgeschlossen ist, kann CFL wegen de Morgan nicht unter Komplementbildung abgeschlossen sein. ■

3.3 Der CYK-Algorithmus

In diesem Abschnitt stellen wir den bereits angekündigten effizienten Algorithmus zur Lösung des Wortproblems für kontextfreie Grammatiken vor.

Wortproblem für kontextfreie Grammatiken:

Gegeben: Eine kontextfreie Grammatik G und ein Wort x.
Gefragt: Ist $x \in L(G)$?

Wir lösen das Wortproblem, indem wir G zunächst in Chomsky-Normalform bringen und dann den nach seinen Autoren Cocke, Younger und Kasami benannten CYK-Algorithmus anwenden, welcher auf dem Prinzip der Dynamischen Programmierung beruht.

Satz 99. *Das Wortproblem für kontextfreie Grammatiken ist effizient entscheidbar.*

Beweis. Seien eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ und ein Wort $x = x_1 \dots x_n$ gegeben. Falls $x = \varepsilon$ ist, können wir effizient prüfen, ob $S \Rightarrow^* \varepsilon$ gilt. Andernfalls transformieren wir G in eine CNF-Grammatik G' für die Sprache $L(G) \setminus \{\varepsilon\}$. Chomsky-Normalform. Es lässt sich leicht verifizieren, dass die nötigen Umformungsschritte effizient ausführbar sind. Nun setzen wir den CYK-Algorithmus auf das Paar (G', x) an, der die Zugehörigkeit von x zu $L(G')$ wie folgt entscheidet.

Bestimme für $l = 1, \dots, n$ und $k = 1, \dots, n - l + 1$ die Menge

$$V_{l,k}(x) = \{A \in V \mid A \Rightarrow^* x_k \dots x_{k+l-1}\}$$

aller Variablen, aus denen das mit x_k beginnende Teilwort $x_k \dots x_{k+l-1}$ von x der Länge l ableitbar ist. Dann gilt offensichtlich $x \in L(G') \Leftrightarrow S \in V_{n,1}(x)$.

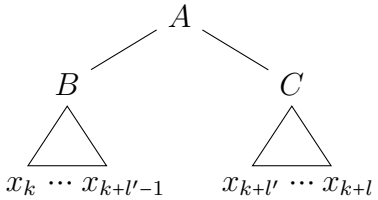
Für $l = 1$ ist

$$V_{1,k}(x) = \{A \in V \mid A \to x_k\}$$

und für $l = 2, \dots, n$ ist

$$V_{l,k}(x) = \{A \in V \mid \exists l' < l\ \exists B \in V_{l',k}(x)\ \exists C \in V_{l-l',k+l'}(x) \colon A \to BC\}.$$

Eine Variable A gehört also genau dann zu $V_{l,k}(x)$, $l \geq 2$, falls eine Zahl $l' \in \{1, \dots, l-1\}$ und eine Regel $A \to BC$ existieren, so dass $B \in V_{l',k}(x)$ und $C \in V_{l-l',k+l'}(x)$ sind.



■

Algorithmus CYK(G, x)

```
Input: CNF−Grammatik G = (V, Σ, P, S) und ein Wort x = x_1 ... x_n
for k := 1 to n do
  V_{1,k} := {A ∈ V | A → x_k ∈ P}
for l := 2 to n do
  for k := 1 to n − l + 1 do
    V_{l,k} := ∅
    for l' := 1 to l − 1 do
      for all A → BC ∈ P do
        if B ∈ V_{l',k} and C ∈ V_{l−l',k+l'} then
          V_{l,k} := V_{l,k} ∪ {A}
if S ∈ V_{n,1} then accept else reject
```

Der CYK-Algorithmus lässt sich leicht dahingehend modifizieren, dass er im Fall $x \in L(G)$ auch einen Syntaxbaum T von x ausgibt. Hierzu genügt es, zu jeder Variablen A in $V_{l,k}$ den Wert von l' und die Regel $A \to BC$ zu speichern, die zur Aufnahme von A in $V_{l,k}$ geführt haben.

Im Fall $S \in V_{n,1}(x)$ lässt sich dann mithilfe dieser Information leicht ein Syntaxbaum T von x konstruieren.

Beispiel 100. *Betrachte die CNF-Grammatik mit den Produktionen*

$$S \to AS', AY, BX, CS, c;\ \ S' \to BC;\ \ X \to AS, BX', a;\ \ X' \to XX;$$
$$Y \to BS, AY', b;\ \ Y' \to YY;\ \ A \to a;\ B \to b;\ C \to c.$$

Dann erhalten wir für das Wort $x = abb$ folgende Mengen $V_{l,k}$:

x_k:	a	b	b
l: 1	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
2	$\{S\}$	$\{Y'\}$	
3	$\{Y\}$		

Wegen $S \notin V_{3,1}(abb)$ ist $x \notin L(G)$. Dagegen gehört das Wort $y = aababb$ wegen $S \in V_{6,1}(aababb)$ zu $L(G)$:

a	a	b	a	b	b
$\{X, A\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{X, A\}$	$\{Y, B\}$	$\{Y, B\}$
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{S\}$	$\{Y'\}$	
$\{X\}$	$\{X\}$	$\{Y\}$	$\{Y\}$		
$\{X'\}$	$\{S\}$	$\{Y'\}$			
$\{X\}$	$\{Y\}$				
$\{S\}$					

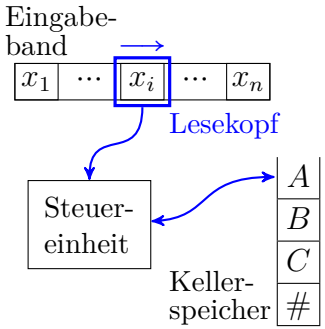
◁

3.4 Kellerautomaten

Wie müssen wir das Maschinenmodell des DFA erweitern, damit die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ und alle anderen kontextfreien Sprachen erkannt werden können? Dass ein DFA die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ nicht erkennen kann, liegt an seinem beschränkten Speichervermögen, das zwar von L aber nicht von der Eingabe abhängen darf.

Um L erkennen zu können, reicht bereits ein so genannter Kellerspeicher (Stapel, engl. *stack, pushdown memory*) aus. Dieser erlaubt nur den Zugriff auf die höchste belegte Speicheradresse. Ein Kellerautomat

- verfügt über einen Kellerspeicher,
- kann ε-Übergänge machen,
- liest in jedem Schritt das aktuelle Eingabezeichen und das oberste Kellersymbol,
- kann das oberste Kellersymbol entfernen (durch eine **pop-Operation**) und
- durch beliebig viele Symbole ersetzen (durch eine **push-Operation**).



Für eine Menge M bezeichne $\mathcal{P}_e(M)$ die Menge aller endlichen Teilmengen von M, d.h.

$$\mathcal{P}_e(M) = \{A \subseteq M \mid A \text{ ist endlich}\}.$$

Definition 101. *Ein* ***Kellerautomat*** *(kurz: PDA; pushdown automaton) wird durch ein 6-Tupel* $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#)$ *beschrieben, wobei*

- $Z \neq \emptyset$ *eine endliche Menge von* ***Zuständen****,*
- Σ *das* ***Eingabealphabet****,*
- Γ *das* ***Kelleralphabet****,*
- $\delta : Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}_e(Z \times \Gamma^*)$ *die* ***Überführungsfunktion****,*
- $q_0 \in Z$ *der* ***Startzustand*** *und*
- $\# \in \Gamma$ *das* ***Kelleranfangszeichen*** *ist.*

Wenn q der momentane Zustand, A das oberste Kellerzeichen und $u \in \Sigma$ das nächste Eingabezeichen (bzw. $u = \varepsilon$) ist, so kann M im Fall $(p, B_1 \dots B_k) \in \delta(q, u, A)$

- in den Zustand p wechseln,
- den Lesekopf auf dem Eingabeband um $|u|$ Positionen vorrücken und
- das Zeichen A im Keller durch die Zeichenfolge $B_1 \dots B_k$ ersetzen.

Hierfür sagen wir auch, M führt die **Anweisung** $quA \to pB_1 \dots B_k$ aus. Da im Fall $u = \varepsilon$ kein Eingabezeichen gelesen wird, spricht man auch von einem **spontanen** Übergang (oder **ε-Übergang**). Eine **Konfiguration** wird durch ein Tripel

$$K = (q, x_i \dots x_n, A_1 \dots A_l) \in Z \times \Sigma^* \times \Gamma^*$$

beschrieben und besagt, dass

- q der momentane Zustand,
- $x_i \dots x_n$ der ungelesene Rest der Eingabe und
- $A_1 \dots A_l$ der aktuelle Kellerinhalt ist (A_1 steht oben).

Eine Anweisung $quA_1 \to pB_1 \dots B_k$ (mit $u \in \{\varepsilon, x_i\}$) überführt die Konfiguration K in die **Folgekonfiguration**

$$K' = (p, x_j \dots x_n, B_1 \dots B_k A_2 \dots A_l) \text{ mit } j = i + |u|.$$

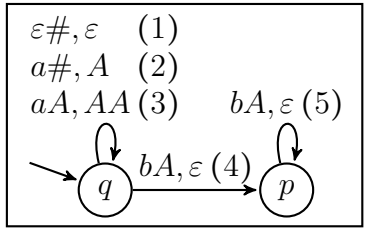
Hierfür schreiben wir auch kurz $K \vdash K'$. Eine ***Rechnung*** von M bei Eingabe x ist eine Folge von Konfigurationen $K_0, K_1, K_2 \dots$ mit $K_0 = (q_0, x, \#)$ und $K_0 \vdash K_1 \vdash K_2 \cdots$. K_0 heißt **Startkonfiguration** von M bei Eingabe x. Die reflexive, transitive Hülle von $\vdash$ bezeichnen wir wie üblich mit $\vdash^*$. Die von M **akzeptierte** oder **erkannte Sprache** ist

$$L(M) \quad = \quad \{x \in \Sigma^* \mid \exists\, p \in Z : (q_0, x, \#) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)\}.$$

Ein Wort x wird also genau dann von M akzeptiert, wenn es eine Rechnung gibt, bei der M das gesamte Eingabewort bis zum Ende liest und den Keller leert. Man beachte, dass bei leerem Keller kein weiterer Übergang mehr möglich ist.

Beispiel 102. *Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q, \#)$ ein PDA mit $Z = \{q, p\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{A, \#\}$ und den Anweisungen*

$$\begin{array}{llll} \delta: q\varepsilon\# \to q & (1) & qa\# \to qA & (2) \\ \quad qaA \to qAA & (3) & qbA \to p & (4) \\ \quad pbA \to p & (5) & & \end{array}$$



Dann akzeptiert M die Eingabe aabb:

$$(q, aabb, \#) \underset{(2)}{\vdash} (q, abb, A) \underset{(3)}{\vdash} (q, bb, AA) \underset{(4)}{\vdash} (p, b, A) \underset{(5)}{\vdash} (p, \varepsilon, \varepsilon).$$

Allgemeiner akzeptiert M das Wort $x = a^n b^n$ mit folgender Rechnung:

$n = 0$**:** $(q, \varepsilon, \#) \underset{(1)}{\vdash} (p, \varepsilon, \varepsilon)$.

$n \geq 1$**:** $(q, a^n b^n, \#) \underset{(2)}{\vdash} (q, a^{n-1} b^n, A) \underset{(3)}{\vdash}^{n-1} (q, b^n, A^n)$

$$\underset{(4)}{\vdash} (p, b^{n-1}, A^{n-1}) \underset{(5)}{\vdash}^{n-1} (p, \varepsilon, \varepsilon).$$

Dies zeigt $\{a^n b^n \mid n \geq 0\} \subseteq L(M)$. Als nächstes zeigen wir, dass jede von M akzeptierte Eingabe $x = x_1 \ldots x_n$ die Form $x = a^m b^m$ hat.

Ausgehend von der Startkonfiguration $(q, x, \#)$ sind nur die Anweisungen (1) oder (2) ausführbar. Falls M Anweisung (1) wählt, wird der Keller geleert. Daher kann M in diesem Fall nur das leere Wort $x = \varepsilon = a^0 b^0$ akzeptieren.

Falls die akzeptierende Rechnung mit Anweisung (2) beginnt, muss $x_1 = a$ sein. Danach ist nur Anweisung (3) ausführbar, bis M das erste b liest:

$$(q, x_1 \ldots x_n, \#) \underset{(2)}{\vdash} (q, x_2 \ldots x_n, A) \underset{(3)}{\vdash}^{m-1} (q, x_{m+1} \ldots x_n, A^m)$$

$$\underset{(4)}{\vdash} (p, x_{m+2} \ldots x_n, A^{m-1})$$

mit $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = a$ und $x_{m+1} = b$. Damit M den Keller leeren kann, müssen jetzt noch genau $m - 1$ b's kommen, weshalb x auch in diesem Fall die Form $a^m b^m$ hat. ◁

Als nächstes zeigen wir, dass PDAs genau die kontextfreien Sprachen erkennen.

Satz 103. $\mathsf{CFL} = \{L(M) \mid M$ *ist ein PDA*$\}$.

Beweis. Wir zeigen zuerst die Inklusion von links nach rechts.

Idee: Konstruiere zu einer kontextfreien Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ einen PDA $M = (\{q\}, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, S)$ mit $\Gamma = V \cup \Sigma$, so dass gilt:

$$S \Rightarrow_L^* x_1 \ldots x_n \text{ gdw. } (q, x_1 \ldots x_n, S) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon).$$

Hierzu fügen wir für jede Regel $A \to_G \alpha$ in P die Anweisung $q\varepsilon A \to q\alpha$ und für jedes $a \in \Sigma$ die Anweisung $qaa \to q\varepsilon$ zu δ hinzu.

M berechnet also nichtdeterministisch eine Linksableitung für die Eingabe x. Da M hierbei den Syntaxbaum von oben nach unten aufbaut, wird M als *Top-Down Parser* bezeichnet. Nun ist leicht zu sehen, dass sogar folgende Äquivalenz gilt:

$$S \Rightarrow_L^l x_1 \ldots x_n \text{ gdw. } (q, x_1 \ldots x_n, S) \vdash^{l+n} (q, \varepsilon, \varepsilon).$$

Daher folgt

$$x \in L(G) \Leftrightarrow S \Rightarrow_L^* x \Leftrightarrow (q, x, S) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon) \Leftrightarrow x \in L(M).$$

Als nächstes zeigen wir die Inklusion von rechts nach links.

Idee: Konstruiere zu einem PDA $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#)$ eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit Variablen $X_{pAp'}$, $A \in \Gamma$, $p, p' \in Z$, so dass folgende Äquivalenz gilt:

$$(p, x, A) \vdash^* (p', \varepsilon, \varepsilon) \text{ gdw. } X_{pAp'} \Rightarrow^* x. \qquad (*)$$

Ein Wort x soll also genau dann in G aus $X_{pAp'}$ ableitbar sein, wenn M ausgehend vom Zustand p bei Lesen von x in den Zustand p' gelangen kann und dabei das Zeichen A aus dem Keller entfernt. Um

dies zu erreichen, fügen wir für jede Anweisung $puA \to p_0A_1 \dots A_k$, $k \geq 0$, die folgenden $\|Z\|^k$ Regeln zu P hinzu:

Für jede Zustandsfolge $p_1, \dots, p_k$: $X_{pAp_k} \to uX_{p_0A_1p_1} \dots X_{p_{k-1}A_kp_k}$.

Um damit alle Wörter $x \in L(M)$ aus S ableiten zu können, benötigen wir jetzt nur noch für jeden Zustand $p \in Z$ die Regel $S \to X_{q_0\#p}$. Die Variablenmenge von G ist also

$$V = \{S\} \cup \{X_{pAp'} \mid p, p' \in Z, A \in \Gamma\}$$

und P enthält neben den Regeln $S \to X_{q_0\#p}$, $p \in Z$, für jede Anweisung $puA \to p_0A_1 \dots A_k$, $k \geq 0$, von M und jede Zustandsfolge $p_1, \dots, p_k$ die Regel $X_{pAp_k} \to uX_{p_0A_1p_1} \dots X_{p_{k-1}A_kp_k}$.
Unter der Voraussetzung, dass die Äquivalenz $(*)$ gilt, lässt sich nun leicht die Korrektheit von G zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned} x \in L(M) \quad &\Leftrightarrow \quad (q_0, x, \#) \vdash^* (p', \varepsilon, \varepsilon) \text{ für ein } p' \in Z \\ &\Leftrightarrow \quad S \Rightarrow X_{q_0\#p'} \Rightarrow^* x \text{ für ein } p' \in Z \\ &\Leftrightarrow \quad x \in L(G). \end{aligned}$$

Wir müssen also nur noch die Gültigkeit von $(*)$ zeigen. Hierzu zeigen wir durch Induktion über m für alle $p, p' \in Z$, $A \in \Gamma$ und $x \in \Sigma^*$ folgende stärkere Behauptung:

$$(p, x, A) \vdash^m (p', \varepsilon, \varepsilon) \text{ gdw. } X_{pAp'} \Rightarrow^m x. \qquad (**)$$

$m = 0$**:** Da sowohl $(p, x, A) \vdash^0 (p', \varepsilon, \varepsilon)$ als auch $X_{pAp'} \Rightarrow^0 x$ falsch sind, ist die Äquivalenz $(**)$ für $m = 0$ erfüllt.

$m \rightsquigarrow m+1$**:** Wir zeigen zuerst die Implikation von links nach rechts. Für eine gegebene Rechnung

$$(p, x, A) \vdash (p_0, x', A_1 \dots A_k) \vdash^m (p', \varepsilon, \varepsilon)$$

der Länge $m+1$ sei $puA \to p_0A_1 \dots A_k$, $k \geq 0$, die im ersten Rechenschritt ausgeführte Anweisung (d.h. $x = ux'$). Zudem sei p_i für $i = 1, \dots, k$ der Zustand, in den M mit Kellerinhalt $A_{i+1} \dots A_k$ gelangt (d.h. $p_k = p'$). Dann enthält P die Regel $X_{pAp_k} \to uX_{p_0A_1p_1} \dots X_{p_{k-1}A_kp_k}$. Weiter sei u_i für $i = 1, \dots, k$ das Teilwort von x', das M zwischen den Besuchen von p_{i-1} und p_i liest.
Dann gibt es Zahlen $m_i \geq 1$ mit $m_1 + \dots + m_k = m$ und

$$(p_{i-1}, u_i, A_i) \vdash^{m_i} (p_i, \varepsilon, \varepsilon)$$

für $i = 1, \dots, k$. Nach IV gibt es daher Ableitungen

$$X_{p_{i-1}A_ip_i} \Rightarrow^{m_i} u_i, \ i = 1, \dots, k,$$

die wir zu der gesuchten Ableitung zusammensetzen können:

$$\begin{aligned} X_{pAp_k} \quad &\Rightarrow \quad uX_{p_0A_1p_1} \dots X_{p_{k-2}A_{k-1}p_{k-1}}X_{p_{k-1}A_kp_k} \\ &\Rightarrow^{m_1} \quad uu_1X_{p_1A_2p_2} \dots X_{p_{k-2}A_{k-1}p_{k-1}}X_{p_{k-1}A_kp_k} \\ &\ \vdots \\ &\Rightarrow^{m_{k-1}} \quad uu_1 \dots u_{k-1}X_{p_{k-1}A_kp_k} \\ &\Rightarrow^{m_k} \quad uu_1 \dots u_k = x. \end{aligned}$$

Zuletzt zeigen wir den Induktionsschritt für die Implikation von rechts nach links von $(**)$. Gelte also umgekehrt $X_{pAp'} \Rightarrow^{m+1} x$ und sei α die im ersten Schritt abgeleitete Satzform, d.h.

$$X_{pAp'} \Rightarrow \alpha \Rightarrow^m x.$$

Wegen $X_{pAp'} \to_G \alpha$ gibt es eine Anweisung $puA \to p_0A_1 \dots A_k$, $k \geq 0$, und Zustände $p_1, \dots, p_k \in Z$ mit

$$\alpha = u\, X_{p_0A_1p_1} \dots X_{p_{k-1}A_kp_k},$$

wobei $p_k = p'$ ist. Wegen $\alpha \Rightarrow^m x$ ex. eine Zerlegung $x = uu_1 \dots u_k$ und Zahlen $m_i \geq 1$ mit $m_1 + \dots + m_k = m$ und

$$X_{p_{i-1}A_ip_i} \Rightarrow^{m_i} u_i \ (i = 1, \dots, k).$$

Nach IV gibt es somit Rechnungen

$$(p_{i-1}, u_i, A_i) \vdash^{m_i} (p_i, \varepsilon, \varepsilon),\ i = 1, \ldots, k,$$

aus denen sich die gesuchte Rechnung der Länge $m+1$ zusammensetzen lässt:

$$\begin{aligned}(p, uu_1 \ldots u_k, A) &\vdash (p_0, u_1 \ldots u_k, A_1 \ldots A_k)\\ &\vdash^{m_1} (p_1, u_2 \ldots u_k, A_2 \ldots A_k)\\ &\ \vdots\\ &\vdash^{m_{k-1}} (p_{k-1}, u_k, A_k)\\ &\vdash^{m_k} (p_k, \varepsilon, \varepsilon).\end{aligned}$$

■

Beispiel 104. *Sei* $G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S)$ *mit*

$$P\colon\ S \to aSbS,\ (1)\quad S \to a.\ (2)$$

Der zugehörige PDA besitzt dann die Anweisungen

$$\begin{aligned}\delta\colon\ & qaa \to q\varepsilon, && (0) && qbb \to q\varepsilon, && (0')\\ & q\varepsilon S \to qaSbS, && (1') && q\varepsilon S \to qa. && (2')\end{aligned}$$

Der Linksableitung

$$\underline{S} \underset{(1)}{\Rightarrow} a\underline{S}bS \underset{(2)}{\Rightarrow} aab\underline{S} \underset{(2)}{\Rightarrow} aaba$$

in G *entspricht beispielsweise die akzeptierende Rechnung*

$$\begin{aligned}(q, aaba, S) &\underset{(1')}{\vdash} (q, aaba, aSbS) \underset{(0)}{\vdash} (q, aba, SbS)\\ &\underset{(2')}{\vdash} (q, aba, abS) \underset{(0)}{\vdash} (q, ba, bS)\\ &\underset{(0')}{\vdash} (q, a, S) \underset{(2')}{\vdash} (q, a, a) \underset{(0)}{\vdash} (q, \varepsilon, \varepsilon)\end{aligned}$$

von M *und umgekehrt.* ◁

Beispiel 105. *Sei* M *der PDA* $(\{p, q\}, \{a, b\}, \{A, \#\}, \delta, p, \#)$ *mit*

$$\begin{aligned}\delta : & p\varepsilon\# \to q\varepsilon, && (1) && paA \to pAA, && (3) && qbA \to q\varepsilon. && (5)\\ & pa\# \to pA, && (2) && pbA \to q\varepsilon, && (4)\end{aligned}$$

Dann erhalten wir die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ *mit der Variablenmenge*

$$V = \{S, X_{p\#p}, X_{p\#q}, X_{q\#p}, X_{q\#q}, X_{pAp}, X_{pAq}, X_{qAp}, X_{qAq}\}.$$

Die Regelmenge P *enthält neben den beiden Startregeln*

$$S \to X_{p\#p}, X_{p\#q}\ (0, 0')$$

die folgenden Produktionen:

Anweisung $puA \to p_0A_1 \ldots A_k$		k	$p_1, \ldots, p_k$	*zugehörige Regel* $X_{pAp_k} \to uX_{p_0A_1p_1} \ldots X_{p_{k-1}A_kp_k}$	
$p\varepsilon\# \to q\varepsilon$	(1)	0	-	$X_{p\#q} \to \varepsilon$	(1′)
$pa\# \to pA$	(2)	1	p	$X_{p\#p} \to aX_{pAp}$	(2′)
			q	$X_{p\#q} \to aX_{pAq}$	(2″)
$paA \to pAA$	(3)	2	p, p	$X_{pAp} \to aX_{pAp}X_{pAp}$	(3′)
			p, q	$X_{pAq} \to aX_{pAp}X_{pAq}$	(3″)
			q, p	$X_{pAp} \to aX_{pAq}X_{qAp}$	(3‴)
			q, q	$X_{pAq} \to aX_{pAq}X_{qAq}$	(3⁗)
$pbA \to q\varepsilon$	(4)	0	-	$X_{pAq} \to b$	(4′)
$qbA \to q\varepsilon$	(5)	0	-	$X_{qAq} \to b$	(5′)

Der akzeptierenden Rechnung

$$(p, aabb, \#) \underset{(2)}{\vdash} (p, abb, A) \underset{(3)}{\vdash} (p, bb, AA) \underset{(4)}{\vdash} (q, b, A) \underset{(5)}{\vdash} (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

von M *entspricht dann die Ableitung*

$$S \underset{(0')}{\Rightarrow} X_{p\#q} \underset{(2'')}{\Rightarrow} aX_{pAq} \underset{(3'''')}{\Rightarrow} aaX_{pAq}X_{qAq} \underset{(4')}{\Rightarrow} aabX_{qAq} \underset{(5')}{\Rightarrow} aabb$$

in G *und umgekehrt.* ◁

3.5 Deterministisch kontextfreie Sprachen

Von besonderem Interesse sind kontextfreie Sprachen, die von einem deterministischen Kellerautomaten erkannt werden können.

Definition 106. *Ein Kellerautomat heißt* ***deterministisch****, falls* $\vdash$ *eine rechtseindeutige Relation ist:*

$$K \vdash K_1 \wedge K \vdash K_2 \Rightarrow K_1 = K_2.$$

Äquivalent hierzu ist, dass die Überführungsfunktion δ für alle $(q, a, A) \in Z \times \Sigma \times \Gamma$ folgende Bedingung erfüllt (siehe Übungen):

$$\|\delta(q, a, A)\| + \|\delta(q, \varepsilon, A)\| \leq 1.$$

Beispiel 107. *Der PDA* $M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \{A, B, \#\}, \delta, q_0, \#)$ *mit der Überführungsfunktion*

$$\begin{array}{llll} \delta\colon q_0a\# \to q_0A\# & q_0b\# \to q_0B\# & q_0aA \to q_0AA & q_0bA \to q_0BA \\ q_0aB \to q_0AB & q_0bB \to q_0BB & q_0cA \to q_1A & q_0cB \to q_1B \\ q_1aA \to q_1 & q_1bB \to q_1 & q_1\varepsilon\# \to q_2 & \end{array}$$

erkennt die Sprache $L(M) = \{xcx^R \mid x \in \{a, b\}^+\}$. *Um auf einen Blick erkennen zu können, ob* M *deterministisch ist, empfiehlt es sich,* δ *in Form einer Tabelle darzustellen:*

δ	$q_0, \#$	q_0, A	q_0, B	$q_1, \#$	q_1, A	q_1, B	$q_2, \#$	q_2, A	q_2, B
ε	–	–	–	q_2	–	–	–	–	–
a	$q_0A\#$	q_0AA	q_0AB	–	q_1	–	–	–	–
b	$q_0B\#$	q_0BA	q_0BB	–	–	q_1	–	–	–
c	–	q_1A	q_1B	–	–	–	–	–	–

Man beachte, dass jedes Tabellenfeld höchstens eine Anweisung enthält und jede Spalte, die einen ε*-Eintrag in der ersten Zeile hat, sonst keine weiteren Einträge enthält. Daher ist für alle* $(q, a, A) \in Z \times \Sigma \times \Gamma$ *die Bedingung*

$$\|\delta(q, a, A)\| + \|\delta(q, \varepsilon, A)\| \leq 1$$

erfüllt. ◁

Verlangen wir von einem deterministischen Kellerautomaten, dass er seine Eingabe durch Leeren des Kellers akzeptiert, so können nicht alle regulären Sprachen von deterministischen Kellerautomaten erkannt werden. Um beispielsweise die Sprache $L = \{a, aa\}$ zu erkennen, muss der Keller von M nach Lesen von a geleert werden. Daher ist es M nicht mehr möglich, die Eingabe aa zu akzeptieren. Deterministische Kellerautomaten können also durch Leeren des Kellers nur ***präfixfreie*** Sprachen L akzeptieren (d.h. kein Wort $x \in L$ ist Präfix eines anderen Wortes in L).

Wir können das Problem aber einfach dadurch lösen, dass wir deterministischen Kellerautomaten erlauben, ihre Eingabe durch Erreichen eines Endzustands zu akzeptieren.

Definition 108.

- *Ein* ***Kellerautomat mit Endzuständen*** *wird durch ein 7-Tupel* $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, E)$ *beschrieben. Dabei sind die Komponenten* $Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#$ *dieselben wie bei einem PDA und zusätzlich ist* $E \subseteq Z$ *eine Menge von* ***Endzuständen****.*
- *Die von* M ***akzeptierte*** *oder* ***erkannte Sprache*** *ist*

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists\, p \in E, \alpha \in \Gamma^* \colon (q_0, x, \#) \vdash^* (p, \varepsilon, \alpha)\}.$$

- M *ist ein* ***deterministischer Kellerautomat mit Endzuständen*** *(kurz:* ***DPDA****), falls* M *zusätzlich für alle* $(q, a, A) \in Z \times \Sigma \times \Gamma$ *folgende Bedingung erfüllt:*

$$\|\delta(q, a, A)\| + \|\delta(q, \varepsilon, A)\| \leq 1.$$

- *Die Klasse der deterministisch kontextfreien Sprachen ist definiert durch*

$$\textsf{DCFL} = \{L(M) \mid M \textit{ ist ein DPDA}\}.$$

Die Klasse der deterministisch kontextfreien Sprachen lässt sich auch mit Hilfe von speziellen kontextfreien Grammatiken charakterisieren, den so genannten $LR(k)$-Grammatiken.

Der erste Buchstabe L steht für die Leserichtung bei der Syntaxanalyse, d.h. das Eingabewort x wird von links (nach rechts) gelesen. Der zweite Buchstabe R bedeutet, dass bei der Syntaxanalyse eine Rechtsableitung entsteht. Schließlich gibt der Parameter k an, wieviele Zeichen man über das aktuelle Eingabezeichen hinauslesen muss, damit der nächste Schritt eindeutig feststeht (k wird auch als *Lookahead* bezeichnet).

Durch $LR(0)$-Grammatiken lassen sich nur die präfixfreien Sprachen in DCFL erzeugen. Dagegen erzeugen die $LR(k)$-Grammatiken für jedes $k \geq 1$ genau die Sprachen in DCFL.

Daneben gibt es noch $LL(k)$-Grammatiken, die für wachsendes k immer mehr deterministisch kontextfreie Sprachen erzeugen.

Als nächstes zeigen wir, dass DCFL unter Komplementbildung abgeschlossen ist. Versuchen wir, die End- und Nichtendzustände eines DPDA M einfach zu vertauschen, um einen DPDA $\overline{M}$ für $\overline{L(M)}$ zu erhalten, so ergeben sich folgende Schwierigkeiten:

1. Falls M eine Eingabe x nicht zu Ende liest, wird x weder von M noch von $\overline{M}$ akzeptiert.
2. Falls M nach dem Lesen von x noch ε-Übergänge ausführt und dabei End- und Nichtendzustände besucht, wird x von M und von $\overline{M}$ akzeptiert.

Der nächste Satz zeigt, wie sich Problem 1 beheben lässt.

Satz 109. *Jede Sprache $L \in$ DCFL wird von einem DPDA M' erkannt, der alle Eingaben zu Ende liest.*

Beweis. Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, E)$ ein DPDA mit $L(M) = L$. Falls M eine Eingabe $x = x_1 \dots x_n$ nicht zu Ende liest, muss einer der folgenden drei Gründe vorliegen:

1. M gerät in eine Konfiguration $(q, x_i \dots x_n, \varepsilon)$, $i \leq n$, mit leerem Keller.
2. M gerät in eine Konfiguration $(q, x_i \dots x_n, A\gamma)$, $i \leq n$, in der wegen $\delta(q, x_i, A) = \delta(q, \varepsilon, A) = \varnothing$ keine Anweisung ausführbar ist.
3. M gerät in eine Konfiguration $(q, x_i \dots x_n, A\gamma)$, $i \leq n$, so dass M ausgehend von der Konfiguration (q, ε, A) eine unendliche Folge von ε-Anweisungen ausführt.

Die erste Ursache schließen wir aus, indem wir ein neues Zeichen $\square$ auf dem Kellerboden platzieren:

(a) $s\varepsilon\# \to q_0\#\square$ (dabei sei s der neue Startzustand).

Die zweite Ursache schließen wir durch Hinzunahme eines Fehlerzustands r sowie folgender Anweisungen aus (hierbei ist $\Gamma' = \Gamma \cup \{\square\}$):

(b) $qaA \to rA$, für alle $(q, a, A) \in Z \times \Sigma \times \Gamma'$ mit $A = \square$ oder $\delta(q, a, A) = \delta(q, \varepsilon, A) = \varnothing$,

(c) $raA \to rA$, für alle $a \in \Sigma$ und $A \in \Gamma'$.

Als nächstes verhindern wir die Ausführung einer unendlichen Folge von ε-Übergängen. Dabei unterscheiden wir die beiden Fälle, ob M hierbei auch Endzustände besucht oder nicht. Falls ja, sehen wir einen Umweg über den neuen Endzustand t vor.

(d) $q\varepsilon A \to rA$, für alle $q \in Z$ und $A \in \Gamma$, so dass M ausgehend von der Konfiguration (q, ε, A) unendlich viele ε-Übergänge ausführt ohne dabei einen Endzustand zu besuchen.

(e) $q\varepsilon A \to tA$, $t\varepsilon A \to rA$, für alle $q \in Z$ und $A \in \Gamma$, so dass M ausgehend von der Konfiguration (q, ε, A) unendlich viele ε-Übergänge ausführt und dabei auch Endzustände besucht.

Schließlich übernehmen wir von M die folgenden Anweisungen:

(f) alle Anweisungen aus δ, soweit sie nicht durch Anweisungen vom Typ (d) oder (e) überschrieben wurden.

Zusammenfassend transformieren wir M in den DPDA

$$M' = (Z \cup \{r, s, t\}, \Sigma, \Gamma', \delta', s, \#, E \cup \{t\})$$

mit $\Gamma' = \Gamma \cup \{\square\}$, wobei δ' die unter (a) bis (f) genannten Anweisungen enthält. ■

Beispiel 110. *Wenden wir diese Konstruktion auf den DPDA*

$$M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \{A, B, \#\}, \delta, q_0, \#, \{q_2\})$$

mit der Überführungsfunktion

δ	$q_0,\#$	q_0,A	q_0,B	$q_1,\#$	q_1,A	q_1,B	$q_2,\#$	q_2,A	q_2,B
ε	–	–	–	q_2	–	–	$q_2\#$	–	–
a	$q_0A\#$	q_0AA	q_0AB	–	q_1	–	–	–	–
b	$q_0B\#$	q_0BA	q_0BB	–	–	q_1	–	–	–
c	–	q_1A	q_1B	–	–	–	–	–	–

an, so erhalten wir den DPDA

$$M' = (\{q_0, q_1, q_2, r, s, t\}, \{a, b, c\}, \{A, B, \#, \square\}, \delta', s, \#, \{q_2, t\})$$

mit folgender Überführungsfunktion δ':

δ'	$q_0,\#$	q_0,A	q_0,B	$q_0,\square$	$q_1,\#$	q_1,A	q_1,B	$q_1,\square$	$q_2,\#$	q_2,A	q_2,B	$q_2,\square$
ε	–	–	–	–	q_2	–	–	–	$t\#$	–	–	–
a	$q_0A\#$	q_0AA	q_0AB	$r\square$	–	q_1	rB	$r\square$	–	rA	rB	$r\square$
b	$q_0B\#$	q_0BA	q_0BB	$r\square$	–	rA	q_1	$r\square$	–	rA	rB	$r\square$
c	$r\#$	q_1A	q_1B	$r\square$	–	rA	rB	$r\square$	–	rA	rB	$r\square$
Typ	(f,b)	(f)	(f)	(b)	(f)	(f,b)	(f,b)	(b)	(e)	(b)	(b)	(b)

	$s,\#$	s,A	s,B	$s,\square$	$r,\#$	r,A	r,B	$r,\square$	$t,\#$	t,A	t,B	$t,\square$
ε	$q_0\#\square$	–	–	–	–	–	–	–	$r\#$	–	–	–
a	–	–	–	–	$r\#$	rA	rB	$r\square$	–	–	–	–
b	–	–	–	–	$r\#$	rA	rB	$r\square$	–	–	–	–
c	–	–	–	–	$r\#$	rA	rB	$r\square$	–	–	–	–
Typ	(a)				(c)	(c)	(c)	(c)	(e)			

◁

Satz 111. *Die Klasse* DCFL *ist unter Komplement abgeschlossen, d.h. es gilt* DCFL = co-DCFL.

Beweis. Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, E)$ ein DPDA, der alle Eingaben zu Ende liest, und sei $L(M) = L$. Wir konstruieren einen DPDA $\overline{M}$ für $\overline{L}$.

Die Idee dabei ist, dass sich $\overline{M}$ in seinem Zustand (q, i) neben dem aktuellen Zustand q von M in der Komponente i merkt, ob M nach Lesen des letzten Zeichens (bzw. seit Rechnungsbeginn) einen Endzustand besucht hat ($i = 2$) oder nicht ($i = 1$). Möchte M das nächste Zeichen lesen und befindet sich $\overline{M}$ im Zustand $(q, 1)$, so macht $\overline{M}$ noch einen Umweg über den Endzustand $(q, 3)$.

Konkret erhalten wir $\overline{M} = (Z \times \{1, 2, 3\}, \Sigma, \Gamma, \delta', s, \#, Z \times \{3\})$ mit

$$s = \begin{cases} (q_0, 1), & q_0 \notin E, \\ (q_0, 2), & \text{sonst}, \end{cases}$$

indem wir zu δ' für jede Anweisung $q\varepsilon A \to_M p\gamma$ die Anweisungen

$$\begin{aligned}
&(q,1)\varepsilon A \to (p,1)\gamma, && \text{falls } p \notin E,\\
&(q,1)\varepsilon A \to (p,2)\gamma, && \text{falls } p \in E \text{ und}\\
&(q,2)\varepsilon A \to (p,2)\gamma,
\end{aligned}$$

sowie für jede Anweisung $qaA \to_M p\gamma$ die Anweisungen

$$\begin{aligned}
&(q,1)\varepsilon A \to (q,3)A,\\
&(q,2)aA \to (p,1)\gamma, && \text{falls } p \notin E,\\
&(q,2)aA \to (p,2)\gamma, && \text{falls } p \in E,\\
&(q,3)aA \to (p,1)\gamma, && \text{falls } p \notin E \text{ und}\\
&(q,3)aA \to (p,2)\gamma, && \text{falls } p \in E.
\end{aligned}$$

hinzufügen. ■

Eine nützliche Eigenschaft von $\overline{M}$ ist, dass $\overline{M}$ in einem Endzustand keine ε-Übergänge macht.

Beispiel 112. *Angenommen, ein DPDA $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, E)$ führt bei der Eingabe $x = a$ folgende Rechnung aus:*

$$(q_0, a, \#) \vdash (q_1, \varepsilon, \gamma_1) \vdash (q_2, \varepsilon, \gamma_2).$$

Dann würde $\overline{M}$ im Fall $E = \{q_0, q_2\}$ (d.h. $x \in L(M)$) die Rechnung

$$((q_0, 2), a, \#) \vdash ((q_1, 1), \varepsilon, \gamma_1) \vdash ((q_2, 2), \varepsilon, \gamma_2)$$

ausführen. Da $(q_1, 1), (q_2, 2) \notin Z \times \{3\}$ sind, verwirft also $\overline{M}$ das Wort a. Dagegen würde $\overline{M}$ im Fall $E = \{q_0\}$ (d.h. $x \notin L(M)$) die Rechnung

$$((q_0, 2), a, \#) \vdash ((q_1, 1), \varepsilon, \gamma_1) \vdash ((q_2, 1), \varepsilon, \gamma_2) \vdash ((q_2, 3), \varepsilon, \gamma_2)$$

ausführen. Da $(q_2, 3) \in Z \times \{3\}$ ein Endzustand von $\overline{M}$ ist, würde $\overline{M}$ nun also das Wort a akzeptieren. ◁

Satz 113. *Die Klasse* DCFL *ist nicht abgeschlossen unter Durchschnitt, Vereinigung, Produkt und Sternhülle.*

Beweis. Die beiden Sprachen

$$L_1 = \{a^n b^m c^m \mid n, m \geq 0\} \quad \text{und} \quad L_2 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \geq 0\}$$

sind deterministisch kontextfrei (siehe Übungen). Da der Schnitt $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ nicht kontextfrei ist, liegt er auch nicht in DCFL, also ist DCFL nicht unter Durchschnitt abgeschlossen.

Da DCFL unter Komplementbildung abgeschlossen ist, kann DCFL wegen de Morgan dann auch nicht unter Vereinigung abgeschlossen sein. Beispielsweise sind folgende Sprachen deterministisch kontextfrei:

$$L_3 = \{a^i b^j c^k \mid i \neq j\} \text{ und } L_4 = \{a^i b^j c^k \mid j \neq k\}.$$

Ihre Vereinigung $L_3 \cup L_4 = \{a^i b^j c^k \mid i \neq j \text{ oder } j \neq k\}$ gehört aber nicht zu DCFL, d.h. $L_3 \cup L_4 \in \mathsf{CFL} \setminus \mathsf{DCFL}$. DCFL ist nämlich unter Schnitt mit regulären Sprachen abgeschlossen (siehe Übungen). Daher wäre mit $L_3 \cup L_4$ auch die Sprache

$$(\overline{L_3 \cup L_4}) \cap L(a^* b^* c^*) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

(deterministisch) kontextfrei.

Als nächstes zeigen wir, dass DCFL nicht unter Produktbildung abgeschlossen ist. Wir wissen bereits, dass $L = L_3 \cup L_4 \notin \mathsf{DCFL}$ ist. Dann ist auch die Sprache

$$0L = 0L_3 \cup 0L_4 \notin \mathsf{DCFL},$$

da sich ein DPDA $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, E)$ für $0L$ leicht zu einem DPDA für L umbauen ließe. Sei nämlich (p, ε, γ) die Konfiguration, die M nach Lesen der Eingabe 0 erreicht. Dann erkennt der DPDA $M' = (Z \cup \{s\}, \Sigma, \Gamma, \delta', s, \#, E)$ die Sprache L, wobei δ' wie folgt definiert ist:

$$\delta'(q, u, A) = \begin{cases} (p, \gamma), & (q, u, A) = (s, \varepsilon, \#),\\ \delta(q, u, A), & (q, u, A) \in Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma. \end{cases}$$

Es ist leicht zu sehen, dass die beiden Sprachen $\{\varepsilon, 0\}$ und $L_5 = L_3 \cup 0L_4$ in DCFL sind (siehe Übungen). Ihr Produkt $\{\varepsilon, 0\}L_5 = L_5 \cup 0L_5 = L_3 \cup 0L_4 \cup 0L_3 \cup 00L_4$ gehört aber nicht zu DCFL. Da DCFL unter Schnitt mit regulären Sprachen abgeschlossen ist (siehe Übungen), wäre andernfalls auch

$$\{\varepsilon, 0\}L_5 \cap L(0a^*b^*c^*) = 0L_3 \cup 0L_4$$

in DCFL, was wir bereits ausgeschlossen haben. ■

Dass DCFL auch nicht unter Sternhüllenbildung abgeschlossen ist, lässt sich ganz ähnlich zeigen (siehe Übungen). Wir fassen die bewiesenen Abschlusseigenschaften der Klassen REG, DCFL und CFL in folgender Tabelle zusammen:

	Vereinigung	Schnitt	Komplement	Produkt	Sternhülle
REG	ja	ja	ja	ja	ja
DCFL	nein	nein	ja	nein	nein
CFL	ja	nein	nein	ja	ja

4 Kontextsensitive Sprachen

In diesem Kapitel führen wir das Maschinenmodell des linear beschränkten Automaten (LBA) ein und zeigen, dass LBAs genau die kontextsensitiven Sprachen erkennen. Die Klasse CSL ist unter Komplementbildung abgeschlossen. Es ist jedoch offen, ob die Klasse DCSL der von einem deterministischen LBA erkannten Sprachen eine echte Teilklasse von CSL ist (diese Frage ist als *LBA-Problem* bekannt).

4.1 Kontextsensitive Grammatiken

Zur Erinnerung: Eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ heißt **kontextsensitiv**, falls für alle Regeln $\alpha \to \beta$ gilt: $|\beta| \geq |\alpha|$. Als einzige Ausnahme hiervon ist die Regel $S \to \varepsilon$ erlaubt. Allerdings nur dann, wenn das Startsymbol S nicht auf der rechten Seite einer Regel vorkommt.

Das nächste Beispiel zeigt, dass die Sprache $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ von einer kontextsensitiven Grammatik erzeugt wird. Da L nicht kontextfrei ist, ist also die Klasse CFL echt in der Klasse CSL enthalten.

Beispiel 114. *Betrachte die kontextsensitive Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, B\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ und den Regeln*

$$P\colon S \to aSBc, abc\ (1,2) \quad cB \to Bc\ (3) \quad bB \to bb\ (4)$$

In G läßt sich beispielsweise das Wort $w = aabbcc$ ableiten:

$$S \underset{(1)}{\Rightarrow} aSBc \underset{(2)}{\Rightarrow} aabcBc \underset{(3)}{\Rightarrow} aabBcc \underset{(4)}{\Rightarrow} aabbcc$$

Allgemein gilt für alle $n \geq 1$:

$$S \underset{(1)}{\Rightarrow}^{n-1} a^{n-1}S(Bc)^{n-1} \underset{(2)}{\Rightarrow} a^n bc(Bc)^{n-1} \underset{(3)}{\Rightarrow}^{\binom{n}{2}} a^n bB^{n-1}c^n \underset{(4)}{\Rightarrow}^{n-1} a^n b^n c^n$$

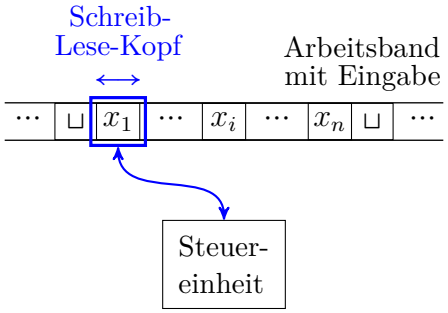
Also gilt $a^n b^n c^n \in L(G)$ für alle $n \geq 1$. Umgekehrt folgt durch Induktion über die Ableitungslänge m, dass jede Satzform u mit $S \Rightarrow^m \alpha$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

- $\#_a(\alpha) = \#_b(\alpha) + \#_B(\alpha) = \#_c(\alpha)$,
- *links von S und links von einem a kommen nur a's vor,*
- *links von einem b kommen nur a's oder b's vor.*

Daraus ergibt sich, dass in G nur Wörter der Form $w = a^n b^n c^n$ ableitbar sind. ◁

4.2 Turingmaschinen

Um ein geeignetes Maschinenmodell für die kontextsensitiven Sprachen zu finden, führen wir zunächst das Rechenmodell der nichtdeterministischen Turingmaschine (NTM) ein. Eine NTM erhält ihre Eingabe auf einem nach links und rechts unbegrenzten Band. Während ihrer Rechnung kann sie den Schreib-Lese-Kopf auf dem Band in beide Richtungen bewegen und dabei die besuchten Bandfelder lesen sowie gelesenen Zeichen gegebenenfalls überschreiben.



Es gibt mehrere Arten von Turingmaschinen (u.a. mit einseitig unendlichem Band oder mit mehreren Schreib-Lese-Köpfen auf dem Band). Wir verwenden folgende Variante der Mehrband-Turingmaschine.

Definition 115. *Sei $k \geq 1$.*

a) Eine ***nichtdeterministische k-Band-Turingmaschine*** *(kurz* ***k-NTM*** *oder einfach* ***NTM****) wird durch ein 6-Tupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ beschrieben, wobei*

- *Z eine endliche Menge von Zuständen,*
- *Σ das Eingabealphabet (wobei $\sqcup \notin \Sigma$),*
- *Γ das Arbeitsalphabet (wobei $\Sigma \cup \{\sqcup\} \subseteq \Gamma$),*
- *$\delta\colon Z \times \Gamma^k \to \mathcal{P}(Z \times \Gamma^k \times \{L, R, N\}^k)$ die Überführungsfunktion,*
- *q_0 der Startzustand und*
- *$E \subseteq Z$ die Menge der Endzustände ist.*

b) Eine k-NTM M heißt ***deterministisch*** *(kurz: M ist eine* ***k-DTM*** *oder einfach* ***DTM****), falls für alle $(q, a_1, \ldots a_k) \in Z \times \Gamma^k$ die Ungleichung $\|\delta(q, a_1, \ldots a_k)\| \leq 1$ gilt.*

Für $(q', a_1', \ldots, a_k', D_1, \ldots, D_k) \in \delta(q, a_1, \ldots a_k)$ schreiben wir auch

$$(q, a_1, \ldots, a_k) \to (q', a_1', \ldots, a_k', D_1, \ldots, D_k).$$

Eine solche Anweisung ist ausführbar, falls

- q der aktuelle Zustand von M ist und
- sich für $i = 1, \ldots, k$ der Lesekopf des i-ten Bandes auf einem mit a_i beschrifteten Feld befindet.

Ihre Ausführung bewirkt, dass M

- vom Zustand q in den Zustand q' übergeht,
- auf Band i das Symbol a_i durch a_i' ersetzt und
- den Kopf gemäß D_i bewegt (L: ein Feld nach links, R: ein Feld nach rechts, N: keine Bewegung).

Definition 116. *Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ eine k-NTM.*

a) Eine ***Konfiguration*** *von M ist ein $(3k+1)$-Tupel*

$$K = (q, u_1, a_1, v_1, \ldots, u_k, a_k, v_k) \in Z \times (\Gamma^* \times \Gamma \times \Gamma^*)^k$$

und besagt, dass

- *q der momentane Zustand ist und*
- *das i-te Band mit $\ldots \sqcup u_i a_i v_i \sqcup \ldots$ beschriftet ist, wobei sich der Kopf auf dem Zeichen a_i befindet.*

Im Fall $k = 1$ schreiben wir für eine Konfiguration (q, u, a, v) auch kurz $uqav$.

b) *Die* **Startkonfiguration** *von M bei Eingabe $x = x_1 \dots x_n \in \Sigma^*$ ist*

$$K_x = \begin{cases} (q_0, \varepsilon, x_1, x_2 \dots x_n, \varepsilon, \sqcup, \varepsilon, \dots, \varepsilon, \sqcup, \varepsilon), & x \neq \varepsilon, \\ (q_0, \varepsilon, \sqcup, \varepsilon, \dots, \varepsilon, \sqcup, \varepsilon), & x = \varepsilon. \end{cases}$$

c) *Eine Konfiguration $K' = (q, u'_1, a'_1, v'_1, \dots, u'_k, a'_k, v'_k)$ heißt* **Folgekonfiguration** *von $K = (p, u_1, a_1, v_1, \dots, u_k, a_k, v_k)$ (kurz $K \vdash K'$), falls eine Anweisung*

$$(q, a_1, \dots, a_k) \to (q', b_1, \dots, b_k, D_1, \dots, D_k)$$

existiert, so dass für $i = 1, \dots, k$ gilt:

im Fall $D_i = N$:	*$D_i = R$:*	*$D_i = L$:*
K: $u_i \boxed{a_i} v_i$ K': $u_i \boxed{b_i} v_i$	K: $u_i \boxed{a_i} v_i$ K': $u_i\, b_i \boxed{a'_i} v'_i$	K: $u_i \boxed{a_i} v_i$ K': $u'_i \boxed{a'_i}\, b_i\, v_i$
$u'_i = u_i$, $a'_i = b_i$ *und* $v'_i = v_i$.	$u'_i = u_i b_i$ *und* $a'_i v'_i = \begin{cases} v_i, & v_i \neq \varepsilon, \\ \sqcup, & \text{sonst.} \end{cases}$	$u'_i a'_i = \begin{cases} u_i, & u_i \neq \varepsilon, \\ \sqcup, & \text{sonst} \end{cases}$ *und* $v'_i = b_i v_i$.

Man beachte, dass sich die Länge der Bandinschrift $u_i a_i v_i$ beim Übergang von K zu K' genau dann um 1 erhöht, wenn in K' zum ersten Mal ein neues Feld auf dem i-ten Band besucht wird. Andernfalls bleibt die Länge von $u_i a_i v_i$ unverändert. Die Länge von $u_i a_i v_i$ entspricht also genau der Anzahl der auf dem i-ten Band besuchten Felder (inkl. Eingabezeichen im Fall $i = 1$).

d) *Eine* **Rechnung** *von M bei Eingabe x ist eine Folge von Konfigurationen $K_0, K_1, K_2 \dots$ mit $K_0 = K_x$ und $K_0 \vdash K_1 \vdash K_2 \cdots$.*

e) *Die von M* **akzeptierte** *oder* **erkannte Sprache** *ist*

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists K \in E \times (\Gamma^* \times \Gamma \times \Gamma^*)^k : K_x \vdash^* K\}.$$

M akzeptiert also eine Eingabe x (hierfür sagen wir kurz $M(x)$ akzeptiert), falls es eine Rechnung $K_x = K_0 \vdash K_1 \vdash K_2 \cdots \vdash K_l$ von $M(x)$ gibt, bei der ein Endzustand erreicht wird.

Beispiel 117. *Betrachte die 1-DTM $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ mit $Z = \{q_0, \dots q_4\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \Sigma \cup \{A, B, \sqcup\}$, $E = \{q_4\}$, wobei δ folgende Anweisungen emthält:*

$q_0 a \to q_1 AR$	(1)	*Anfang der Schleife: Ersetze das erste a durch A.*
$q_1 a \to q_1 aR$	(2)	*Bewege den Kopf nach rechts bis zum ersten b*
$q_1 B \to q_1 BR$	(3)	*und ersetze dies durch ein B (falls kein b mehr*
$q_1 b \to q_2 BL$	(4)	*vorhanden ist, dann halte ohne zu akzeptieren).*
$q_2 a \to q_2 aL$	(5)	*Bewege den Kopf zurück nach links bis ein A*
$q_2 B \to q_2 BL$	(6)	*kommt, gehe wieder ein Feld nach rechts und wie-*
$q_2 A \to q_0 AR$	(7)	*derhole die Schleife.*
$q_0 B \to q_3 BR$	(8)	*Falls kein a am Anfang der Schleife, dann teste,*
$q_3 B \to q_3 BR$	(9)	*ob noch ein b vorhanden ist. Wenn ja, dann halte*
$q_3 \sqcup \to q_4 \sqcup N$	(10)	*ohne zu akzeptieren. Andernfalls akzeptiere.*

Dann führt M bei Eingabe aabb folgende Rechnung aus:

$$\begin{aligned} q_0 aabb &\underset{(1)}{\vdash} Aq_1 abb \underset{(2)}{\vdash} Aaq_1 bb \underset{(4)}{\vdash} Aq_2 aBb \\ &\underset{(5)}{\vdash} q_2 AaBb \underset{(7)}{\vdash} Aq_0 aBb \underset{(1)}{\vdash} AAq_1 Bb \\ &\underset{(3)}{\vdash} AABq_1 b \underset{(4)}{\vdash} AAq_2 BB \underset{(6)}{\vdash} Aq_2 ABB \\ &\underset{(7)}{\vdash} AAq_0 BB \underset{(8)}{\vdash} AABq_3 B \underset{(9)}{\vdash} AABBq_3 \sqcup \underset{(10)}{\vdash} AABBq_4 \sqcup \end{aligned}$$

Ähnlich läßt sich $a^n b^n \in L(M)$ für ein beliebiges $n \geq 1$ zeigen. Andererseits führt die Eingabe abb auf die Rechnung

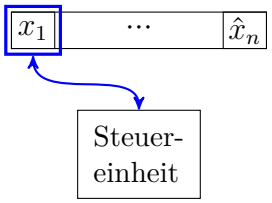
$$q_0 abb \underset{(1)}{\vdash} Aq_1 bb \underset{(4)}{\vdash} q_2 ABb \underset{(7)}{\vdash} Aq_0 Bb \underset{(8)}{\vdash} ABq_3 b,$$

die nicht weiter fortsetzbar ist. Da M deterministisch ist, kann $M(abb)$ auch nicht durch eine andere Rechnung den Endzustand q_4 erreichen. D.h. abb gehört nicht zu $L(M)$. Tatsächlich lässt sich durch Betrachtung der übrigen Fälle ($x = a^n b^m$, $n > m$, $x = a^n b^m a^k$, $m, k \geq 1$, etc.) zeigen, dass M nur Eingaben der Form $a^n b^n$ akzeptiert, und somit $L(M) = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ ist. ◁

Es ist leicht zu sehen, dass jede Typ-0 Sprache von einer NTM M akzeptiert wird, die ausgehend von x eine Rückwärtsableitung (Reduktion) auf das Startsymbol sucht. Ist $x \neq \varepsilon$ und markieren wir das letzte Zeichen von x, so kann M das Ende der Eingabe erkennen, ohne darüber hinaus lesen zu müssen. Zudem ist im Fall einer Typ-1 Sprache die linke Seite einer Regel höchstens so lang wie die rechte Seite. Deshalb muss M beim Erkennen von kontextsensitiven Sprachen den Bereich der Eingabe während der Rechnung nicht verlassen.

4.3 Linear beschränkte Automaten

Eine 1-NTM M, die bei keiner Eingabe $x \neq \varepsilon$, deren letztes Zeichen markiert ist, den Bereich der Eingabe verlässt, wird als LBA (linear beschränkter Automat) bezeichnet. Ein LBA darf also bei Eingaben der Länge $n > 0$ während der Rechnung nur die n mit der Eingabe beschrifteten Bandfelder besuchen und überschreiben. Tatsächlich lässt sich zeigen, dass jede k-NTM, die bei Eingaben der Länge n höchstens linear viele (also $cn + c$ für eine



Konstante c) Bandfelder besucht, von einem LBA simuliert werden kann.

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass LBAs genau die kontextsensitiven Sprachen erkennen.

Definition 118.

a) *Für ein Alphabet Σ und ein Wort $x = x_1 \ldots x_n \in \Sigma^*$ bezeichne $\hat{x}$ das Wort*

$$\hat{x} = \begin{cases} x, & x = \varepsilon, \\ x_1 \ldots x_{n-1} \hat{x}_n, & x \neq \varepsilon \end{cases}$$

über dem Alphabet $\hat{\Sigma} = \Sigma \cup \{\hat{a} \mid a \in \Sigma\}$.

b) *Eine 1-NTM $M = (Z, \hat{\Sigma}, \Gamma, \delta, q_0, E)$ heißt* **linear beschränkt** *(kurz: M ist ein* **LBA***), falls M für jedes Wort $x \in \Sigma^+$ ausgehend von der Startkonfiguration $K_{\hat{x}}$ nur Konfigurationen $K = uqav$ mit $|uav| \leq n$ erreichen kann:*

$$\forall x \in \Sigma^+ : K_{\hat{x}} \vdash^* uqav \;\Rightarrow\; |uav| \leq |x|.$$

c) *Die von einem LBA* **akzeptierte** *oder* **erkannte Sprache** *ist*

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid M(\hat{x}) \text{ akzeptiert}\}.$$

Beispiel 119. *Es ist nicht schwer, die 1-DTM $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ aus Beispiel 117 mit der Überführungsfunktion*

$$\begin{array}{llllll} \delta\colon & q_0 a \to q_1 AR & (1) & q_1 a \to q_1 aR & (2) & q_1 B \to q_1 BR & (3) \\ & q_1 b \to q_2 BL & (4) & q_2 a \to q_2 aL & (5) & q_2 B \to q_2 BL & (6) \\ & q_2 A \to q_0 AR & (7) & q_0 B \to q_3 BR & (8) & q_3 B \to q_3 BR & (9) \\ & q_3 \sqcup \to q_4 \sqcup N & (10) & & & & \end{array}$$

in einen deterministischen LBA (kurz **DLBA***) M' für die Sprache $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ umzuwandeln. Ersetze hierzu*

- *Σ durch $\hat{\Sigma} = \{a, b, \hat{a}, \hat{b}\}$,*
- *Γ durch $\Gamma' = \hat{\Sigma} \cup \{A, B, \hat{B}, \sqcup\}$ sowie*
- *die Anweisung $q_3 \sqcup \to q_4 \sqcup N$ (10) durch $q_3 \hat{B} \to q_4 \hat{B} N$ (10′)*

und füge die Anweisungen $q_1\hat{b} \to q_2\hat{B}L$ *(4a) und* $q_0\hat{B} \to q_4\hat{B}N$ *(8a) hinzu. Dann erhalten wir den DLBA* $M' = (Z, \hat{\Sigma}, \Gamma', \delta', q_0, E)$ *mit der Überführungsfunktion*

$$\begin{array}{llllll}
\delta'\colon & q_0a \to q_1AR & (1) & q_1\hat{b} \to q_2\hat{B}L & (4a) & q_0B \to q_3BR & (8) \\
& q_1a \to q_1aR & (2) & q_2a \to q_2aL & (5) & q_0\hat{B} \to q_4\hat{B}N & (8a) \\
& q_1B \to q_1BR & (3) & q_2B \to q_2BL & (6) & q_3B \to q_3BR & (9) \\
& q_1b \to q_2BL & (4) & q_2A \to q_0AR & (7) & q_3\hat{B} \to q_4\hat{B}N & (10') \\
\end{array}$$

Das Wort aabb wird nun von M' *bei Eingabe* $aab\hat{b}$ *durch folgende Rechnung akzeptiert:*

$$q_0aab\hat{b} \vdash^* AABq_1\hat{b} \underset{(4a)}{\vdash} AAq_2B\hat{B} \vdash^* AABq_3\hat{B} \underset{(10')}{\vdash} AABq_4\hat{B}$$

◁

Definition 120. *Die Klasse der* ***deterministisch kontextsensitiven*** *Sprachen ist definiert als*

$$\mathsf{DCSL} = \{L(M) \mid M \text{ ist ein DLBA}\}.$$

Der DLBA M' für die Sprache $A = \{a^nb^n \mid n \geq 1\}$ aus dem letzten Beispiel lässt sich leicht in einen DLBA für die Sprache $B = \{a^nb^nc^n \mid n \geq 1\}$ transformieren (siehe Übungen), d.h. $B \in \mathsf{DCSL} \setminus \mathsf{CFL}$. Die Inklusion von CFL in DCSL wird in den Übungen gezeigt.

Als nächstes beweisen wir, dass LBAs genau die kontextsensitiven Sprachen erkennen.

Satz 121. $\mathsf{CSL} = \{L(M) \mid M \text{ ist ein LBA}\}$.

Beweis. Wir zeigen zuerst die Inklusion von links nach rechts. Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine kontextsensitive Grammatik. Dann wird $L(G)$ von folgendem LBA M akzeptiert (o.B.d.A. sei $\varepsilon \notin L(G)$):

Arbeitsweise von M bei Eingabe $x = x_1 \ldots x_{n-1}\hat{x}_n$ mit $n > 0$:

1. Markiere das erste Eingabezeichen x_1
2. Wähle eine beliebige Regel $\alpha \to \beta$ aus P
3. Wähle ein beliebiges Vorkommen von β auf dem Band (falls β nicht vorkommt, halte ohne zu akzeptieren)
4. Ersetze die ersten $|\alpha|$ Zeichen von β durch α
5. Falls das erste (oder letzte) Zeichen von β markiert war, markiere auch das erste (letzte) Zeichen von α
6. Verschiebe die Zeichen rechts von β um $|\beta| - |\alpha|$ Positionen nach links und überschreibe die frei werdenden Bandfelder mit Blanks
7. Enthält das Band außer Blanks nur das (markierte) Startsymbol, so halte in einem Endzustand
8. Gehe zurück zu Schritt 2

Nun ist leicht zu sehen, dass M wegen $|\beta| \geq |\alpha|$ tatsächlich ein LBA ist. M akzeptiert eine Eingabe x, falls es gelingt, eine Ableitung für x in G zu finden (in umgekehrter Reihenfolge, d.h. M ist ein nichtdeterministischer *Bottom-Up Parser*). Da sich genau für die Wörter in $L(G)$ eine Ableitung finden lässt, folgt $L(M) = L(G)$.

Für den Beweis der umgekehrten Inklusion sei ein LBA $M = (Z, \hat{\Sigma}, \Gamma, \delta, q_0, E)$ gegeben (o.B.d.A. sei $\varepsilon \notin L(M)$). Betrachte die kontextsensitive Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

$$V = \{S, A\} \cup (Z\Gamma \cup \Gamma) \times \Sigma,$$

die für alle $a, b \in \Sigma$ und $c, d \in \Gamma$ folgende Regeln enthält:

$$\begin{array}{llll}
P\colon & S \to A(\hat{a}, a),\ (q_0\hat{a}, a) & & \text{(S)} \quad \text{„Startregeln“} \\
& A \to A(a, a),\ (q_0a, a) & & \text{(A)} \quad \text{„A-Regeln“} \\
& (c, a) \to a & & \text{(F)} \quad \text{„Finale Regeln“} \\
& (qc, a) \to a, & \text{falls } q \in E & \text{(E)} \quad \text{„E-Regeln“}
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rlll}
(qc,a) \to (q'c',a), & \text{falls } qc \to_M q'c'N & \text{(N)} & \text{„N-Regeln“} \\
(qc,a)(d,b) \to (c',a)(q'd,b), & \text{falls } qc \to_M q'c'R & \text{(R)} & \text{„R-Regeln“} \\
(d,a)(qc,b) \to (q'd,a)(c',b), & \text{falls } qc \to_M q'c'L & \text{(L)} & \text{„L-Regeln“}
\end{array}
$$

Durch Induktion über m lässt sich nun leicht für alle $a_1, \ldots, a_n \in \Gamma$ und $q \in Z$ die folgende Äquivalenz beweisen:

$$
\begin{aligned}
& q_0 x_1 \ldots x_{n-1} \hat{x}_n \vdash^m a_1 \ldots a_{i-1} q a_i \ldots a_n \iff \\
& \quad (q_0 x_1, x_1) \ldots (\hat{x}_n, x_n) \underset{(N,R,L)}{\Rightarrow}{}^m (a_1, x_1) \ldots (q a_i, x_i) \ldots (a_n, x_n)
\end{aligned}
$$

Ist also $q_0 x_1 \ldots x_{n-1} \hat{x}_n \vdash^m a_1 \ldots a_{i-1} q a_i \ldots a_n$ mit $q \in E$ eine akzeptierende Rechnung von $M(x_1 \ldots x_{n-1} \hat{x}_n)$, so folgt

$$
\begin{aligned}
S & \underset{(S,A)}{\Rightarrow}{}^n (q_0 x_1, x_1)(x_2, x_2) \ldots (x_{n-1}, x_{n-1})(\hat{x}_n, x_n) \\
& \underset{(N,L,R)}{\Rightarrow}{}^m (a_1, x_1) \ldots (a_{i-1}, x_{i-1})(q a_i, x_i) \ldots (a_n, x_n) \\
& \underset{(F,E)}{\Rightarrow}{}^n x_1 \ldots x_n
\end{aligned}
$$

Die Inklusion $L(G) \subseteq L(M)$ folgt analog. ■

Eine einfache Modifikation des Beweises zeigt, dass 1-NTMs genau die Sprachen vom Typ 0 akzeptieren (siehe Übungen).

Beispiel 122. *Betrachte den LBA $M = (Z, \hat{\Sigma}, \Gamma, \delta, q_0, E)$ mit $Z = \{q_0, \ldots q_4\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a, b, \hat{a}, \hat{b}, A, B, \hat{B}, \sqcup\}$ und $E = \{q_4\}$, sowie*

$$
\begin{array}{llll}
\delta\colon q_0 a \to q_1 AR & q_1 \hat{b} \to q_2 \hat{B} L & q_0 B \to q_3 BR \\
q_1 a \to q_1 aR & q_2 a \to q_2 aL & q_0 \hat{B} \to q_4 \hat{B} N \\
q_1 B \to q_1 BR & q_2 B \to q_2 BL & q_3 B \to q_3 BR \\
q_1 b \to q_2 BL & q_2 A \to q_0 AR & q_3 \hat{B} \to q_4 \hat{B} N
\end{array}
$$

Die zugehörige kontextsensitive Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ enthält dann neben den Start- und A-Regeln

$$
\begin{array}{ll}
S \to A(\hat{a}, a),\ A(\hat{b}, b),\ (q_0 \hat{a}, a),\ (q_0 \hat{b}, b) & (S_1\text{-}S_4) \\
A \to A(a, a),\ A(b, b),\ (q_0 a, a),\ (q_0 b, b) & (A_1\text{-}A_4)
\end{array}
$$

für jedes Zeichen $c \in \Gamma$ folgende F- und E-Regeln (wegen $E = \{q_4\}$):

$$
\begin{array}{ll}
(c, a) \to a \text{ und } (c, b) \to b & (F_1\text{-}F_{16}) \\
(q_4 c, a) \to a \text{ und } (q_4 c, b) \to b & (E_1\text{-}E_{16})
\end{array}
$$

Daneben enthält P beispielsweise für die Anweisung $q_3 \hat{B} \to q_4 \hat{B} N$ folgende zwei N-Regeln:

$$
(q_3 \hat{B}, a) \to (q_4 \hat{B}, a), \quad (q_3 \hat{B}, b) \to (q_4 \hat{B}, b).
$$

Für die Anweisung $q_1 b \to q_2 BL$ kommen für jedes $d \in \Gamma$ die vier L-Regeln

$$
\begin{array}{ll}
(d, a)(q_1 b, a) \to (q_2 d, a)(B, a), & (d, b)(q_1 b, a) \to (q_2 d, b)(B, a) \\
(d, a)(q_1 b, b) \to (q_2 d, a)(B, b), & (d, b)(q_1 b, b) \to (q_2 d, b)(B, b)
\end{array}
$$

zu P hinzu und die Anweisung $q_0 a \to q_1 AR$ bewirkt für jedes $d \in \Gamma$ die Hinzunahme folgender vier R-Regeln:

$$
\begin{array}{ll}
(q_0 a, a)(d, a) \to (A, a)(q_1 d, a), & (q_0 a, a)(d, b) \to (A, a)(q_1 d, b) \\
(q_0 a, b)(d, a) \to (A, b)(q_1 d, a), & (q_0 a, b)(d, b) \to (A, b)(q_1 d, b)
\end{array}
$$

◁

Folgende Tabelle gibt einen Überblick über die Abschlusseigenschaften der Klassen REG, DCFL, CFL, DCSL, CSL und RE. In der Vorlesung Komplexitätstheorie wird gezeigt, dass die Klasse CSL unter Komplementbildung abgeschlossen ist. Im nächsten Kapitel werden wir sehen, dass die Klasse RE nicht unter Komplementbildung abgeschlossen ist. Die übrigen Abschlusseigenschaften in folgender Tabelle werden in den Übungen bewiesen.

	Vereinigung	Schnitt	Komplement	Produkt	Sternhülle
REG	ja	ja	ja	ja	ja
DCFL	nein	nein	ja	nein	nein
CFL	ja	nein	nein	ja	ja
DCSL	ja	ja	ja	ja	ja
CSL	ja	ja	ja	ja	ja
RE	ja	ja	nein	ja	ja

5 Entscheidbare und semi-entscheidbare Sprachen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Klasse RE der rekursiv aufzählbaren Sprachen, die identisch mit den Typ-0 Sprachen sind. Wir werden eine Reihe von Charakterisierungen für diese Klasse mittels Turingmaschinen beweisen, wodurch auch die Namensgebung (rekursiv aufzählbar) verständlich wird. Eine wichtige Teilklasse von RE bildet die Klasse REC der entscheidbaren (oder rekursiven) Sprachen, in der bereits alle kontextsensitiven Sprachen enthalten sind.

Definition 123.

*a) Eine NTM M **hält** bei Eingabe x, falls alle Rechnungen von $M(x)$ eine endliche Länge haben. Falls $M(x)$ nicht hält, schreiben wir auch kurz $M(x) = \uparrow$.*

*b) Eine NTM M **entscheidet** eine Eingabe x, falls $M(x)$ hält oder eine Konfiguration mit einem Endzustand erreichen kann.*

*c) Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt **entscheidbar**, falls eine DTM M mit $L(M) = L$ existiert, die jede Eingabe $x \in \Sigma^*$ entscheidet.*

*d) Jede von einer DTM M erkannte Sprache heißt **semi-entscheidbar**.*

Bemerkung 124.

- *Die von einer DTM M akzeptierte Sprache $L(M)$ wird als semi-entscheidbar bezeichnet, da M zwar alle (positiven) Eingaben $x \in L$ entscheidet, aber möglicherweise nicht alle (negativen) Eingaben $x \in \bar{L}$.*
- *Wir werden später sehen, dass genau die Typ-0 Sprachen semi-entscheidbar sind.*

Wir wenden uns nun der Berechnung von Funktionen zu.

Definition 125. *Eine k-DTM $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$* ***berechnet*** *eine Funktion $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$, falls M bei jeder Eingabe $x \in \Sigma^*$ in einer Konfiguration*

$$K = (q, u_1, a_1, v_1, \ldots, u_k, a_k, v_k) \in Z \times (\Gamma^* \times \Gamma \times \Gamma^*)^k$$

mit $u_k = f(x)$ hält (d.h. $K_x \vdash^* K$ und K hat keine Folgekonfiguration). Hierfür sagen wir auch, M gibt bei Eingabe x das Wort $f(x)$ aus und schreiben $M(x) = f(x)$. f heißt ***Turing-berechenbar*** *(oder einfach* ***berechenbar****), falls es eine k-DTM M mit $M(x) = f(x)$ für alle $x \in \Sigma^*$ gibt.*

Um eine Funktion $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ zu berechnen, muss M also bei jeder Eingabe x den Funktionswert $f(x)$ auf das k-te Band schreiben und danach halten. Falls M nicht bei allen Eingaben hält, berechnet M keine totale, sondern eine partielle Funktion.

Definition 126.

a) Eine ***partielle Funktion*** *hat die Form $f : \Sigma^* \to \Gamma^* \cup \{\uparrow\}$.*

b) Für $f(x) = \uparrow$ sagen wir auch $f(x)$ ist ***undefiniert****.*

c) Der ***Definitionsbereich*** *(engl. domain) von f ist*

$$dom(f) = \{x \in \Sigma^* \mid f(x) \neq \uparrow\}.$$

d) Das ***Bild*** *(engl. image) von f ist*

$$img(f) = \{f(x) \mid x \in dom(f)\}.$$

e) f heißt ***total****, falls $dom(f) = \Sigma^*$ ist.*

f) Eine DTM $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ ***berechnet*** *eine partielle Funktion $f : \Sigma^* \to \Gamma^* \cup \{\uparrow\}$, falls $M(x)$ für alle $x \in dom(f)$ das Wort $f(x)$ ausgibt und für alle $x \notin dom(f)$ keine Ausgabe berechnet (d.h. $M(x) = \uparrow$).*

Aus historischen Gründen werden die berechenbaren Funktionen und die entscheidbaren Sprachen auch ***rekursiv*** (engl. *recursive*) genannt. Wir fassen die entscheidbaren Sprachen und die (partiellen) berechenbaren Funktionen in folgenden Klassen zusammen:

$$\begin{aligned}
\mathsf{REC} &= \{L(M) \mid M \text{ ist eine DTM, die jede Eingabe entscheidet}\},\\
\mathsf{FREC} &= \{f \mid f \text{ ist eine berechenbare (totale) Funktion}\},\\
\mathsf{FREC}_p &= \{f \mid f \text{ ist eine berechenbare partielle Funktion}\}.
\end{aligned}$$

Dann gilt $\mathsf{FREC} \subsetneq \mathsf{FREC}_p$ und

$$\mathsf{REG} \subsetneq \mathsf{DCFL} \subsetneq \mathsf{CFL} \subsetneq \mathsf{DCSL} \subseteq \mathsf{CSL} \subsetneq \mathsf{REC} \subsetneq \mathsf{RE}.$$

Wir wissen bereits, dass die Inklusionen $\mathsf{REG} \subsetneq \mathsf{DCFL} \subsetneq \mathsf{CFL} \subsetneq \mathsf{DCSL}$ echt sind. In diesem Abschnitt werden wir die Echtheit der Inklusion $\mathsf{REC} \subsetneq \mathsf{RE}$ zeigen. Dass CSL eine echte Teilklasse von REC ist, wird in den Übungen gezeigt.

Beispiel 127. *Bezeichne x^+ den* ***lexikografischen Nachfolger*** *von $x \in \Sigma^*$. Für $\Sigma = \{0, 1\}$ ergeben sich beispielsweise folgende Werte:*

x	ε	0	1	00	01	10	11	000	...
x^+	0	1	00	01	10	11	000	001	...

Betrachte die auf Σ^* definierten partiellen Funktionen f_1, f_2, f_3, f_4 mit

$$f_1(x) = 0, \qquad f_2(x) = x, \qquad f_3(x) = x^+ \qquad \text{und} \qquad f_4(x) = \begin{cases} \uparrow, & x = \varepsilon, \\ y, & x = y^+. \end{cases}$$

Da diese vier partiellen Funktionen alle berechenbar sind, gehören die totalen Funktionen f_1, f_2, f_3 zu FREC, während f_4 zu FREC_p gehört. ◁

Wie der nächste Satz zeigt, lässt sich jedes Entscheidungsproblem auf ein funktionales Problem zurückführen.

Satz 128.

(i) *Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann entscheidbar, wenn ihre* **charakteristische Funktion** $\chi_A : \Sigma^* \to \{0,1\}$ *berechenbar ist. Diese ist wie folgt definiert:*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

(ii) *Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann semi-entscheidbar, falls die* **partielle charakteristische Funktion** $\hat{\chi}_A : \Sigma^* \to \{1, \uparrow\}$ *berechenbar ist. Letztere ist wie folgt definiert:*

$$\hat{\chi}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ \uparrow, & x \notin A. \end{cases}$$

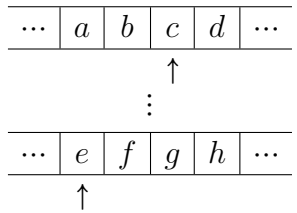
Beweis. Siehe Übungen. ■

Definition 129. *Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt* **rekursiv aufzählbar**, *falls A entweder leer oder das Bild $\mathrm{img}(f)$ einer berechenbaren Funktion $f : \Gamma^* \to \Sigma^*$ für ein beliebiges Alphabet Γ ist.*

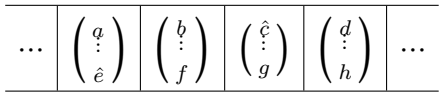
Satz 130. *Folgende Eigenschaften sind äquivalent:*

1. *A ist semi-entscheidbar (d.h. A wird von einer DTM akzeptiert),*
2. *A wird von einer 1-DTM akzeptiert,*
3. *A wird von einer 1-NTM akzeptiert,*
4. *A ist vom Typ 0,*
5. *A wird von einer NTM akzeptiert,*
6. *A ist rekursiv aufzählbar.*

Beweis. 1) ⇒ 2)**:** Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ eine k-DTM, die A akzeptiert. Wir konstruieren eine 1-DTM $M' = (Z', \Sigma, \Gamma', \delta', z_0, E)$ mit $L(M') = A$. M' simuliert M, indem sie jede Konfiguration K von M der Form



durch eine Konfiguration K' folgender Form nachbildet:



Das heißt, M' arbeitet mit dem Alphabet

$$\Gamma' = \Gamma \cup (\Gamma \cup \{\hat{a} \mid a \in \Gamma\})^k$$

und erzeugt bei Eingabe $x = x_1 \dots x_n \in \Sigma^*$ zuerst die der Startkonfiguration $K_x = (q_0, \varepsilon, x_1, x_2 \dots x_n, \varepsilon, \sqcup, \varepsilon, \dots, \varepsilon, \sqcup, \varepsilon)$ von M bei Eingabe x entsprechende Konfiguration

$$K'_x = q'_0 \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{\sqcup} \\ \vdots \\ \hat{\sqcup} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ \sqcup \\ \vdots \\ \sqcup \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} x_n \\ \sqcup \\ \vdots \\ \sqcup \end{pmatrix}.$$

Dann simuliert M' jeweils einen Schritt von M durch folgende Sequenz von Rechenschritten:

> Zuerst geht M' solange nach rechts, bis sie alle mit ˆ markierten Zeichen (z.B. $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_k$) gefunden hat. Diese Zeichen speichert M' zusammen mit dem aktuellen Zustand q von M in ihrem Zustand. Anschließend geht M' wieder nach links und realisiert dabei die durch $\delta(q, a_1, \dots, a_k)$ vorgegebene Anweisung von M.

Sobald M in einen Endzustand übergeht, wechselt M' ebenfalls in einen Endzustand und hält. Nun ist leicht zu sehen, dass $L(M') = L(M)$ ist.

2) ⇒ 3): Klar.

3) ⇒ 4) ⇒ 5): Diese beiden Implikationen lassen sich ganz ähnlich wie die Charakterisierung der Typ-1 Sprachen durch LBAs zeigen (siehe Übungen).

5) ⇒ 6): Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ eine k-NTM, die eine Sprache $A \neq \emptyset$ akzeptiert. Kodieren wir eine Konfiguration $K = (q, u_1, a_1, v_1, \ldots, u_k, a_k, v_k)$ von M durch das Wort

$$code(K) = \#q\#u_1\#a_1\#v_1\#\ldots\#u_k\#a_k\#v_k\#$$

über dem Alphabet $\tilde{\Gamma} = Z \cup \Gamma \cup \{\#\}$ und eine Rechnung $K_0 \vdash \cdots \vdash K_t$ durch $code(K_0)\ldots code(K_t)$, so lassen sich die Wörter von A durch folgende Funktion $f : \tilde{\Gamma}^* \to \Sigma^*$ aufzählen (dabei ist x_0 ein beliebiges Wort in A):

$$f(x) = \begin{cases} y, & x \text{ kodiert eine Rechnung } K_0 \vdash \cdots \vdash K_t \text{ von } M \\ & \text{mit } K_0 = K_y \text{ und } K_t \in E \times (\Gamma^* \times \Gamma \times \Gamma^*)^k \\ x_0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da f berechenbar ist, ist $A = img(f)$ rekursiv aufzählbar.

6) ⇒ 1): Sei $f : \Gamma^* \to \Sigma^*$ eine Funktion mit $A = img(f)$ und sei M eine k-DTM, die f berechnet. Dann akzeptiert folgende $(k+1)$-DTM M' die Sprache A.

> M' berechnet bei Eingabe x auf dem 2. Band der Reihe nach für alle Wörter $y \in \Gamma^*$ den Wert $f(y)$ durch Simulation von $M(y)$ und akzeptiert, sobald sie ein y mit $f(y) = x$ findet. ■

Satz 131. *A ist genau dann entscheidbar, wenn A und $\bar{A}$ semi-entscheidbar sind, d.h.* $\mathsf{REC} = \mathsf{RE} \cap \mathsf{co\text{-}RE}$.

Beweis. Sei A entscheidbar. Es ist leicht zu sehen, dass dann auch $\bar{A}$ entscheidbar ist. Also sind dann A und $\bar{A}$ auch semi-entscheidbar. Für die Rückrichtung seien $f_1, f_2 : \Gamma^* \to \Sigma^*$ Turing-berechenbare Funktionen mit $img(f_1) = A$ und $img(f_2) = \bar{A}$. Wir betrachten folgende k-DTM M, die bei Eingabe x für jedes $y \in \Gamma^*$ die beiden Werte $f_1(y)$ und $f_2(y)$ bestimmt und im Fall

- $f_1(y) = x$ in einem Endzustand
- $f_2(y) = x$ in einem Nichtendzustand

hält. Da jede Eingabe x entweder in $img(f_1) = A$ oder in $img(f_2) = \bar{A}$ enthalten ist, hält M bei allen Eingaben. ■

5.1 Unentscheidbarkeit des Halteproblems

Eine für die Programmverifikation sehr wichtige Fragestellung ist, ob ein gegebenes Programm bei allen Eingaben nach endlich vielen Rechenschritten stoppt. In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass es zur Lösung dieses Problems keinen Algorithmus gibt, nicht einmal dann, wenn wir die Eingabe fixieren. Damit Turingmaschinen die Eingabe für Turingmaschinenprogramme bilden können, müssen wir eine geeignete Kodierung von Turingmaschinen vereinbaren (diese wird auch Gödelisierung genannt).

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ eine 1-DTM mit Zustandsmenge $Z = \{q_0, \ldots, q_m\}$ (o.B.d.A. sei $E = \{q_m\}$) und Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1, \#\}$. Das Arbeitsalphabet sei $\Gamma = \{a_0, \ldots, a_l\}$, wobei wir o.B.d.A. $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = \#$, $a_3 = \sqcup$ annehmen. Dann können wir jede Anweisung der Form $q_i a_j \to q_{i'} a_{j'} D$ durch das Wort

$$\#bin(i)\#bin(j)\#bin(i')\#bin(j')\#b_D\#$$

kodieren. Dabei ist $bin(n)$ die Binärdarstellung von n und $b_N = 0$, $b_L = 1$, sowie $b_R = 10$. M lässt sich nun als ein Wort über dem Alphabet $\{0, 1, \#\}$ kodieren, indem wir die Anweisungen von M in kodierter Form auflisten. Kodieren wir die Zeichen $0, 1, \#$ binär (z.B. $0 \mapsto 00$, $1 \mapsto 11$, $\# \mapsto 10$), so gelangen wir zu einer Binärkodierung w_M von M.

Die Binärzahl w_M wird auch die ***Gödel-Nummer*** von M genannt (tatsächlich kodierte Kurt Gödel Turingmaschinen durch natürliche Zahlen und nicht durch Binärstrings). Die Maschine M_w ist durch die Angabe von w bis auf die Benennung ihrer Zustände und Arbeitszeichen eindeutig bestimmt. Ganz analog lassen sich auch DTMs mit einer beliebigen Anzahl von Bändern (sowie NTMs, Konfigurationen oder Rechnungen von TMs) kodieren.

Umgekehrt können wir jedem Binärstring $w \in \{0,1\}^*$ eine DTM M_w wie folgt zuordnen:

$$M_w = \begin{cases} M, & \text{falls eine DTM } M \text{ mit } w_M = w \text{ existiert,} \\ M_0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei ist M_0 eine beliebige DTM.

Definition 132.

*a) Das **Halteproblem** ist die Sprache*

$$\mathrm{H} = \left\{ w\#x \;\middle|\; \begin{array}{l} w, x \in \{0,1\}^* \text{ und die DTM} \\ M_w \text{ hält bei Eingabe } x \end{array} \right\}$$

*b) Das **spezielle Halteproblem** ist*

$$\mathrm{K} = \left\{ w \in \{0,1\}^* \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{die DTM } M_w \\ \text{hält bei Eingabe } w \end{array} \right\}$$

χ_{H}	x_1	x_2	x_3	$\cdots$
w_1	1	1	0	$\cdots$
w_2	0	0	1	$\cdots$
w_3	1	1	1	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

χ_{K}				
w_1	1			
w_2		0		
w_3			1	
$\vdots$				$\ddots$

Der Werteverlauf der charakteristischen Funktion χ_{K} von K stimmt also mit der Diagonalen der als Matrix dargestellten charakteristischen Funktion χ_{H} von H überein.

Satz 133. $\mathrm{K} \in \mathsf{RE} \setminus \mathsf{co\text{-}RE}$.

Beweis. Wir zeigen zuerst $\mathrm{K} \in \mathsf{RE}$. Sei w_0 die Kodierung einer DTM, die bei jeder Eingabe (sofort) hält und betrachte die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} w, & x \text{ ist Kodierung einer haltenden Berechnung einer} \\ & \text{DTM } M_w \text{ bei Eingabe } w, \\ w_0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da f berechenbar und $img(f) = \mathrm{K}$ ist, folgt $\mathrm{K} \in \mathsf{RE}$. Um zu zeigen, dass $\bar{K}$ nicht semi-entscheidbar ist, führen wir die Annahme $\bar{K} \in \mathsf{RE}$ auf einen Widerspruch.

Wir erklären zuerst die Beweisidee. Da $K \in \mathsf{RE}$ ist, gibt es in der Matrixdarstellung von χ_H eine Zeile (sprich DTM M), die mit der Diagonalen der Matrix übereinstimmt. Beispielsweise können wir für M eine DTM wählen, die die partielle charakteristische Funktion $\hat{\chi}_K$ von K berechnet. Wäre auch $\bar{K} \in \mathsf{RE}$, so würde eine DTM $\hat{M}$ existieren, so dass die zugehörige Zeile in der Matrix invers zur Zeile von M und damit zur Diagonalen ist. Beispielsweise können wir für $\hat{M}$ eine DTM wählen, die die partielle charakteristische Funktion $\hat{\chi}_{\bar{K}}$ von $\bar{K}$ berechnet. Da in keiner Matrix eine Zeile existieren kann, die invers zur Diagonalen ist, führt dies auf den gewünschten Widerspruch.

Nehmen wir also an, die Sprache

$$\bar{K} = \{w \mid M_w(w) \text{ hält nicht}\} \qquad (*)$$

wäre semi-entscheidbar. Dann existiert eine DTM $\hat{M}$, die die partielle charakteristische Funktion $\hat{\chi}_{\bar{K}}$ von $\bar{K}$ berechnet, d.h. es gilt

$$\hat{M}(w) \text{ hält} \;\Leftrightarrow\; w \in \bar{K} \qquad (**)$$

χ_{H}	x_1	x_2	x_3	$\cdots$
w_1	**1**	1	0	$\cdots$
w_2	0	**0**	1	$\cdots$
w_3	1	1	**1**	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

$\hat{w}$	0	1	0	$\cdots$

Für die Kodierung $\hat{w}$ von $\hat{M}$ folgt dann aber

$$\hat{w} \in \bar{K} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} M_{\hat{w}}(\hat{w}) \text{ hält nicht} \overset{(**)}{\Leftrightarrow} \hat{w} \notin \bar{K} \;\lightning \text{ (Widerspruch!)} \qquad \blacksquare$$

Die Methode in obigem Beweis wird als ***Diagonalisierung*** bezeichnet. Mit dieser Beweistechnik lässt sich auch eine entscheidbare Spra-

che definieren, die sich von jeder kontextsensitiven Sprache unterscheidet (siehe Übungen).

Korollar 134. $\mathsf{REC} \subsetneq \mathsf{RE}$.

Beweis. Klar da $\mathrm{K} \in \mathsf{RE} \setminus \mathsf{REC}$. ■

Definition 135.

a) *Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt auf $B \subseteq \Gamma^*$* ***reduzierbar*** *(kurz: $A \leq B$), falls eine berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ ex., so dass gilt:*
$$\forall x \in \Sigma^* : x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

b) *Eine Sprachklasse $\mathcal{C}$ heißt* ***unter $\leq$ abgeschlossen****, wenn für alle Sprachen A, B gilt:*
$$A \leq B \wedge B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \in \mathcal{C}.$$

c) *Eine Sprache A heißt* ***hart*** *für eine Sprachklasse $\mathcal{C}$ (kurz:* ***$\mathcal{C}$-hart*** *oder* ***$\mathcal{C}$-schwer****), falls jede Sprache $L \in \mathcal{C}$ auf A reduzierbar ist:*
$$\forall L \in \mathcal{C} : L \leq A.$$

d) *Eine $\mathcal{C}$-harte Sprache A, die zu $\mathcal{C}$ gehört, heißt* ***$\mathcal{C}$-vollständig****.*

Beispiel 136. *Es gilt $\mathrm{K} \leq \mathrm{H}$ mittels $f : w \mapsto w\#w$, da für alle $w \in \{0,1\}^*$ gilt:*
$$\begin{aligned} w \in K &\Leftrightarrow M_w \text{ ist eine DTM, die bei Eingabe } w \text{ hält} \\ &\Leftrightarrow w\#w \in H. \end{aligned}$$

Das Halteproblem H ist sogar RE-hart, da sich jede semi-entscheidbare Sprache A auf H reduzieren lässt. Die Reduktion $A \leq H$ leistet beispielsweise die Funktion $x \mapsto w\#x$, wobei w die Kodierung einer DTM M_w ist, die die partielle charakteristische Funktion $\hat{\chi}_A$ von A berechnet. ◁

Satz 137. *Die Klasse REC ist unter $\leq$ abgeschlossen.*

Beweis. Gelte $A \leq B$ mittels f und sei M eine DTM, die χ_B berechnet. Betrachte folgende DTM M':

- M' berechnet bei Eingabe x zuerst den Wert $f(x)$ und
- simuliert dann M bei Eingabe $f(x)$.

Wegen
$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$$
folgt
$$M'(x) = M(f(x)) = \chi_B(f(x)) = \chi_A(x).$$
Also berechnet M' die Funktion χ_A, d.h. $A \in \mathsf{REC}$. ■

Der Abschluss von RE unter $\leq$ folgt analog (siehe Übungen).

Korollar 138.

1. $A \leq B \wedge A \notin \mathsf{REC} \Rightarrow B \notin \mathsf{REC}$.
2. $A \leq B \wedge A \notin \mathsf{RE} \Rightarrow B \notin \mathsf{RE}$.

Beweis. Aus der Annahme, dass B entscheidbar (bzw. semi-entscheidbar) ist, folgt wegen $A \leq B$, dass dies auch auf A zutrifft (Widerspruch). ■

Wegen $\mathrm{K} \leq \mathrm{H}$ überträgt sich die Unentscheidbarkeit von K auf H.

Korollar 139. $\mathrm{H} \notin \mathsf{REC}$.

Definition 140. *Das* ***Halteproblem bei leerem Band*** *ist die Sprache*
$$\mathrm{H}_0 = \left\{ w \in \{0,1\}^* \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{die DTM } M_w \text{ hält} \\ \text{bei Eingabe } \varepsilon \end{array} \right\}$$

χ_{H_0}	x_1 $(= \varepsilon)$
w_1	1
w_2	1
w_3	0
$\vdots$	$\vdots$

Satz 141. H_0 *ist* RE*-vollständig.*

Beweis. Da die Funktion $w \mapsto w\#\varepsilon$ die Sprache H_0 auf H reduziert und da $H \in \mathsf{RE}$ ist, folgt $H_0 \in \mathsf{RE}$.

Für den Beweis, dass H_0 RE-hart ist sei $A \in \mathsf{RE}$ beliebig und sei w die Kodierung einer DTM, die $\hat{\chi}_A$ berechnet. Um A auf H_0 zu reduzieren, transformieren wir $x \in \{0,1\}^*$ in die Kodierung w_x einer DTM M, die zunächst ihre Eingabe durch x ersetzt und dann $M_w(x)$ simuliert. Dann gilt

$$x \in A \Leftrightarrow w_x \in H_0$$

und somit $A \leq H_0$ mittels der Reduktionsfunktion $x \mapsto w_x$. ■

Insbesondere folgt also $K \leq \mathrm{H}_0$, d.h. H_0 ist unentscheidbar.

5.2 Der Satz von Rice

Frage. *Kann man einer beliebig vorgegebenen TM ansehen, ob die von ihr berechnete Funktion (bzw. die von ihr akzeptierte Sprache) eine gewisse Eigenschaft hat? Kann man beispielsweise entscheiden, ob eine gegebene DTM eine totale Funktion berechnet?*

Antwort. *Nur dann, wenn die fragliche Eigenschaft trivial ist (d.h. keine oder jede berechenbare Funktion hat diese Eigenschaft).*

Definition 142. *Zu einer Klasse $\mathcal{F}$ von Funktionen definieren wir die Sprache*

$$L_{\mathcal{F}} = \left\{ w \in \{0,1\}^* \;\middle|\; \text{die DTM } M_w \text{ berechnet eine Funktion in } \mathcal{F} \right\}.$$

Die Eigenschaft $\mathcal{F}$ heißt ***trivial****, wenn $L_{\mathcal{F}} = \varnothing$ oder $L_{\mathcal{F}} = \{0,1\}^*$ ist.*

Der Satz von Rice besagt, dass $L_{\mathcal{F}}$ nur für triviale Eigenschaften entscheidbar ist:

$$L_{\mathcal{F}} \neq \varnothing \wedge L_{\mathcal{F}} \neq \{0,1\}^* \Rightarrow L_{\mathcal{F}} \notin \mathsf{REC}.$$

Satz 143 (Satz von Rice)**.**
Für jede nicht triviale Eigenschaft $\mathcal{F}$ ist $L_{\mathcal{F}}$ unentscheidbar.

Beweis. Wir reduzieren H_0 auf $L_{\mathcal{F}}$ (oder auf $\overline{L}_{\mathcal{F}}$). Die Idee besteht darin, für eine gegebene DTM M_w eine DTM $M_{w'}$ zu konstruieren mit

$$w \in \mathrm{H}_0 \Leftrightarrow M_{w'} \text{ berechnet (k)eine Funktion in } \mathcal{F}.$$

Hierzu lassen wir $M_{w'}$ bei Eingabe x zunächst einmal die DTM M_w bei Eingabe ε simulieren. Falls $w \notin \mathrm{H}_0$ ist, berechnet $M_{w'}$ also die überall undefinierte Funktion u mit $u(x) = \uparrow$ für alle $x \in \Sigma^*$.

Für das Folgende nehmen wir o.B.d.A. an, dass $u \notin \mathcal{F}$ ist. (Andernfalls können wir $\mathcal{F}$ durch die komplementäre Eigenschaft $\neg\mathcal{F}$ ersetzen. Wegen $L_{\neg\mathcal{F}} = \overline{L}_{\mathcal{F}}$ ist $L_{\mathcal{F}}$ genau dann unentscheidbar, wenn $L_{\neg\mathcal{F}}$ unentscheidbar ist.)

Damit die Reduktion gelingt, müssen wir nur noch dafür sorgen, dass $M_{w'}$ im Fall $w \in H_0$ eine Funktion $f \in \mathcal{F}$ berechnet.

Da $\mathcal{F}$ nicht trivial ist, gibt es eine DTM M_f, die eine partielle Funktion $f \in \mathcal{F}$ berechnet. Betrachte die Reduktionsfunktion $h : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ mit

$h(w)$ = w', wobei w' die Kodierung einer DTM ist, die bei Eingabe x zunächst die DTM $M_w(\varepsilon)$ simuliert und im Fall, dass M_w hält, mit der Simulation von $M_f(x)$ fortfährt.

Dann ist $h : w \mapsto w'$ eine totale berechenbare Funktion und es gilt

$$\begin{aligned} w \in H_0 &\Rightarrow M_{w'} \text{ berechnet } f \Rightarrow w' \in L_{\mathcal{F}}, \\ w \notin H_0 &\Rightarrow M_{w'} \text{ berechnet } u \Rightarrow w' \notin L_{\mathcal{F}}. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass h das Problem H_0 auf $L_{\mathcal{F}}$ reduziert, und da H_0 unentscheidbar ist, muss auch $L_{\mathcal{F}}$ unentscheidbar sein. ■

Beispiel 144. *Die Sprache*

$$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w(0^n) = 0^{n+1} \text{ für alle } n \geq 0\}$$

ist unentscheidbar. Dies folgt aus dem Satz von Rice, da die Eigenschaft

$$\mathcal{F} = \{f \mid \{0\}^* \subseteq dom(f) \wedge f(0^n) = 0^{n+1} \text{ für alle } n \geq 0\}$$

nicht trivial und $L = L_{\mathcal{F}}$ ist. $\mathcal{F}$ ist nicht trivial, da z.B. die berechenbare partielle Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0^{n+1}, & x = 0^n \text{ für ein } n \geq 0 \\ \uparrow, & \text{sonst} \end{cases}$$

in $\mathcal{F}$ und die konstante Funktion $g(x) = 0$ nicht in $\mathcal{F}$ enthalten ist. ◁

In den Übungen wird folgende Variante des Satzes von Rice für Spracheigenschaften bewiesen, wonach wir einer gegebenen TM nicht ansehen können, ob die von ihr akzeptierte Sprache eine gewisse Eigenschaft hat oder nicht.

Satz 145. *Für eine beliebige Sprachklasse $\mathcal{S}$ sei*

$$L_{\mathcal{S}} = \{w \in \{0,1\}^* \mid L(M_w) \in \mathcal{S}\}.$$

Dann ist $L_{\mathcal{S}}$ unentscheidbar, außer wenn $L_{\mathcal{S}} \in \{\varnothing, \{0,1\}^*\}$ ist.

5.3 Das Postsche Korrespondenzproblem

Definition 146. *Sei Σ ein beliebiges Alphabet mit $\# \notin \Sigma$. Das* ***Postsche Korrespondenzproblem*** *über Σ (kurz* ***PCP***$_\Sigma$*) ist wie folgt definiert.*

Gegeben: *k Paare $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$ von Wörtern über Σ.*

Gefragt: *Gibt es eine Folge $\alpha = (i_1, \ldots, i_n)$, $n \geq 1$, von Indizes $i_j \in \{1, \ldots, k\}$ mit $x_{i_1} \ldots x_{i_n} = y_{i_1} \ldots y_{i_n}$?*

Das ***modifizierte PCP über*** *Σ (kurz* ***MPCP***$_\Sigma$*) fragt nach einer Lösung $\alpha = (i_1, \ldots, i_n)$ mit $i_1 = 1$.*

Wir notieren eine PCP-Instanz meist in Form einer Matrix $\binom{x_1 \ldots x_k}{y_1 \ldots y_k}$ und kodieren sie durch das Wort $x_1\#y_1\# \ldots \#x_k\#y_k$.

Beispiel 147. *Die Instanz $I = \binom{x_1\ x_2\ x_3}{y_1\ y_2\ y_3} = \binom{a\ \ ab\ caa}{aca\ bc\ aa}$ besitzt wegen*

$$\begin{aligned} x_1x_3x_2x_3 &= acaaabcaa \\ y_1y_3y_2y_3 &= acaaabcaa \end{aligned}$$

die PCP-Lösung $\alpha = (1, 3, 2, 3)$, die auch eine MPCP-Lösung ist. ◁

Lemma 148. *Für jedes Alphabet Σ gilt* $\mathrm{PCP}_\Sigma \leq \mathrm{PCP}_{\{a,b\}}$.

Beweis. Sei $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_m\}$. Für ein Zeichen $a_i \in \Sigma$ sei $\hat{a}_i = 01^{i-1}$ und für ein Wort $w = w_1 \ldots w_n \in \Sigma^*$ mit $w_i \in \Sigma$ sei $\hat{w} = \hat{w}_1 \ldots \hat{w}_n$. Dann folgt $\mathrm{PCP}_\Sigma \leq \mathrm{PCP}_{\{a,b\}}$ mittels der Reduktionsfunktion

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \ldots x_k \\ y_1 \ldots y_k \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \ldots \hat{x}_k \\ \hat{y}_1 \ldots \hat{y}_k \end{pmatrix}.$$

■

f reduziert z.B. die $\mathrm{PCP}_{\{0,1,2\}}$-Instanz $I = \binom{0\ \ 01\ 200}{020\ 12\ 00}$ auf die äquivalente $\mathrm{PCP}_{\{a,b\}}$-Instanz $f(I) = \binom{a\ \ aab\ abbaa}{aabba\ ababb\ aa}$.
Im Folgenden lassen wir im Fall $\Sigma = \{a, b\}$ den Index weg und schreiben einfach PCP (bzw. MPCP).

Satz 149. MPCP $\leq$ PCP.

Beweis. Wir zeigen MPCP $\leq$ PCP$_\Sigma$ für $\Sigma = \{a, b, \langle, |, \rangle\}$. Für ein Wort $w = w_1 \dots w_n$ sei

$\overleftrightarrow{w}$	$\overleftarrow{w}$	$\overleftarrow{w}$	$\overrightarrow{w}$
$\langle w_1 \vert \dots \vert w_n \vert$	$\langle w_1 \vert \dots \vert w_n$	$\vert w_1 \vert \dots \vert w_n$	$w_1 \vert \dots \vert w_n \vert$

Wir reduzieren MPCP mittels folgender Funktion f auf PCP$_\Sigma$:

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \dots x_k \\ y_1 \dots y_k \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \overleftrightarrow{x_1} & \overrightarrow{x_1} \cdots \overrightarrow{x_k} & \rangle \\ \overleftarrow{y_1} & \overleftarrow{y_1} \cdots \overleftarrow{y_k} & \vert\rangle \end{pmatrix}.$$

Beispielsweise ist

$$f\begin{pmatrix} aa & b & bab & bb \\ aab & bb & a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle a\vert a\vert & a\vert a\vert & b\vert & b\vert a\vert b\vert & b\vert b\vert & \rangle \\ \langle a\vert a\vert b & \vert a\vert a\vert b & \vert b\vert b & \vert a & \vert b & \vert\rangle \end{pmatrix}.$$

Da jede MPCP-Lösung $\alpha = (1, i_2, \dots, i_n)$ für I auf eine PCP-Lösung $\alpha' = (1, i_2 + 1, \dots, i_n + 1, k + 2)$ für $f(I)$ führt, folgt

$$I \in \text{MPCP} \Rightarrow f(I) \in \text{PCP}_\Sigma.$$

Für die umgekehrte Implikation sei $\alpha' = (i_1, \dots, i_n)$ eine PCP-Lösung für

$$f(I) = \begin{pmatrix} \overleftrightarrow{x_1} & \overrightarrow{x_1} \cdots \overrightarrow{x_k} & \rangle \\ \overleftarrow{y_1} & \overleftarrow{y_1} \cdots \overleftarrow{y_k} & \vert\rangle \end{pmatrix}.$$

Dann muss $i_1 = 1$ sein, da $(\overleftrightarrow{x_1}, \overleftarrow{y_1})$ das einzige Paar in $f(I)$ ist, bei dem beide Komponenten mit demselben Buchstaben anfangen. Zudem muss $i_n = k + 2$ sein, da nur das Paar $(\rangle, \vert\rangle)$ mit demselben Buchstaben aufhört. Wählen wir α' von minimaler Länge, so ist $i_j \in \{2, \dots, k + 1\}$ für $j = 2, \dots, n - 1$. Dann ist aber

$$\alpha = (i_1, i_2 - 1, \dots, i_{n-1} - 1)$$

eine MPCP-Lösung für I. ∎

Satz 150. PCP *ist* RE*-vollständig und damit unentscheidbar.*

Beweis. Es ist leicht zu sehen, dass PCP $\in$ RE ist. Um zu zeigen, dass PCP RE-hart ist, sei A eine beliebige Sprache in RE und sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, E)$ eine 1-DTM mit $L(M) = A$. Wir zeigen $A \leq \text{MPCP}_{\Sigma'}$ für $\Sigma' = \Gamma \cup Z \cup \{\langle, |, \rangle\}$. Wegen $\text{MPCP}_{\Sigma'} \leq \text{PCP}$ folgt hieraus $A \leq \text{PCP}$.

> *Idee:* Transformiere eine Eingabe $w \in \Sigma^*$ in eine Instanz $g(w) = \binom{x_1 \dots x_k}{y_1 \dots y_k}$, so dass $\alpha = (i_1, \dots, i_n)$ genau dann eine MPCP-Lösung für $g(w)$ ist, wenn das zugehörige *Lösungswort* $x_{i_1} \dots x_{i_n} = y_{i_1} \dots y_{i_n}$ eine akzeptierende Rechnung von $M(w)$ kodiert.

Um dies zu erreichen, bilden wir $g(w)$ aus folgenden Wortpaaren:

1. $(\langle, \langle\vert z_0 w)$, „Startregel“
2. für alle $a \in \Gamma \cup \{\vert\}$: (a, a), „Kopierregeln“
3. für alle $a, a', b \in \Gamma$, $z, z' \in Z$: „Überführungsregeln“
   $(za, z'a')$, falls $\delta(z, a) = (z', a', N)$,
   $(za, a'z')$, falls $\delta(z, a) = (z', a', R)$,
   $(bza, z'ba')$, falls $\delta(z, a) = (z', a', L)$,
   $(\vert za, \vert z' \sqcup a')$, falls $\delta(z, a) = (z', a', L)$,
   $(bz\vert, z'ba'\vert)$, falls $\delta(z, \sqcup) = (z', a', L)$,
   $(z\vert, z'a'\vert)$, falls $\delta(z, \sqcup) = (z', a', N)$,
   $(z\vert, a'z'\vert)$, falls $\delta(z, \sqcup) = (z', a', R)$,
4. für alle $e \in E$, $a \in \Gamma$: (ae, e), (ea, e), „Löschregeln“
5. sowie für alle $e \in E$: $(e\vert\rangle, \rangle)$. „Abschlussregeln“

Ist nun

$$K_0 = z_0 w \vdash K_1 \vdash \dots \vdash K_t = uev$$

eine akzeptierende Rechnung von $M(w)$ mit $e \in E$, so lässt sich aus dieser leicht eine MPCP-Lösung α mit dem Lösungswort

$$\langle\vert K_0 \vert K_1 \vert \dots \vert K_t \vert K_{t+1} \vert \dots \vert K_{t+\vert K_t\vert-1} \vert\rangle$$

gewinnen, wobei K_{t+i} aus K_t durch Löschen von i Zeichen in der Nachbarschaft von e entsteht.

Zudem ist leicht zu sehen, dass auch umgekehrt jedes Lösungswort $x_{i_1} \dots x_{i_n} = y_{i_1} \dots y_{i_n}$ eine akzeptierende Rechnung von M bei Eingabe w beinhaltet. Somit gilt

$$w \in L(M) \Leftrightarrow g(w) \in \mathrm{MPCP}_{\Sigma'},$$

und da g offensichtlich berechenbar ist, folgt $A \leq \mathrm{MPCP}_{\Sigma'}$.

Der Satz lässt sich alternativ auch unter Verwendung einer Typ-0 Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ für A beweisen. Sei $\Gamma = V \cup \Sigma \cup \{\langle, |, \rangle\}$. Dann können wir eine Eingabe $w \in \Sigma^*$ in eine MPCP_Γ-Instanz $f(w) = \binom{x_1 \dots x_k}{y_1 \dots y_k}$ transformieren, so dass $\alpha = (i_1, \dots, i_n)$ genau dann eine Lösung für $f(w)$ ist, wenn das zugehörige *Lösungswort* $x_{i_1} \dots x_{i_n} = y_{i_1} \dots y_{i_n}$ eine Ableitung von w in G kodiert. Dies erreichen wir, indem wir $f(w)$ aus folgenden Wortpaaren bilden:

1. $(\langle, \langle | S)$, „Startregel“
2. für jede Regel $l \to r$ in P: (l, r), „Ableitungsregeln“
3. für alle $a \in V \cup \Sigma \cup \{|\}$: (a, a), „Kopierregeln“
4. sowie das Paar $(w | \rangle, \rangle)$ „Abschlussregel“

Nun lässt sich leicht aus einer Ableitung $S = \alpha_0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \alpha_m = w$ von w in G eine MPCP-Lösung mit dem Lösungswort

$$\langle | \alpha_0 | \alpha_1 | \dots | \alpha_m | \rangle$$

angeben. Zudem lässt sich auch umgekehrt aus jeder MPCP-Lösung eine Ableitung von w in G gewinnen, womit

$$w \in L(M) \Leftrightarrow f(w) \in \mathrm{MPCP}_\Gamma$$

gezeigt ist. ■

Beispiel 151. *Betrachte die 1-DTM* $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ *mit* $Z = \{q_0, \dots q_4\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a, b, A, B, \sqcup\}$, $E = \{q_4\}$ *und den Anweisungen*

$$\begin{array}{llllll}
\delta\colon & q_0 a \to q_1 AR & (1) & q_1 a \to q_1 aR & (2) & q_1 B \to q_1 BR \ (3) \\
& q_1 b \to q_2 BL & (4) & q_2 a \to q_2 aL & (5) & q_2 B \to q_2 BL \ (6) \\
& q_2 A \to q_0 AR & (7) & q_0 B \to q_3 BR & (8) & q_3 B \to q_3 BR \ (9) \\
& q_3 \sqcup \to q_4 \sqcup N & (10) & & &
\end{array}$$

Dann enthält die MPCP-Instanz $g(ab)$ *für* $u \in \Gamma$ *die Wortpaare*

Startregel	*Kopierregeln*	*Löschregeln*	*Abschlussregel*
$(\langle, \langle | q_0 ab)$	(u, u), $(\|, \|)$	$(q_4 u, q_4), (u q_4, q_4)$	$(q_4 | \rangle, \rangle)$

sowie folgende Überführungsregeln:

Anweisung		*zugehörige Überführungsregeln*
$q_0 a \to q_1 AR$	*(1)*	$(q_0 a, A q_1)$
$q_1 a \to q_1 aR$	*(2)*	$(q_1 a, a q_1)$
$q_1 B \to q_1 BR$	*(3)*	$(q_1 B, B q_1)$
$q_1 b \to q_2 BL$	*(4)*	$(u q_1 b, q_2 u B)$, $(\| q_1 b, \| q_2 \sqcup B)$
$q_2 a \to q_2 aL$	*(5)*	$(u q_2 a, q_2 u a)$, $(\| q_2 a, \| q_2 \sqcup a)$
$q_2 B \to q_2 BL$	*(6)*	$(u q_2 B, q_2 u B)$, $(\| q_2 B, \| q_2 \sqcup B)$
$q_2 A \to q_0 AR$	*(7)*	$(q_2 A, A q_0)$
$q_0 B \to q_3 BR$	*(8)*	$(q_0 B, B q_3)$
$q_3 B \to q_3 BR$	*(9)*	$(q_3 B, B q_3)$
$q_3 \sqcup \to q_4 \sqcup N$	*(10)*	$(q_3 \sqcup, q_4 \sqcup)$, $(q_3 |, q_4 \sqcup |)$

Der akzeptierenden Rechnung

$$q_0 ab \underset{(1)}{\vdash} A q_1 b \underset{(4)}{\vdash} q_2 AB \underset{(7)}{\vdash} A q_0 B \underset{(8)}{\vdash} AB q_3 \sqcup \underset{(10)}{\vdash} AB q_4 \sqcup$$

von $M(ab)$ entspricht dann das MPCP-Lösungswort

$$\langle\,|\,q_0ab\,|\,Aq_1b\,|\,q_2AB\,|\,Aq_0B\,|\,ABq_3\,|\,ABq_4\sqcup\,|\,Aq_4\sqcup\,|\,q_4\sqcup\,|\,q_4\,|\,\rangle$$
$$\langle\,|\,q_0ab\,|\,Aq_1b\,|\,q_2AB\,|\,Aq_0B\,|\,ABq_3\,|\,ABq_4\sqcup\,|\,Aq_4\sqcup\,|\,q_4\sqcup\,|\,q_4\,|\,\rangle$$

Betrachte die Grammatik $G = (\{S\}, \{a,b\}, \{S \to aSbS, \varepsilon\}, S)$ und die Ableitung

$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}bS \Rightarrow aaSb\underline{S}bS \Rightarrow aa\underline{S}bbS \Rightarrow aabb\underline{S} \Rightarrow aabb$$

Die MPCP-Instanz $f(aabb)$ enthält dann für $u \in \{S, a, b, |\}$ die Paare

Startregel	*Ableitungsregeln*	*Kopierregeln*	*Abschlussregel*
$(\langle, \langle\,\|\,S)$	$(S, aSbS), (S, \varepsilon)$	(u, u)	$(aabb\,\|\,\rangle, \rangle)$

Obiger Ableitung entspricht dann folgendes Lösungswort für $f(aabb)$:

$$\langle\,|\,S\,|\,aSbS\,|\,aaSbSbS\,|\,aaSbbS\,|\,aabbS\,|\,aabb\,|\,\rangle$$
$$\langle\,|\,S\,|\,aSbS\,|\,aaSbSbS\,|\,aaSbbS\,|\,aabbS\,|\,aabb\,|\,\rangle$$

Das kürzeste MPCP-Lösungswort für $f(aabb)$ ist

$$\langle\,|\,S\,|\,aSbS\,|\,aaSbSb\,|\,aabb\,|\,\rangle$$
$$\langle\,|\,S\,|\,aSbS\,|\,aaSbSb\,|\,aabb\,|\,\rangle$$

Dieses entspricht der „parallelisierten“ Ableitung

$$\underline{S} \Rightarrow a\underline{S}b\underline{S} \Rightarrow^2 aa\underline{S}b\underline{S}b \Rightarrow^2 aabb$$

◁

5.4 Weitere Unentscheidbarkeitsresultate

In diesem Abschnitt leiten wir aus der Unentscheidbarkeit des Postschen Korrespondenzproblems eine Reihe von weiteren Unentscheidbarkeitsresultaten her. Wir zeigen zuerst, dass das Schnittproblem für kontextfreie Grammatiken unentscheidbar ist.

Schnittproblem für kontextfreie Grammatiken

Gegeben: Zwei kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2.
Gefragt: Ist $L(G_1) \cap L(G_2) \neq \varnothing$?

Satz 152. *Das Schnittproblem für kontextfreie Grammatiken ist* RE-*vollständig.*

Beweis. Es ist leicht zu sehen, dass das Problem semi-entscheidbar ist. Um PCP auf dieses Problem zu reduzieren, betrachten wir für eine Folge $s = (x_1, \ldots, x_k)$ von Strings $x_i \in \{a,b\}^*$ die Sprache

$$L_s = \{i_n \ldots i_1 x_{i_1} \cdots x_{i_n} \mid n \geq 1, 1 \leq i_1, \ldots, i_n \leq k\}.$$

L_s wird von der Grammatik $G_s = (\{S\}, \{a, b, 1, \ldots, k\}, P_s, S)$ erzeugt mit

$$P_s\colon S \to 1Sx_1, \ldots, kSx_k, 1x_1, \ldots, kx_k$$

Zu einer PCP-Instanz $I = \binom{x_1 \ldots x_k}{y_1 \ldots y_k}$ bilden wir das Paar (G_s, G_t), wobei $s = (x_1, \ldots, x_k)$ und $t = (y_1, \ldots, y_k)$ ist. Dann ist $L(G_s) \cap L(G_t)$ die Sprache

$$\{i_n \ldots i_1 x_{i_1} \ldots x_{i_n} \mid 1 \leq n,\ x_{i_1} \ldots x_{i_n} = y_{i_1} \ldots y_{i_n}\}.$$

Folglich ist $\alpha = (i_1, \ldots, i_n)$ genau dann eine Lösung für I, wenn $i_n \ldots i_1 x_{i_1} \ldots x_{i_n} \in L(G_s) \cap L(G_t)$ ist. Also vermittelt $f : I \mapsto (G_s, G_t)$ eine Reduktion von PCP auf das Schnittproblem für CFL. ■

Beispiel 153. *Die PCP-Instanz*

$$I = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & aab & abbaa \\ aabba & ababb & aa \end{pmatrix}$$

wird auf das Grammatikpaar (G_s, G_t) *mit folgenden Regeln reduziert:*

$$P_s\colon S \to 1Sa,\ 2Saab,\ 3Sabbaa,\ 1a,\ 2aab,\ 3abbaa,$$
$$P_t\colon S \to 1Saabba,\ 2Sababb,\ 3Saa,\ 1aabba,\ 2ababb,\ 3aa.$$

Der PCP-Lösung $\alpha = (1,3,2,3)$ *entspricht dann das Wort*

$$\begin{aligned} 3231x_1x_3x_2x_3 &= 3231aabbaaaababbaa \\ &= 3231aabbaaaababbaa = 3231y_1y_3y_2y_3 \end{aligned}$$

in $L(G_s) \cap L(G_t)$. ◁

Des weiteren erhalten wir die Unentscheidbarkeit des Schnitt- und des Inklusionsproblems für DPDAs.

Inklusionsproblem für DPDAs

Gegeben: Zwei DPDAs M_1 und M_2.
Gefragt: Ist $L(M_1) \subseteq L(M_2)$?

Korollar 154.

(i) Das Schnittproblem für DPDAs ist RE*-vollständig.*

(ii) Das Inklusionsproblem für DPDAs ist co-RE*-vollständig.*

Korollar 154 wird in den Übungen bewiesen. Die Idee dabei ist, die kontextfreie Grammatik G_s im Beweis von Satz 152 in DPDAs M_s und $\overline{M}_s$ zu überführen mit $L(M_s) = L(G_s)$ und $L(\overline{M}_s) = \overline{L(G_s)}$.

Schließlich ergeben sich für CFL noch folgende Unentscheidbarkeitsresultate.

Korollar 155. *Für kontextfreie Grammatiken sind folgende Fragestellungen unentscheidbar:*

(i) Ist $L(G) = \Sigma^*$*?* *(Ausschöpfungsproblem)*

(ii) Ist $L(G_1) = L(G_2)$*?* *(Äquivalenzproblem)*

(iii) Ist G *mehrdeutig?* *(Mehrdeutigkeitsproblem)*

Beweis.

(i) Wir reduzieren das Komplement von PCP auf das Ausschöpfungsproblem für CFL. Es gilt

$$I \notin \mathrm{PCP} \Leftrightarrow L_s \cap L_t = \varnothing \Leftrightarrow \overline{L}_s \cup \overline{L}_t = \Sigma^*,$$

wobei L_s und L_t die im Beweis von Satz 152 definierten Sprachen sind. Diese sind sogar in DCFL und in den Übungen wird gezeigt, dass sich DLBAs (und damit auch kontextfreie Grammatiken) für $\overline{L}_s$ und $\overline{L}_t$ aus I berechnen lassen. Daher vermittelt die Funktion $f : I \mapsto G$, wobei G eine kontextfreie Grammatik mit

$$L(G) = \overline{L}_s \cup \overline{L}_t$$

ist, die gewünschte Reduktion.

(ii) Wir zeigen, dass das Äquivalenzproblem für CFL ebenfalls co-RE-vollständig ist, indem wir das Ausschöpfungsproblem für CFL darauf reduzieren. Dies leistet beispielsweise die Funktion

$$f : G \mapsto (G, G_{all}),$$

wobei G_{all} eine kontextfreie Grammatik mit $L(G_{all}) = \Sigma^*$ ist.

(iii) Schließlich zeigen wir, dass das Mehrdeutigkeitsproblem RE-vollständig ist, indem wir PCP darauf reduzieren. Betrachte die Funktion $f : \binom{x_1 \dots x_k}{y_1 \dots y_k} \mapsto G$ mit

$$G = (\{S, A, B\}, \{a, b, 1, \dots, k\}, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to A, S \to B\}, S)$$

und den Regeln

$$P_1\colon A \to 1Ax_1, \dots, kAx_k, 1x_1, \dots, kx_k,$$
$$P_2\colon B \to 1By_1, \dots, kBy_k, 1y_1, \dots, ky_k.$$

Da alle von A oder B ausgehenden Ableitungen eindeutig sind, ist G genau dann mehrdeutig, wenn es ein Wort $w \in L(G)$ gibt mit

$$S \Rightarrow A \Rightarrow^* w \quad \text{und} \quad S \Rightarrow B \Rightarrow^* w.$$

Wie wir im Beweis der Unentscheidbarkeit des Schnittproblems für CFL gesehen haben, ist dies genau dann der Fall, wenn die PCP-Instanz $I = \binom{x_1 \dots x_k}{y_1 \dots y_k}$ eine PCP-Lösung hat.

■

Als weitere Folgerung erhalten wir die Unentscheidbarkeit des Leerheitsproblems für DLBAs.

Leerheitsproblem für DLBAs

Gegeben: Ein DLBA M.
Gefragt: Ist $L(M) = \varnothing$?

Satz 156. *Das Leerheitsproblem für DLBAs ist* co-RE*-vollständig.*

Beweis. Wir reduzieren das Ausschöpfungsproblem für CFL auf das Leerheitsproblem für DLBAs. Eine kontextfreie Grammatik G lässt sich wie folgt in einen DLBA M mit $L(\overline{M}) = \overline{L(G)}$ überführen (siehe Übungen):

Bestimme zunächst einen DLBA M mit $L(M) = L(G)$.
Konstruiere daraus einen DLBA $\overline{M}$ mit $L(\overline{M}) = \overline{L(M)}$.

Dann gilt $L(G) = \Sigma^* \Leftrightarrow L(\overline{M}) = \varnothing$, d.h. die Funktion $f : G \mapsto \overline{M}$ berechnet die gewünschte Reduktion. ■

Dagegen ist es nicht schwer, für eine kontextfreie Grammatik G zu entscheiden, ob mindestens ein Wort in G ableitbar ist. Ebenso ist es möglich, für eine kontextsensitive Grammatik G und ein Wort x zu entscheiden, ob x in G ableitbar ist.

Satz 157.

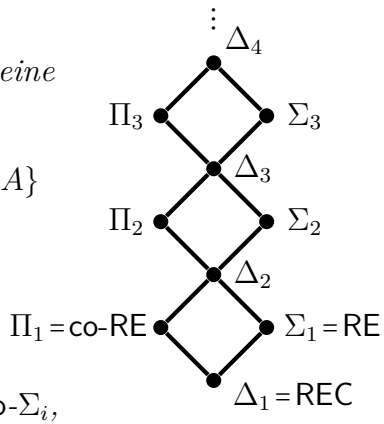
(i) Das Leerheitsproblem für kfr. Grammatiken ist entscheidbar.

(ii) Das Wortproblem für kontextsensitive Grammatiken ist entscheidbar.

5.5 Die arithmetische Hierarchie

Mit Hilfe der arithmetischen Hierarchie lassen sich unentscheidbare Probleme entsprechend dem Grad ihrer Unentscheidbarkeit einordnen.

Definition 158.



a) Sei $A \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache und $\mathcal{K}$ eine Sprachklasse. Dann ist

$$\exists A = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \{0,1\}^* : x\#y \in A\}$$

und

$$\exists \mathcal{K} = \mathcal{K} \cup \{\exists A \mid A \in \mathcal{K}\}.$$

b) Weiter sei $\Sigma_0 = \text{REC}$, sowie $\Pi_i = \text{co-}\Sigma_i$, $\Delta_i = \Sigma_i \cap \Pi_i$ und $\Sigma_{i+1} = \exists \Pi_i$ für $i \geq 0$.

c) Die Sprachklassen $\Sigma_i, \Pi_i, \Delta_i$, $i \geq 0$, bilden die Stufen der ***arithmetischen Hierarchie****.*

Proposition 159.

(i) $\Sigma_1 = \text{RE}$, $\Pi_1 = \text{co-RE}$.

(ii) $\Delta_0 = \Sigma_0 = \Pi_0 = \Delta_1 = \text{REC}$.

(iii) $\Sigma_i \cup \Pi_i \subseteq \Delta_{i+1}$ *für* $i \geq 0$.

Beweis.

(i) Wir zeigen zuerst die Inklusion $\Sigma_1 \subseteq \text{RE}$. Sei $A \in \Sigma_1$ und sei $A = \exists B$ für eine Sprache $B \in \text{REC}$. Dann wird A von einer DTM akzeptiert, die bei Eingabe x systematisch nach einem String $y \in \{0,1\}^*$ mit $x\#y \in B$ sucht. Folglich ist $A \in \text{RE}$.

Für die umgekehrte Inklusion sei $A \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache in RE und sei $A = L(M)$ für eine DTM M. Dann ist $A = \exists B$ für die Sprache $B = \{x\#y \mid y$ kodiert eine akz. Rechnung von $M(x)\}$. Da

B entscheidbar ist, folgt $A \in \exists\mathsf{REC}$. Die Gleichheit $\Pi_1 = \mathsf{co\text{-}RE}$ folgt wegen $\Pi_1 = \mathsf{co}\text{-}\Sigma_1$ direkt aus $\Sigma_1 = \mathsf{RE}$.

(ii) Die Gleichheiten $\Delta_0 = \Sigma_0 = \Pi_0 = \Delta_1 = \mathsf{REC}$ ergeben sich unmittelbar aus $\mathsf{REC} = \mathsf{co\text{-}REC}$ und $\mathsf{REC} = \mathsf{RE} \cap \mathsf{co\text{-}RE}$.

(iii) Die Inklusion $\Sigma_i \subseteq \Pi_{i+1}$ ist klar, da $\Sigma_i \subseteq \exists\Sigma_i = \Pi_{i+1}$ ist.

Die Inklusionen $\Sigma_i \subseteq \Sigma_{i+1}$ lassen sich induktiv wie folgt zeigen.

$i = 0$**:** Es gilt $\Sigma_0 = \mathsf{REC} \subseteq \mathsf{RE} = \Sigma_1$.

$i \rightsquigarrow i+1$**:** Nach IV gilt $\Sigma_{i-1} \subseteq \Sigma_i$. Folglich ist $\Pi_{i-1} \subseteq \Pi_i$, was wegen der Monotonie des $\exists$-Operators (d.h. $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}' \Rightarrow \exists\mathcal{K} \subseteq \exists\mathcal{K}'$) wiederum $\Sigma_i = \exists\Pi_{i-1} \subseteq \exists\Pi_i = \Sigma_{i+1}$ impliziert.

Durch Übergang zu den co-Klassen erhalten wir auch die Inklusionen $\Pi_i \subseteq \Pi_{i+1}$ und $\Pi_i \subseteq \Sigma_{i+1}$.

■

Mittels Diagonalisierung kann man zeigen, dass die Klassen Σ_i und Π_i für $i \geq 1$ verschieden sind. Dies impliziert, dass die Inklusionen $\Sigma_i \subseteq \Delta_{i+1} \subseteq \Sigma_{i+1}$ und $\Pi_i \subseteq \Delta_{i+1} \subseteq \Pi_{i+1}$ für alle $i \geq 1$ echt sind.

Die betrachteten Entscheidungsprobleme für die verschiedenen Stufen der Chomsky-Hierarchie lassen sich nun wie folgt in die arithmetische Hierarchie einordnen.

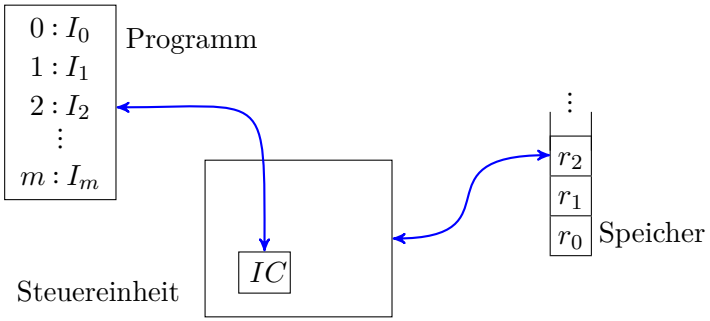
	Wort-problem $x \in L$?	Leerheits-problem $L = \varnothing$?	Aus-schöpfung $L = \Sigma^*$?	Äquivalenz-problem $L_1 = L_2$?	Inklusions-problem $L_1 \subseteq L_2$	Schnitt-problem $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$?
REG	REC	REC	REC	REC	REC	REC
DCFL	REC	REC	REC	REC[a]	co -RE	RE
CFL	REC	REC	co -RE	co -RE	co -RE	RE
DCSL	REC	co -RE	co -RE	co -RE	co -RE	RE
CSL	REC	co -RE	co -RE	co -RE	co -RE	RE
RE	RE	co -RE	Π_2	Π_2	Π_2	RE

[a] Bewiesen in 1997 von Géraud Sénizergues (Univ. Bordeaux).

Tatsächlich sind alle betrachteten Entscheidungsprobleme sogar vollständig für die angegebenen Sprachklassen.

5.6 GOTO-Berechenbarkeit

In diesem Abschnitt führen wir das Rechenmodell der Registermaschine (*random access machine, RAM*) ein und zeigen, dass es die gleiche Rechenstärke wie das Modell der Turingmaschine besitzt. Das Modell der RAM ist an die realen Rechenmaschinen angelehnt, die über einen Prozessor mit einem vorgegebenen Befehlssatz verfügen.



Die Registermaschine

- führt ein Programm $P = I_0, \ldots, I_m$ aus, das aus einer endlichen Folge von Befehlen (*instructions*) I_i besteht,
- hat einen Befehlszähler (*instruction counter*) IC, der die Nummer des nächsten Befehls angibt (zu Beginn ist $IC = 0$),
- verfügt über einen frei adressierbaren Speicher (*random access memory*) mit unendlich vielen Speicherzellen (Registern) r_i, die beliebig große natürliche Zahlen aufnehmen können.

Auf Registermaschinen lassen sich ***GOTO-Programme*** ausführen, die über folgenden Befehlssatz verfügen ($i, j, c \in \mathbb{N}$):

Befehl	Semantik
$r_i := r_j + c$	setzt Register r_i auf den Wert $r_j + c$
$r_i := r_j \dot{-} c$	setzt Register r_i auf $\max(0, r_j - c)$
GOTO j	setzt den Befehlszähler IC auf j
IF $r_i = c$ **THEN GOTO** j	setzt IC auf j, falls $r_i = c$ ist
HALT	beendet die Programmausführung

Falls nichts anderes angegeben ist, wird zudem IC auf den Wert $IC+1$ gesetzt.

Eine partielle Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \cup \{\uparrow\}$ heißt ***GOTO-berechenbar***, falls es ein GOTO-Programm $P = (I_0, \ldots, I_m)$ mit folgender Eigenschaft gibt:

Wird P auf einer RAM mit den Werten $r_i = n_i$ für $i = 1, \ldots, k$, sowie $IC = 0$ und $r_i = 0$ für $i = 0, k+1, k+2, \ldots$ gestartet, so gilt:

- P hält genau dann, wenn $(n_1, \ldots, n_k) \in dom(f)$ ist, und
- falls P hält, hat r_0 nach Beendigung von P den Wert $f(n_1, \ldots, n_k)$.

Beispiel 160. *Folgendes GOTO-Programm berechnet die Funktion $f(x, y) = xy$:*

```
0  IF r1 = 0 THEN GOTO 4
1  r1 := r1 ∸ 1
2  r0 := r0 + r2
3  GOTO 0
4  HALT
```

Dabei ist der Befehl $r_0 := r_0 + r_2$ in Zeile 2 zwar unzulässig. Wir können ihn jedoch durch den Befehl ***GOTO*** *5 ersetzen und folgende Befehle hinzufügen.*

```
5  r3 := r2
6  IF r3 = 0 THEN GOTO 3
7  r3 := r3 ∸ 1
8  r0 := r0 + 1
9  GOTO 6
```

◁

Um mit einem GOTO-Programm auch Wortfunktionen berechnen zu können, müssen wir Wörter numerisch repräsentieren.

Sei $\Sigma = \{a_0, \ldots, a_{m-1}\}$ ein Alphabet. Dann können wir jedes Wort $x = a_{i_1} \ldots a_{i_n} \in \Sigma^*$ durch eine natürliche Zahl $num_\Sigma(w)$ kodieren:

$$num_\Sigma(x) = \sum_{j=0}^{n-1} m^j + \sum_{j=1}^{n} i_j m^{n-j} = \frac{m^n - 1}{m - 1} + (i_1 \ldots i_n)_m.$$

Da die Abbildung $num_\Sigma : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ bijektiv ist, können wir umgekehrt jede natürliche Zahl n durch das Wort $str_\Sigma(n) = num_\Sigma^{-1}(n)$ kodieren.

Für das Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ erhalten wir beispielsweise folgende Kodierung:

w	ε	a	b	c	aa	ab	ac	ba	bb	bc	ca	cb	cc	aaa	$\ldots$
$num_\Sigma(w)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\ldots$

Ist $\Sigma = \{0, 1\}$, so lassen wir den Index weg und schreiben einfach num und str anstelle von num_Σ und str_Σ. Zudem erweitern wir die Kodierungsfunktion $str : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ zu einer Kodierungsfunktion $str_k : \mathbb{N}^k \to \{0, 1, \#\}$ wie folgt:

$$str_k(n_1, \ldots, n_k) = str(n_1)\# \ldots \#str(n_k).$$

Nun können wir eine partielle Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \cup \{\uparrow\}$ durch folgende partielle Wortfunktion $\hat{f} : \{0, 1, \#\}^* \to \{0, 1\}^* \cup \{\uparrow\}$ repräsentieren:

$$\hat{f}(w) = \begin{cases} str(n), & w = str_k(n_1, \ldots, n_k) \text{ und } f(n_1, \ldots, n_k) = n \in \mathbb{N}, \\ \uparrow, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist klar, dass f durch $\hat{f}$ eindeutig bestimmt ist. Wir nennen f die *numerische Repräsentation* von $\hat{f}$.

Satz 161. *Sei f die numerische Repräsentation einer partiellen Funktion $\hat{f}$. Dann ist f genau dann GOTO-berechenbar, wenn $\hat{f}$ berechenbar ist.*

Beweis. Wir zeigen zuerst die Simulation eines GOTO-Programms durch eine DTM. Sei $\hat{f}$ eine partielle Funktion, deren numerische Repräsentation f von einem GOTO-Programm P auf einer RAM R berechnet wird. Dann existiert eine Zahl k', so dass P nur Register r_i mit $i \leq k'$ benutzt. Daher lässt sich eine Konfiguration von R durch Angabe der Inhalte des Befehlszählers IC und der Register $r_0, \ldots, r_{k'}$ beschreiben. Wir konstruieren eine $(k'+2)$-DTM M, die

- den Inhalt von IC in ihrem Zustand,
- die Registerwerte $r_1, \ldots, r_{k'}$ auf den Bändern $1, \ldots, k'$ und
- den Wert von r_0 auf dem Ausgabeband $k'+2$ speichert.

Ein Registerwert r_i wird hierbei in der Form $str(r_i)$ gespeichert. Band $k'+1$ wird zur Ausführung von Hilfsberechnungen benutzt.

Die Aufgabe von M ist es, bei Eingabe $w = str_k(n_1, \ldots, n_k)$ das Wort $str(f(n_1, \ldots, n_k))$ auszugeben, wenn $(n_1, \ldots, n_k) \in dom(f)$ ist, und andernfalls nicht zu halten.

Zuerst kopiert M die Teilwörter $str(n_i)$ für $i = 2, \ldots, k$ auf das i-te Band und löscht auf dem 1. Band alle Eingabezeichen bis auf $str(n_1)$. Da das leere Wort den Wert $num(\varepsilon) = 0$ kodiert, sind nun auf den Bändern $1, \ldots, k'$ und auf Band $k'+2$ die der Startkonfiguration von R bei Eingabe $(n_1, \ldots, n_k)$ entsprechenden Registerinhalte gespeichert. Danach führt M das Programm P Befehl für Befehl aus.

Es ist leicht zu sehen, dass sich jeder Befehl I in P durch eine Folge von Anweisungen realisieren lässt, die die auf den Bändern gespeicherten Registerinhalte bzw. den im Zustand von M gespeicherten Wert von IC entsprechend modifizieren. Sobald P stoppt, hält auch M und gibt das Wort $str(r_0) = str(f(n_1, \ldots, n_k))$ aus.

Nun betrachten wir die Simulation einer DTM durch ein GOTO-Programm. Sei $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \cup \{\uparrow\}$ eine partielle Funktion und sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ eine DTM mit Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1, \#\}$, die die zugehörige Wortfunktion $\hat{f} : \Sigma^* \to \{0,1\}^* \cup \{\uparrow\}$ berechnet. M gibt also bei Eingabe $str_k(n_1, \ldots, n_k)$ das Wort $str(f(n_1, \ldots, n_k))$ aus, falls $f(n_1, \ldots, n_k)$ definiert ist, und hält andernfalls nicht.

Wir konstruieren ein GOTO-Programm P, das bei Eingabe $(n_1, \ldots, n_k)$ die DTM M bei Eingabe $w = str_k(n_1, \ldots, n_k)$ simuliert und im Fall, dass $M(w)$ hält, den Wert $num(M(w)) = f(n_1, \ldots, n_k)$ berechnet. Wir können annehmen, dass M eine 1-DTM ist. Sei $Z = \{q_0, \ldots, q_r\}$ und $\Gamma = \{a_0, \ldots, a_{m-1}\}$, wobei wir annehmen, dass $a_0 = \sqcup$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ und $a_3 = \#$ ist.

Eine Konfiguration $K = uq_iv$ von M wird wie folgt in den Registern r_0, r_1, r_2 gespeichert. Sei $u = a_{i_1} \ldots a_{i_n}$ und $v = a_{j_1} \ldots a_{j_{n'}}$.

- $r_0 = (i_1 \ldots i_n)_m$,
- $r_1 = i$,
- $r_2 = (j_{n'} \ldots j_1)_m$.

P besteht aus 3 Programmteilen $P = P_1, P_2, P_3$. P_1 berechnet in Register r_2 die Zahl $(j_n \ldots j_1)_m$, wobei $(j_1, \ldots, j_n)$ die Indexfolge der Zeichen von $str_k(n_1, \ldots, n_k) = a_{j_1} \ldots a_{j_n}$ ist. Die übrigen Register setzt P_1 auf den Wert 0. P_1 stellt also die Startkonfiguration $K_w = q_0w$ von M bei Eingabe $w = str_k(n_1, \ldots, n_k)$ in den Registern r_0, r_1, r_2 her.

Anschließend führt P_2 eine schrittweise Simulation von M aus. Hierzu überführt P_2 solange die in r_0, r_1, r_2 gespeicherte Konfiguration von M in die zugehörige Nachfolgekonfiguration, bis M hält. Das Programmstück P_2 hat die Form

M_2 $r_3 := r_2$ MOD m
  IF $r_1 = 0 \wedge r_3 = 0$ **THEN GOTO** $M_{0,0}$
  $\vdots$
  IF $r_1 = r \wedge r_3 = m-1$ **THEN GOTO** $M_{r,m-1}$

Die Befehle ab Position $M_{i,j}$ hängen von $\delta(q_i, a_j)$ ab. Wir betrachten exemplarisch den Fall $\delta(q_i, a_j) = \{(q_{i'}, a_{j'}, L)\}$:

$M_{i,j}$ $r_1 := i'$

$r_2 := r_2$ DIV m
$r_2 := r_2 m + j'$
$r_2 := r_2 m + (r_0$ MOD $m)$
$r_0 := r_0$ DIV m
GOTO M_2

Die hierbei benutzten Makrobefehle $r_3 := r_2$ MOD m, $r_2 := r_2$ DIV m etc. können leicht durch GOTO-Programmstücke ersetzt werden (siehe Übungen).

Im Fall $\delta(q_i, a_j) = \varnothing$ erfolgt ein Sprung an den Beginn von P_3. P_3 transformiert den Inhalt $r_0 = (j_1 \dots j_n)_m$ von Register r_0 in die Zahl $num(a_{j_1} \dots a_{j_n})$ und hält. ■

5.7 WHILE- und LOOP-Berechenbarkeit

Die Syntax von ***WHILE-Programmen*** ist induktiv wie folgt definiert ($i, j, c \in \mathbb{N}$):

- Jede Wertzuweisung der Form $x_i := x_j + c$ oder $x_i := x_j \dot{-} c$ ist ein WHILE-Programm.
- Falls P und Q WHILE-Programme sind, so auch
  - $P; Q$ und
  - **IF** $x_i = c$ **THEN** P **ELSE** Q **END**
  - **WHILE** $x_i \neq c$ **DO** P **END**

Die Syntax von ***LOOP-Programmen*** ist genauso definiert, nur dass Schleifen der Form **LOOP** x_i **DO** P **END** an die Stelle von WHILE-Schleifen treten. Die Semantik von WHILE-Programmen ist selbsterklärend. Eine LOOP-Schleife **LOOP** x_i **DO** P **END** wird sooft ausgeführt, wie der Wert von x_i zu Beginn der Schleife angibt.

Eine partielle Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \cup \{\uparrow\}$ heißt ***WHILE-berechenbar***, falls es ein WHILE-Programm P mit folgender Eigenschaft gibt: Wird P mit den Werten $x_i = n_i$ für $i = 1, \dots, k$ gestartet, so gilt:

- P hält genau dann, wenn $(n_1, \dots, n_k) \in dom(f)$ ist, und
- falls P hält, hat x_0 nach Beendigung von P den Wert $f(n_1, \dots, n_k)$.

Die ***LOOP-Berechenbarkeit*** von f ist entsprechend definiert.

Beispiel 162. *Die Funktion $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ wird von dem WHILE-Programm*

WHILE $x_1 \neq 0$ **DO**
  $x_0 := x_0 + x_2;$
  $x_1 := x_1 \dot{-} 1$
END

sowie von folgendem LOOP-Programm berechnet:

LOOP x_1 **DO**
  $x_0 := x_0 + x_2$
END

◁

Als nächstes beweisen wir die Äquivalenz von WHILE- und GOTO-Berechenbarkeit.

Satz 163. *Eine partielle Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \cup \{\uparrow\}$ ist genau dann GOTO-berechenbar, wenn sie WHILE-berechenbar ist.*

Beweis. Sei P ein WHILE-Programm, das f berechnet. Wir übersetzen P wie folgt in ein äquivalentes GOTO-Programm P'. P' speichert den Variablenwert x_i im Register r_i. Damit lassen sich alle Wertzuweisungen von P direkt in entsprechende Befehle von P' transformieren. Eine Schleife der Form **WHILE** $x_i \neq c$ **DO** Q **END** simulieren wir durch folgendes GOTO-Programmstück:

M_1 **IF** $r_i = c$ **THEN GOTO** M_2
  Q'

GOTO M_1

M_2 ⋮

Ähnlich lässt sich die Verzweigung **IF** $x_i = c$ **THEN** Q_1 **ELSE** Q_2 **END** in ein GOTO-Programmstück transformieren. Zudem fügen wir ans Ende von P' den HALT-Befehl an.

Für die umgekehrte Implikation sei nun $P = (I_0, \ldots, I_m)$ ein GOTO-Programm, das f berechnet, und sei r_z, $z > k$, ein Register, das in P nicht benutzt wird. Dann können wir P wie folgt in ein äquivalentes WHILE-Programm P' übersetzen:

$x_z := 0;$
WHILE $x_z \neq m + 1$ **DO**
  IF $x_z = 0$ **THEN** P'_0 **END**;
    ⋮
  IF $x_z = m$ **THEN** P'_m **END**
END

Dabei ist P'_j abhängig vom Befehl I_j folgendes WHILE-Programm:

- $r_i := r_k + c$: $x_i := x_k + c$; $x_z := x_z + 1$,
- $r_i := r_k \dot{-} c$: $x_i := x_k \dot{-} c$; $x_z := x_z + 1$,
- **GOTO** k: $x_z := k$,
- **IF** $r_i = c$ **THEN GOTO** k:

  IF $x_i = c$ **THEN** $x_z := k$ **ELSE** $x_z := x_z + 1$ **END**

- **HALT**: $x_z := m + 1$.

Man beachte, dass P' nur eine WHILE-Schleife enthält. ■

Es ist leicht zu sehen, dass sich jedes LOOP-Programm durch ein WHILE-Programm simulieren lässt. Offensichtlich können LOOP-Programme nur totale Funktionen berechnen. Daher kann nicht jedes WHILE-Programm durch ein LOOP-Programm simuliert werden. Mittels Diagonalisierung lässt sich eine totale WHILE-berechenbare Funktion f angeben, die nicht LOOP-berechenbar ist. Ein bekanntes Beispiel einer totalen WHILE-berechenbaren Funktion, die nicht LOOP-berechenbar ist, ist die ***Ackermannfunktion*** $a(x, y)$, die induktiv wie folgt definiert ist:

$$a(x,y) = \begin{cases} y+1, & x = 0, \\ a(x-1,1), & x \geq 1, y = 0, \\ a(x-1, a(x, y-1)), & x, y \geq 1. \end{cases}$$

6 Komplexitätsklassen

6.1 Zeitkomplexität

Die Laufzeit $time_M(x)$ einer NTM M bei Eingabe x ist die maximale Anzahl an Rechenschritten, die $M(x)$ ausführt.

Definition 164.

a) *Die* ***Laufzeit*** *einer* NTM M *bei Eingabe* x *ist definiert als*

$$time_M(x) = \sup\{t \geq 0 \mid \exists K : K_x \vdash^t K\},$$

wobei $\sup \mathbb{N} = \infty$ *ist.*

b) *Sei* $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *eine monoton wachsende Funktion. Dann ist* M $t(n)$***-zeitbeschränkt****, falls für alle Eingaben* x *gilt:*

$$\text{time}_M(x) \leq t(|x|).$$

Die Zeitschranke $t(n)$ beschränkt also die Laufzeit bei allen Eingaben der Länge n (worst-case Komplexität).

Wir fassen alle Sprachen und Funktionen, die in einer vorgegebenen Zeitschranke $t(n)$ entscheidbar bzw. berechenbar sind, in folgenden Komplexitätsklassen zusammen.

Definition 165.

a) *Die in deterministischer Zeit* $t(n)$ *entscheidbaren Sprachen bilden die Sprachklasse*

$$\mathsf{DTIME}(t(n)) = \{L(M) \mid M \text{ ist eine } t(n)\text{-zeitbeschränkte DTM}\}.$$

b) *Die in nichtdeterministischer Zeit* $t(n)$ *entscheidbaren Sprachen bilden die Sprachklasse*

$$\mathsf{NTIME}(t(n)) = \{L(M) \mid M \text{ ist eine } t(n)\text{-zeitbeschränkte NTM}\}.$$

c) *Die in deterministischer Zeit* $t(n)$ *berechenbaren Funktionen bilden die Funktionenklasse*

$$\mathsf{FTIME}(t(n)) = \{f \mid \exists\ t(n)\text{-zeitb. DTM } M, \text{ die } f \text{ berechnet}\}.$$

Die wichtigsten deterministischen Zeitkomplexitätsklassen sind

$$\begin{aligned}
\mathsf{LINTIME} &= \bigcup_{c\geq 1} \mathsf{DTIME}(cn + c) && \text{„Linearzeit“}\\
\mathsf{P} &= \bigcup_{c\geq 1} \mathsf{DTIME}(n^c + c) && \text{„Polynomialzeit“}\\
\mathsf{E} &= \bigcup_{c\geq 1} \mathsf{DTIME}(2^{cn+c}) && \text{„Lineare Exponentialzeit“}\\
\mathsf{EXP} &= \bigcup_{c\geq 1} \mathsf{DTIME}(2^{n^c+c}) && \text{„Exponentialzeit“}
\end{aligned}$$

Die nichtdeterministischen Klassen $\mathsf{NLINTIME}, \mathsf{NP}, \mathsf{NE}, \mathsf{NEXP}$ und die Funktionenklassen $\mathsf{FP}, \mathsf{FE}, \mathsf{FEXP}$ sind analog definiert.

Für eine Funktionenklasse $\mathcal{F}$ sei $\mathsf{DTIME}(\mathcal{F}) = \bigcup_{t\in\mathcal{F}} \mathsf{DTIME}(t(n))$ (die Klassen $\mathsf{NTIME}(\mathcal{F})$ und $\mathsf{FTIME}(\mathcal{F})$ seien analog definiert).

Asymptotische Laufzeit und Landau-Notation

Definition 166. *Seien* f *und* g *Funktionen von* $\mathbb{N}$ *nach* $\mathbb{R}^+$*. Wir schreiben* $f(n) = O(g(n))$*, falls es Zahlen* n_0 *und* c *gibt mit*

$$\forall n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n).$$

Die Bedeutung der Aussage $f(n) = O(g(n))$ ist, dass f „nicht wesentlich schneller“ als g wächst. Formal bezeichnet der Term $O(g(n))$ die

Klasse aller Funktionen f, die obige Bedingung erfüllen. Die Gleichung $f(n) = O(g(n))$ drückt also in Wahrheit eine Element-Beziehung $f \in O(g(n))$ aus. O-Terme können auch auf der linken Seite vorkommen. In diesem Fall wird eine Inklusionsbeziehung ausgedrückt. So steht $n^2 + O(n) = O(n^2)$ für die Aussage $\{n^2 + f \mid f \in O(n)\} \subseteq O(n^2)$.

Beispiel 167.

- $7\log(n) + n^3 = O(n^3)$ *ist richtig.*
- $7\log(n)n^3 = O(n^3)$ *ist falsch.*
- $2^{n+O(1)} = O(2^n)$ *ist richtig.*
- $2^{O(n)} = O(2^n)$ *ist falsch (siehe Übungen).* ◁

Unter Benutzung der O-Notation lassen sich die wichtigsten Komplexitätsklassen wie folgt definieren: $\mathsf{L} = \mathsf{DSPACE}(O(\log n))$, $\mathsf{LINTIME} = \mathsf{DTIME}(O(n))$, $\mathsf{P} = \mathsf{DTIME}(n^{O(1)})$, $\mathsf{E} = \mathsf{DTIME}(2^{O(n)})$ und $\mathsf{EXP} = \mathsf{DTIME}(2^{n^{O(1)}})$ etc.

6.2 Das P-NP-Problem

Wie wir im letzten Kapitel gesehen haben (siehe Satz 130), sind NTMs nicht mächtiger als DTMs, d.h. jede NTM kann von einer DTM simuliert werden. Die Frage, wieviel Zeit eine DTM zur Simulation einer NTM benötigt, ist eines der wichtigsten offenen Probleme der Informatik. Wegen $\mathsf{NTIME}(t) \subseteq \mathsf{DTIME}(2^{O(t)})$ erhöht sich die Laufzeit im schlimmsten Fall exponentiell. Insbesondere die Klasse NP enthält viele für die Praxis überaus wichtige Probleme, für die kein Polynomialzeitalgorithmus bekannt ist. Da jedoch nur Probleme in P als effizient lösbar gelten, hat das so genannte ***P-NP-Problem***, also die Frage, ob alle NP-Probleme effizient lösbar sind, eine immense praktische Bedeutung.

Definition 168. *Seien $A \subseteq \Sigma^*$ und $B \subseteq \Gamma^*$ Sprachen.*

a) A ist auf B ***in Polynomialzeit reduzierbar*** *($A \leq^p B$), falls eine Funktion $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ in FP existiert mit*

$$\forall x \in \Sigma^* : x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

b) A heißt ***$\leq^p$-hart*** *für eine Sprachklasse $\mathcal{C}$ (kurz:* ***$\mathcal{C}$-hart*** *oder* ***$\mathcal{C}$-schwer****), falls gilt:*

$$\forall L \in \mathcal{C} : L \leq^p A.$$

c) Eine $\mathcal{C}$-harte Sprache, die zu $\mathcal{C}$ gehört, heißt ***$\mathcal{C}$-vollständig****. Die Klasse aller NP-vollständigen Sprachen bezeichnen wir mit* **NPC**.

Aus $A \leq^p B$ folgt offenbar $A \leq B$ und wie die Relation $\leq$ ist auch $\leq^p$ reflexiv und transitiv (s. Übungen). In diesem Kapitel verlangen wir also von einer $\mathcal{C}$-vollständigen Sprache A, dass jede Sprache $L \in \mathcal{C}$ auf A in Polynomialzeit reduzierbar ist. Es ist leicht zu sehen, dass alle im letzten Kapitel als RE-vollständig nachgewiesenen Sprachen (wie z.B. $\mathrm{K}, \mathrm{H}, \mathrm{H}_0, \mathrm{PCP}$ etc.) sogar $\leq^p$-vollständig für RE sind.

Satz 169. *Die Klassen P und NP sind unter $\leq^p$ abgeschlossen.*

Beweis. Sei $B \in \mathsf{P}$ und gelte $A \leq^p B$ mittels einer Funktion $f \in \mathsf{FP}$. Seien M und T DTMs mit $L(M) = B$ und $T(x) = f(x)$. Weiter seien p und q polynomielle Zeitschranken für M und T. Betrachte die DTM M', die bei Eingabe x zuerst T simuliert, um $f(x)$ zu berechnen, und danach M bei Eingabe $f(x)$ simuliert. Dann gilt

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B \Leftrightarrow f(x) \in L(M) \Leftrightarrow x \in L(M').$$

Also ist $L(M') = A$ und wegen

$$time_{M'}(x) \leq time_T(x) + time_M(f(x)) \leq q(|x|) + p(q(|x|))$$

ist M' polynomiell zeitbeschränkt und somit A in P. Den Abschluss von NP unter $\leq^p$ zeigt man vollkommen analog. ■

Satz 170.

(i) $A \leq^p B$ *und* A *ist* NP*-schwer* $\Rightarrow$ B *ist* NP*-schwer.*

(ii) $A \leq^p B$, A *ist* NP*-schwer und* $B \in \mathsf{NP}$ $\Rightarrow$ $B \in \mathsf{NPC}$.

(iii) $\mathsf{NPC} \cap \mathsf{P} \neq \varnothing \Rightarrow \mathsf{P} = \mathsf{NP}$.

Beweis.

(i) Sei $L \in \mathsf{NP}$ beliebig. Da A NP-schwer ist, folgt $L \leq^p A$. Da zudem $A \leq^p B$ gilt und $\leq^p$ transitiv ist, folgt $L \leq^p B$.

(ii) Klar, da mit (i) folgt, dass B NP-schwer und B nach Voraussetzung in NP ist.

(iii) Sei $A \in \mathsf{P}$ eine NP-vollständige Sprache und sei $L \in \mathsf{NP}$ beliebig. Dann folgt $L \leq^p A$ und da P unter $\leq^p$ abgeschlossen ist, folgt $L \in \mathsf{P}$. ■

Eine einfache Möglichkeit, ein vollständiges Problem für NP und andere Komplexitätsklassen zu erhalten, besteht darin, als Eingabe beliebige TMs M zuzulassen, und zu fragen, ob M ein gegebenes Wort in einer vorgegebenen Zeit- oder Platzschranke akzeptiert.

Um die Komplexität einer solchen Sprache nach oben abschätzen zu können, müssen wir eine Schranke für die Laufzeit einer universellen TM herleiten.

Lemma 171. *Es gibt eine NTM* U *für die Sprache*

$$\left\{ w\#x \;\middle|\; \begin{array}{l} w \in \{0,1\}^*,\ x \in \{0,1,\#\}^* \text{ und } M_w \\ \text{ist eine NTM, die } x \text{ akzeptiert} \end{array} \right\}$$

mit der Laufzeit

$$time_U(w\#x) = \mathcal{O}(|w| \cdot time_{M_w}(x)^2).$$

Beweis. Betrachte die 3-NTM U die bei Eingabe $w\#x$ zunächst den Binärstring w auf das 2. Band verschiebt und anschließend die Binärkodierung des Startzustands von M_w auf das 3. Band schreibt. Sodann ersetzt U jedes Zeichen a_i des auf dem Eingabeband verbliebenen Strings x durch $bin(i)$ und trennt diese durch #. Hierbei benutzt U Binärzahlen einer festen Länge, die ausreicht, alle Arbeitszeichen von M_w darstellen zu können. Schließlich ergänzt U das 1. Band um $k-1$ Bandinschriften (getrennt durch ##), die jeweils nur das Zeichen ⊔ enthalten. Die aktuellen Kopfpositionen speichert U durch Markierung des vorangehenden #-Zeichens.

Nun simuliert U jeden einzelnen Rechenschritt von M_w in jeweils $\mathcal{O}(|w| \cdot time_{M_w}(x))$ Schritten, was auf die gewünschte Gesamtlaufzeit führt. ■

Satz 172. *Folgende Sprache ist* NP*-vollständig:*

$$L = \left\{ w\#x\#0^m \;\middle|\; \begin{array}{l} w, x \in \{0,1\}^* \text{ und } M_w \text{ ist eine NTM,} \\ \text{die } x \text{ in} \leq m \text{ Schritten akzeptiert} \end{array} \right\}$$

Beweis. Wir modifizieren die NTM U im Beweis von Lemma 171 wie folgt zu einer NTM U' mit $L(U') = L$. U' simuliert bei Eingabe $w\#x\#0^m$ die NTM $M_w(x)$ und zählt dabei die simulierten Schritte. U' verwirft, falls der Zähler den Wert m überschreitet und akzeptiert nur dann, wenn $M_w(x)$ nach höchstens m Schritten akzeptiert. Da U' hierzu $\mathcal{O}(|w|(|x|+m)^2)$ Zeit benötigt, ist entscheidet U' die Sprache L in Polynomialzeit.

Sei nun A eine beliebige NP-Sprache. Dann ist A in Polynomialzeit auf eine Sprache $B \subseteq \{0,1\}^*$ in NP reduzierbar (siehe Übungen). Sei M_w eine durch ein Polynom p zeitbeschränkte NTM für B. Dann reduziert folgende FP-Funktion f die Sprache B auf L:

$$f : x \mapsto w\#x\#0^{p(|x|)}.$$

■

6.3 Platzkomplexität

Als nächstes definieren wir den Platzverbrauch von NTMs. Intuitiv ist dies die Anzahl aller während einer Rechnung benutzten Bandfelder. Wollen wir auch sublinearen Platz sinnvoll definieren, so dürfen wir hierbei das Eingabeband offensichtlich nicht berücksichtigen. Um sicherzustellen, dass eine NTM M das Eingabeband nicht als Speicher benutzt, verlangen wir, dass M die Felder auf dem Eingabeband nicht verändert und sich nicht mehr als ein Feld von der Eingabe entfernt.

Definition 173. *Eine* NTM M *heißt* ***Offline*-NTM** *(oder* NTM *mit* **Eingabeband***), falls für jede von M bei Eingabe x erreichbare Konfiguration*

$$K = (q, u_1, a_1, v_1, \ldots, u_k, a_k, v_k)$$

gilt, dass $u_1 a_1 v_1$ ein Teilwort von $\sqcup x \sqcup$ ist.

Definition 174. *Der* ***Platzverbrauch*** *einer Offline-*NTM M *bei Eingabe x ist definiert als*

$$space_M(x) = \sup \left\{ s \geq 1 \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists K = (q, u_1, a_1, v_1, \ldots, u_k, a_k, v_k) \\ \text{mit } K_x \vdash^* K \text{ und } s = \sum_{i=2}^{k} |u_i a_i v_i| \end{array} \right\}.$$

*Sei $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine monoton wachsende Funktion. Dann ist M $s(n)$-**platzbeschränkt**, falls für alle Eingaben x gilt:*

$$space_M(x) \leq s(|x|) \text{ und } time_M(x) < \infty.$$

Wir fassen alle Sprachen, die in einer vorgegebenen Platzschranke $s(n)$ entscheidbar sind, in folgenden ***Platzkomplexitätsklassen*** zusammen.

Definition 175. *Die auf deterministischem Platz $s(n)$ entscheidbaren Sprachen bilden die Klasse*

$$\mathsf{DSPACE}(s(n)) = \{L(M) \mid M \text{ ist eine } s(n)\text{-platzb. } \textit{Offline}\text{-DTM}\}.$$

Die auf nichtdeterministischem Platz $s(n)$ entscheidbaren Sprachen bilden die Klasse

$$\mathsf{NSPACE}(s(n)) = \{L(M) \mid M \text{ ist eine } s(n)\text{-platzb. } \textit{Offline}\text{-NTM}\}.$$

Die wichtigsten deterministischen Platzkomplexitätsklassen sind

L	$= \mathsf{DSPACE}(O(\log n))$	„Logarithmischer Platz“
$\mathsf{LINSPACE}$	$= \mathsf{DSPACE}(O(n))$	„Linearer Platz“
PSPACE	$= \mathsf{DSPACE}(n^{O(1)})$	„Polynomieller Platz“

Die nichtdeterministischen Klassen NL, $\mathsf{NLINSPACE}$ und $\mathsf{NPSPACE}$ sind analog definiert.

Dass nichtdeterministische Berechnungen nicht sehr viel Platz gegenüber deterministischen Berechnungen einsparen können, wurde von Savitch 1970 bewiesen (siehe Vorlesung Komplexitätstheorie).

Satz 176. *Jede $s(n)$-platzbeschränkte NTM kann von einer $s^2(n)$-platzbeschränkten DTM simuliert werden (ohne Beweis).*

Als Konsequenz hiervon fallen die Klassen $\mathsf{NPSPACE}$ und PSPACE zusammen. Zwischen den verschiedenen Zeit- und Platzklassen bestehen die folgenden elementaren Inklusionsbeziehungen. Für jede Funktion $s(n) \geq \log n$ gilt

$$\mathsf{DSPACE}(s) \subseteq \mathsf{NSPACE}(s) \subseteq \mathsf{DTIME}(2^{O(s)})$$

und für jede Funktion $t(n) \geq n + 2$ gilt

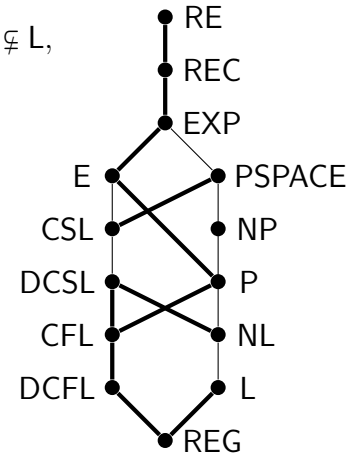
$$\mathsf{DTIME}(t) \subseteq \mathsf{NTIME}(t) \subseteq \mathsf{DSPACE}(t).$$

Eine unmittelbare Konsequenz hiervon sind folgende Inklusionen:

$$\mathsf{L} \subseteq \mathsf{NL} \subseteq \mathsf{P} \subseteq \mathsf{NP} \subseteq \mathsf{PSPACE} \subseteq \mathsf{EXP} \subseteq \mathsf{EXPSPACE}.$$

Die Klassen der Chomsky-Hierarchie lassen sich wie folgt einordnen (eine dicke Linie deutet an, dass die Inklusion als echt nachgewiesen werden konnte):

$$\begin{aligned}
\mathsf{REG} &= \mathsf{DSPACE}(O(1)) = \mathsf{NSPACE}(O(1)) \subsetneq \mathsf{L},\\
\mathsf{DCFL} &\subsetneq \mathsf{LINTIME} \cap \mathsf{CFL} \subsetneq \mathsf{LINTIME} \subsetneq \mathsf{P},\\
\mathsf{CFL} &\subsetneq \mathsf{NLINTIME} \cap \mathsf{DTIME}(n^3) \subsetneq \mathsf{P},\\
\mathsf{DCSL} &= \mathsf{LINSPACE} \subseteq \mathsf{CSL},\\
\mathsf{CSL} &= \mathsf{NLINSPACE} \subseteq \mathsf{PSPACE} \cap \mathsf{E},\\
\mathsf{REC} &= \bigcup \mathsf{DSPACE}(f(n))\\
&= \bigcup \mathsf{NSPACE}(f(n))\\
&= \bigcup \mathsf{DTIME}(f(n))\\
&= \bigcup \mathsf{NTIME}(f(n)),
\end{aligned}$$



wobei f alle berechenbaren (oder äquivalent: alle) Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durchläuft.

Die Klasse L ist nicht in CFL enthalten, da beispielsweise die Sprache $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ in logarithmischem Platz (und linearer Zeit) entscheidbar ist. Ob P in CSL enthalten ist, ist nicht bekannt. Auch nicht ob $\mathsf{DCSL} \subseteq \mathsf{P}$ gilt. Man kann jedoch zeigen, dass $\mathsf{CSL} \neq \mathsf{P} \neq \mathsf{DCSL}$ ist. Ähnlich verhält es sich mit den Klassen E und PSPACE: Man kann zwar zeigen, dass sie verschieden sind, aber ob eine in der anderen enthalten ist, ist nicht bekannt.

7 NP-vollständige Probleme

7.1 Aussagenlogische Erfüllbarkeitsprobleme

Definition 177.

a) *Die Menge der* ***booleschen*** *(oder* ***aussagenlogischen****)* ***Formeln*** *über den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ ist induktiv wie folgt definiert:*
   - *Jede Variable x_i ist eine boolesche Formel.*
   - *Mit G und H sind auch die* ***Negation*** *$\neg G$ von G und die* ***Konjunktion*** *$(G \wedge H)$ von G und H boolesche Formeln.*

b) *Eine* ***Belegung*** *von $x_1, \ldots, x_n$ ist ein Wort $a = a_1 \ldots a_n \in \{0,1\}^n$. Der* ***Wert*** *$F(a)$ von F unter a ist induktiv über den Aufbau von F definiert:*

F	x_i	$\neg G$	$(G \wedge H)$
$F(a)$	a_i	$1 - G(a)$	$G(a)H(a)$

c) *Durch eine boolesche Formel F wird also eine n-stellige* ***boolesche Funktion*** *$F : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ definiert, die wir ebenfalls mit F bezeichnen.*

d) *F heißt* ***erfüllbar****, falls es eine Belegung a mit $F(a) = 1$ gibt.*

e) *Gilt dagegen für alle Belegungen a, dass $F(a) = 1$ ist, so heißt F* ***Tautologie****.*

Beispiel 178 (Erfüllbarkeitstest mittels Wahrheitswerttabelle)**.** *Da die Formel $F = ((x_1 \vee x_2) \to (\neg x_2 \wedge x_3))$ für die Belegungen*

$a \in \{000, 001, 101\}$ *den Wert* $F(a) = 1$ *animmt, ist sie erfüllbar:*

a	$(x_1 \vee x_2)$	$(\neg x_2 \wedge x_3)$	$((x_1 \vee x_2) \to (\neg x_2 \wedge x_3))$
000	0	0	1
001	0	1	1
010	1	0	0
011	1	0	0
100	1	0	0
101	1	1	1
110	1	0	0
111	1	0	0

◁

Notation. *Wir verwenden die* ***Disjunktion*** $(G \vee H)$ *und die* ***Implikation*** $(G \to H)$ *als Abkürzungen für die Formeln* $\neg(\neg G \wedge \neg H)$ *bzw.* $(\neg G \vee H)$.

Um Klammern zu sparen, vereinbaren wir folgende Präzedenzregeln:

- Der Junktor $\wedge$ bindet stärker als der Junktor $\vee$ und dieser wiederum stärker als der Junktor $\to$.
- Formeln der Form $(x_1 \circ (x_2 \circ (x_3 \circ \cdots \circ x_n)\cdots)))$, $\circ \in \{\wedge, \vee, \to\}$ kürzen wir durch $(x_1 \circ \cdots \circ x_n)$ ab.

Beispiel 179. *Die Formel*

$$G(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 \vee \cdots \vee x_n) \wedge \bigwedge_{1 \le i < j \le n} \neg(x_i \wedge x_j)$$

nimmt unter einer Belegung $a = a_1 \ldots a_n$ *genau dann den Wert* 1 *an, wenn* $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ *ist. D.h. es gilt genau dann* $G(a) = 1$*, wenn genau eine Variable* x_i *mit dem Wert* $a_i = 1$ *belegt ist. Diese Formel wird im Beweis des nächsten Satzes benötigt.* ◁

Bei vielen praktischen Anwendungen ist es erforderlich, eine erfüllende Belegung für eine vorliegende boolesche Formel zu finden (sofern es eine gibt). Die Bestimmung der Komplexität des Erfüllbarkeitsproblems

(engl. *satisfiability*) für boolesche Formeln hat also große praktische Bedeutung.

Aussagenlogisches Erfüllbarkeitsproblem (SAT):

Gegeben: Eine boolesche Formel F in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$.
Gefragt: Ist F erfüllbar?

Dabei kodieren wir boolesche Formeln F durch Binärstrings w_F und ordnen umgekehrt jedem Binärstring w eine Formel F_w zu. Um die Notation zu vereinfachen, werden wir jedoch meist F anstelle von w_F schreiben.

Satz 180 (Cook, Karp, Levin)**.** SAT *ist* NP*-vollständig.*

Beweis. Es ist leicht zu sehen, dass SAT $\in$ NP ist, da eine NTM zunächst eine Belegung a für eine gegebene booleschen Formel F nichtdeterministisch raten und dann in Polynomialzeit testen kann, ob $F(a) = 1$ ist (*guess and verify* Strategie).

Es bleibt zu zeigen, dass SAT NP-hart ist. Sei L eine beliebige NP-Sprache und sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0)$ eine durch ein Polynom p zeitbeschränkte k-NTM mit $L(M) = L$. Da sich eine $t(n)$-zeitbeschränkte k-NTM in Zeit $t^2(n)$ durch eine 1-NTM simulieren lässt, können wir $k = 1$ annehmen. Unsere Aufgabe besteht nun darin, in Polynomialzeit zu einer gegebenen Eingabe $w = w_1 \ldots w_n$ eine Formel F_w zu konstruieren, die genau dann erfüllbar ist, wenn $w \in L$ ist,

$$w \in L \Leftrightarrow F_w \in \text{SAT}.$$

Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $Z = \{q_0, \ldots, q_m\}$, $E = \{q_m\}$ und $\Gamma = \{a_1, \ldots, a_l\}$ ist. Zudem können wir annehmen, dass δ für jedes Zeichen $a \in \Gamma$ die Anweisung $q_m a \to q_m a N$ enthält.

Die Idee besteht nun darin, die Formel F_w so zu konstruieren, dass sie unter einer Belegung a genau dann wahr wird, wenn a eine akzeptierende Rechnung von $M(w)$ beschreibt. Hierzu bilden wir F_w über

den Variablen

$$\begin{aligned} &x_{t,q}, && \text{für } 0 \le t \le p(n), q \in Z, \\ &y_{t,i}, && \text{für } 0 \le t \le p(n), -p(n) \le i \le p(n), \\ &z_{t,i,a}, && \text{für } 0 \le t \le p(n), -p(n) \le i \le p(n), a \in \Gamma, \end{aligned}$$

die für folgende Aussagen stehen:

$x_{t,q}$: zum Zeitpunkt t befindet sich M im Zustand q,
$y_{t,i}$: zur Zeit t besucht M das Feld mit der Nummer i,
$z_{t,i,a}$: zur Zeit t steht das Zeichen a auf dem i-ten Feld.

Konkret sei nun $F_w = R \wedge S \wedge \ddot{U}_1 \wedge \ddot{U}_2 \wedge E$. Dabei stellt die Formel $R = \bigwedge_{t=0}^{p(n)} R_t$ (Randbedingungen) sicher, dass wir jeder erfüllenden Belegung eindeutig eine Folge von Konfigurationen $K_0, \ldots, K_{p(n)}$ zuordnen können:

$$\begin{aligned} R_t = {} & G(x_{t,q_0}, \ldots, x_{t,q_m}) \wedge G(y_{t,-p(n)}, \ldots, y_{t,p(n)}) \\ & \wedge \bigwedge_{i=-p(n)}^{p(n)} G(z_{t,i,a_1}, \ldots, z_{t,i,a_l}). \end{aligned}$$

Die Teilformel R_t sorgt also dafür, dass zum Zeitpunkt t

- genau ein Zustand $q \in \{q_0, \ldots, q_m\}$ eingenommen wird,
- genau ein Bandfeld $i \in \{-p(n), \ldots, p(n)\}$ besucht wird und
- auf jedem Feld i genau ein Zeichen $a \in \Gamma$ steht.

Die Formel S (wie Startbedingung) stellt sicher, dass zum Zeitpunkt 0 tatsächlich die Startkonfiguration

$-p(n)$		-1	0		$n-1$	n		$p(n)$
$\sqcup$	$\cdots$	$\sqcup$	w_1	$\cdots$	w_n	$\sqcup$	$\cdots$	$\sqcup$
			$\uparrow$ q_0					

vorliegt:

$$S = x_{0,q_0} \wedge y_{0,0} \wedge \bigwedge_{i=-p(n)}^{-1} z_{0,i,\sqcup} \wedge \bigwedge_{i=0}^{n-1} z_{0,i,w_{i+1}} \wedge \bigwedge_{i=n}^{p(n)} z_{0,i,\sqcup}$$

Die Formel $\ddot{U}_1$ sorgt dafür, dass der Inhalt von nicht besuchten Feldern beim Übergang von K_t zu K_{t+1} unverändert bleibt:

$$\ddot{U}_1 = \bigwedge_{t=0}^{p(n)-1} \bigwedge_{i=-p(n)}^{p(n)} \bigwedge_{a \in \Gamma} \big(\neg y_{t,i} \wedge z_{t,i,a} \to z_{t+1,i,a}\big)$$

Die Formel $\ddot{U}_2$ achtet darauf, dass sich bei jedem Übergang der Zustand, die Kopfposition und das gerade gelesene Zeichen gemäß einer Anweisung in δ verändern:

$$\begin{aligned} \ddot{U}_2 = \bigwedge_{t=0}^{p(n)-1} \bigwedge_{i=-p(n)}^{p(n)} \bigwedge_{a \in \Gamma} \bigwedge_{p \in Z} \big(& x_{t,p} \wedge y_{t,i} \wedge z_{t,i,a} \to \\ & \bigvee_{(q,b,D) \in \delta(p,a)} x_{t+1,q} \wedge y_{t+1,i+D} \wedge z_{t+1,i,b} \big), \end{aligned}$$

wobei

$$i + D = \begin{cases} i-1, & D = L \\ i, & D = N \\ i+1, & D = R \end{cases}$$

ist. Schließlich überprüft E, ob M zur Zeit $p(n)$ den Endzustand q_m erreicht hat:

$$E = x_{p(n),q_m}$$

Da der Aufbau der Formel $f(w) = F_w$ einem einfachen Bildungsgesetz folgt und ihre Länge polynomiell in n ist, folgt $f \in \mathsf{FP}$. Es ist klar, dass F_w im Fall $w \in L(M)$ erfüllbar ist, indem wir die Variablen von F_w gemäß einer akz. Rechnung von $M(w)$ belegen. Umgekehrt führt eine Belegung a mit $F_w(a) = 1$ wegen $R(a) = 1$ eindeutig auf eine Konfigurationenfolge $K_0, \ldots, K_{p(n)}$, so dass gilt:

- K_0 ist Startkonfiguration von $M(w)$ (wegen $S(a) = 1$),

- $K_i \vdash K_{i+1}$ für $i = 0, \ldots, p(n) - 1$ (wegen $\ddot{U}_1(a) = \ddot{U}_2(a) = 1$),
- M nimmt spätestensin der Konfiguration $K_{p(n)}$ den Endzustand q_m an (wegen $E(a) = 1$).

Also gilt für alle $w \in \Sigma^*$ die Äquivalenz $w \in L(M) \Leftrightarrow F_w \in \text{SAT}$, d.h. die FP-Funktion $f : w \mapsto F_w$ reduziert $L(M)$ auf SAT. ■

Korollar 181. SAT $\in \mathsf{P} \Leftrightarrow \mathsf{P} = \mathsf{NP}$.

Gelingt es also, einen Polynomialzeit-Algorithmus für SAT zu finden, so lässt sich daraus leicht ein effizienter Algorithmus für jedes NP-Problem ableiten. Als nächstes betrachten wir das Erfüllbarkeitsproblem für boolesche Schaltkreise.

Definition 182.

a) *Ein* ***boolescher Schaltkreis*** *über den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ ist eine Folge $s = (g_1, \ldots, g_m)$ von* ***Gattern***

$$g_l \in \{0, 1, x_1, \ldots, x_n, (\neg, j), (\wedge, j, k), (\vee, j, k)\}$$

mit $1 \leq j, k < l$.

b) *Die am Gatter g_l berechnete n-stellige boolesche Funktion ist induktiv wie folgt definiert:*

g_l	0	1	x_i	$(\neg, j)$	$(\wedge, j, k)$	$(\vee, j, k)$
$g_l(a)$	0	1	a_i	$1 - g_j(a)$	$g_j(a)g_k(a)$	$g_j(a) + g_k(a) - g_j(a)g_k(a)$

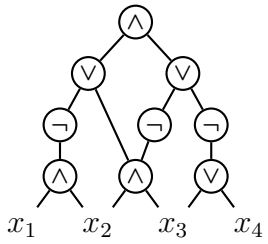
c) *s berechnet die boolesche Funktion $s(a) = g_m(a)$.*

d) *s heißt* ***erfüllbar****, wenn eine Eingabe $a \in \{0, 1\}^n$ mit $s(a) = 1$ existiert.*

Beispiel 183. *Der Schaltkreis*

$$\begin{aligned} s = \; & (x_1, x_2, x_3, x_4, (\wedge, 1, 2), (\wedge, 2, 3), \\ & (\vee, 3, 4), (\neg, 5), (\neg, 6), (\neg, 7), \\ & (\vee, 6, 8), (\vee, 9, 10), (\wedge, 11, 12)) \end{aligned}$$

ist nebenstehend graphisch dargestellt.



◁

Bemerkung 184.

- *Die Anzahl der Eingänge eines Gatters g wird als* ***Fanin*** *von g bezeichnet, die Anzahl der Ausgänge von g (d.h. die Anzahl der Gatter, die g als Eingabe benutzen) als* ***Fanout****.*
- *Boolesche Formeln entsprechen also booleschen Schaltkreisen mit Fanout ≤ 1 und umgekehrt.*

Erfüllbarkeitsproblem für boolesche Schaltkreise (CIRSAT):

Gegeben: Ein boolescher Schaltkreis s.
Gefragt: Ist s erfüllbar?

Da eine boolesche Formel F leicht in einen äquivalenten Schaltkreis s mit $s(a) = F(a)$ für alle Belegungen a transformiert werden kann, folgt SAT $\leq^p$ CIRSAT.

Korollar 185. CIRSAT *ist* NP*-vollständig.*

Bemerkung 186. *Da* SAT NP*-vollständig ist, ist* CIRSAT *in Polynomialzeit auf* SAT *reduzierbar. Dies bedeuted jedoch nicht, dass sich jeder Schaltkreis in Polynomialzeit in eine äquivalente Formel überführen lässt, sondern nur in eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel.*

CIRSAT ist sogar auf eine ganz spezielle SAT-Variante reduzierbar.

Definition 187.

a) *Ein* ***Literal*** *ist eine Variable x_i oder eine negierte Variable $\neg x_i$, die wir auch kurz mit $\bar{x}_i$ bezeichnen.*

b) *Eine* ***Klausel*** *ist eine Disjunktion* $C = \bigvee_{j=1}^{k} l_j$ *von Literalen. Hierbei ist auch* $k = 0$ *zulässig, d.h. die* ***leere Klausel*** *repräsentiert die Konstante* 0 *und wird üblicherweise mit* $\square$ *bezeichnet.*

c) *Eine Formel* F *ist in* ***konjunktiver Normalform*** *(kurz* ***KNF****), falls* F *eine Konjunktion*

$$F = \bigwedge_{i=1}^{m} C_i$$

von $m \geq 0$ *Klauseln ist. Im Fall* $m = 0$ *repräsentiert* F *die Konstante* 1.

d) *Enthält jede Klausel höchstens* k *Literale, so heißt* F *in* k***-KNF****.*

Notation. *Klauseln werden oft als Menge* $C = \{l_1, \ldots, l_k\}$ *ihrer Literale und KNF-Formeln als Menge* $F = \{C_1, \ldots, C_m\}$ *ihrer Klauseln dargestellt. Enthält* F *die leere Klausel, so ist* F *unerfüllbar, wogegen die leere KNF-Formel immer wahr (also eine Tautologie) ist.*

Erfüllbarkeitsproblem für k**-KNF Formeln** (k-SAT):

Gegeben: Eine boolesche Formel F in k-KNF.
Gefragt: Ist F erfüllbar?

Folgende Variante von 3-SAT ist für den Nachweis weiterer NP-Vollständigkeitsresultate sehr nützlich.

Not-All-Equal-SAT (NAESAT):

Gegeben: Eine Formel F in 3-KNF.
Gefragt: Hat F eine (erfüllende) Belegung, unter der in keiner Klausel alle Literale denselben Wahrheitswert haben?

Beispiel 188. *Die 3-KNF Formel* $F = (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)$ *ist alternativ durch folgende Klauselmenge darstellbar:*

$$F = \{\{x_1, \bar{x}_2\}, \{\bar{x}_1, x_3\}, \{x_2, \bar{x}_3, x_4\}\}$$

Offenbar ist $F(1111) = 1$*, d.h.* $F \in$ 3-SAT*. Da unter dieser Belegung in jeder Klausel von* F *nicht nur mindestens ein Literal wahr, sondern auch mindestens ein Literal falsch wird, ist* F *auch in* NAESAT. $\triangleleft$

Satz 189. 3-SAT *ist* NP*-vollständig.*

Beweis. Es ist nicht schwer zu sehen, dass 3-SAT in NP entscheidbar ist. Wir zeigen, dass 3-SAT NP-hart ist, indem wir CIRSAT auf 3-SAT reduzieren. Hierzu transformieren wir einen Schaltkreis $s = (g_1, \ldots, g_m)$ mit n Eingängen in eine 3-KNF Formel F_s über den Variablen $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$. F_s enthält neben der Klausel $\{y_m\}$ für jedes Gatter g_i die Klauseln folgender Formel F_i enthält:

Gatter g_i	Semantik von F_i	Klauseln von F_i
0	$y_i = 0$	$\{\bar{y}_i\}$
1	$y_i = 1$	$\{y_i\}$
x_j	$y_i = x_j$	$\{\bar{y}_i, x_j\}, \{\bar{x}_j, y_i\}$
$(\neg, j)$	$y_i = \bar{y}_j$	$\{\bar{y}_i, \bar{y}_j\}, \{y_j, y_i\}$
$(\wedge, j, k)$	$y_i = y_j \wedge y_k$	$\{\bar{y}_i, y_j\}, \{\bar{y}_i, y_k\}, \{\bar{y}_j, \bar{y}_k, y_i\}$
$(\vee, j, k)$	$y_i = y_j \vee y_k$	$\{\bar{y}_j, y_i\}, \{\bar{y}_k, y_i\}, \{\bar{y}_i, y_j, y_k\}$

Nun ist leicht zu sehen, dass für alle $a \in \{0,1\}^n$ folgende Äquivalenz gilt:

$$s(a) = 1 \Leftrightarrow \exists b \in \{0,1\}^m : F_s(ab) = 1.$$

Ist nämlich $a \in \{0,1\}^n$ eine Eingabe mit $s(a) = 1$. Dann erhalten wir mit

$$b_l = g_l(a) \text{ für } l = 1, \ldots, m$$

eine erfüllende Belegung $ab_1 \ldots b_m$ für F_s. Ist umgekehrt $ab_1 \ldots b_m$ eine erfüllende Belegung für F_s, so folgt durch Induktion über $i = 1, \ldots, m$, dass

$$g_i(a) = b_i$$

ist. Insbesondere muss also $g_m(a) = b_m$ gelten, und da $\{y_m\}$ eine Klausel in F_s ist, folgt $s(a) = g_m(a) = b_m = 1$. Damit haben wir gezeigt, dass der Schaltkreis s und die 3-KNF-Formel F_s erfüllbarkeitsäquivalent sind, d.h.

$$s \in \textsc{CirSat} \Leftrightarrow F_s \in \text{3-}\textsc{Sat}.$$

Zudem ist leicht zu sehen, dass die Reduktionsfunktion $s \mapsto F_s$ in FP berechenbar ist, womit $\textsc{CirSat} \leq^p \text{3-}\textsc{Sat}$ folgt. ■

7.2 Entscheidungsprobleme für reguläre Sprachen

In diesem Abschnitt betrachten wir verschiedene Entscheidungsprobleme für reguläre Sprachen, die als DFA, NFA oder als regulärer Ausdruck (RA) gegeben sind. Wir werden sehen, dass das Wortproblem sowohl für NFAs als auch für reguläre Ausdrücke effizient lösbar ist. Dagegen wird sich das Äquivalenzproblem für reguläre Ausdrücke als co-NP-hart herausstellen. Dies gilt sogar für ***sternfreie*** reguläre Ausdrücke (kurz sfRAs), also für reguläre Ausdrücke, die keinen Stern enthalten und daher nur endliche Sprachen beschreiben können.

Satz 190. *Das Wortproblem für NFAs,*

$$\mathrm{WP}_{\mathrm{NFA}} = \{N\#x \mid N \textit{ ist ein NFA und } x \in L(N)\},$$

ist in P *entscheidbar.*

Beweis. Um die Zugehörigkeit von x zu $L(N)$ zu testen, simulieren wir den Potenzmengen-DFA bei Eingabe x:

P-Algorithmus für $\mathrm{WP}_{\mathrm{NFA}}$

```
Input: NFA N = (Z, Σ, δ, Q_0, E) und ein Wort x = x_1 ... x_n
  Q := Q_0
  for i := 1 to n do
    Q := ⋃_{q∈Q} δ(q, x_i)
  if Q ∩ E ≠ ∅ then accept else reject
```

Es ist klar, dass dieser Algorithmus korrekt arbeitet und auch in eine polynomiell zeitbeschränkte DTM für die Sprache $\mathrm{WP}_{\mathrm{NFA}}$ transformiert werden kann. ■

Korollar 191. *Das Wortproblem für reguläre Ausdrücke ist in* P *entscheidbar:*

$$\mathrm{WP}_{\mathrm{RA}} = \{\alpha\#x \mid \alpha \textit{ ist ein regulärer Ausdruck und } x \in L(\alpha)\} \in \mathsf{P}.$$

Beweis. Ein regulärer Ausdruck α lässt sich in Polynomialzeit in einen äquivalenten NFA N_α transformieren. Daher gilt $\mathrm{WP}_{\mathrm{RA}} \leq^p \mathrm{WP}_{\mathrm{NFA}}$ mittels $f : (\alpha\#x) \mapsto (N_\alpha\#x)$. Da nach vorigem Satz $\mathrm{WP}_{\mathrm{NFA}} \in \mathsf{P}$ ist, und da P unter $\leq^p$ abgeschlossen ist, folgt $\mathrm{WP}_{\mathrm{RA}} \in \mathsf{P}$. ■

Ganz ähnlich folgt auch, dass das Leerheits- und das Schnittproblem für NFAs in Polynomialzeit lösbar sind (siehe Übungen). Als nächstes zeigen wir, dass die Probleme ÄP_{sfRA} und IP_{sfRA} co-NP-vollständig sind. Hierzu beweisen wir folgendes Lemma.

Lemma 192. *Die Sprache*

$$\mathrm{SF} = \left\{\alpha\#0^n \,\middle|\, \alpha \textit{ ist ein SFRA und es gibt ein } x \in \{0,1\}^n : x \notin L(\alpha)\right\}$$

ist NP*-vollständig.*

Beweis. Folgender NP-Algorithmus entscheidet die Sprache SF.

NP-Algorithmus für die Sprache SF

```
Input: sfRA α und eine unär kodierte Zahl n
  guess x ∈ {0,1}^n
  if x ∉ L(α) then accept else reject
```

Als nächstes reduzieren wir 3-SAT auf SF. Sei eine 3-KNF Formel $F = \{C_1, \dots, C_m\}$ gegeben. Betrachte den regulären Ausdruck $\alpha_F = (\alpha_1 | \dots | \alpha_m)$ mit $\alpha_j = \beta_{j1} \dots \beta_{jn}$ und

$$\beta_{ij} = \begin{cases} 0, & x_i \in C_j, \\ 1, & \bar{x}_i \in C_j, \\ (0|1), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $L(\alpha_j) = \{a \in \{0,1\}^n \mid C_j(a) = 0\}$ und daher folgt

$$\begin{aligned} F \in \text{3-SAT} &\Leftrightarrow \exists a \in \{0,1\}^n : F(a) = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists a \in \{0,1\}^n \, \forall j = 1, \dots, m : C_j(a) = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists a \in \{0,1\}^n \, \forall j = 1, \dots, m : a \notin L(\alpha_j) \\ &\Leftrightarrow \exists a \in \{0,1\}^n : a \notin L(\alpha_F) \\ &\Leftrightarrow \alpha_F \# 0^n \in \text{SF}. \end{aligned}$$

■

Korollar 193. *Das Äquivalenzproblem für sternfreie reguläre Ausdrücke,*

$$\text{ÄP}_{sfRA} = \{\alpha \# \beta \mid \alpha, \beta \text{ sind sfRAs mit } L(\alpha) = L(\beta)\},$$

ist co-NP*-vollständig.*

Beweis. Wir zeigen, dass das Inäquivalenzproblem für sfRAs NP-vollständig ist. Sei α ein sternfreier regulärer Ausdruck der Länge m über einem Alphabet Σ. Es ist leicht zu zeigen (durch Induktion über den Aufbau von α), dass $L(\alpha) \subseteq \Sigma^{\leq m}$ gilt, wobei

$$\Sigma^{\leq m} = \bigcup_{i=0}^{m} \Sigma^i$$

ist. Daher entscheidet folgender NP-Algorithmus das Inäquivalenzproblem für sfRAs:

NP-Algorithmus für das Inäquivalenzproblem für sfRAs

```
1 Input: sfRAs α und β
2   m := max{|α|, |β|}
3   guess x ∈ {0,1}^≤m
4   if x ∈ L(α)ΔL(β) then accept else reject
```

Zudem lässt sich SF leicht auf dieses Problem reduzieren:

$$\alpha \# 0^n \mapsto \alpha \# \underbrace{(0|1) \dots (0|1)}_{n\text{-mal}}.$$

■

Es ist nicht schwer, das Komplement von SF auch auf das Inklusionsproblem für sternfreie reguläre Ausdrücke zu reduzieren, d.h. IP_{sfRA} ist ebenfalls co-NP-vollständig (siehe Übungen). Daher sind das Äquivalenz- und Inklusionsproblem für reguläre Ausdrücke (und somit auch für NFAs) co-NP-hart. Diese Probleme sind sogar PSPACE-vollständig (ohne Beweis).

	Wort-problem $x \in L$?	Leerheits-problem $L = \emptyset$?	Schnitt-problem $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$?	Äquivalenz-problem $L_1 = L_2$?	Inklusions-problem $L_1 \subseteq L_2$
DFA	P	P	P	P	P
sfRA	P	P	P	co-NP-vollständig	
RA	P	P	P	PSPACE-vollständig	
NFA	P	P	P	PSPACE-vollständig	

Die Tabelle gibt die Komplexitäten der wichtigsten Entscheidungsprobleme für durch DFAs, NFAs oder (sternfreie) reguläre Ausdrücke gegebene reguläre Sprachen an.

7.3 Graphprobleme

Definition 194. *Ein* ***(ungerichteter) Graph*** *ist ein Paar* $G = (V, E)$*, wobei*

V - *eine endliche Menge von* ***Knoten/Ecken*** *und*

E - *die Menge der* ***Kanten*** *ist.*

Hierbei gilt

$$E \subseteq \binom{V}{2} = \big\{\{u, v\} \subseteq V \mid u \neq v\big\}.$$

a) *Die* ***Knotenzahl*** *von* G *ist* $n(G) = \|V\|$.

b) *Die* ***Kantenzahl*** *von* G *ist* $m(G) = \|E\|$.

c) *Die* ***Nachbarschaft*** *von* $v \in V$ *ist*

$$N_G(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}$$

und die Nachbarschaft von $U \subseteq V$ *ist* $N_G(U) = \bigcup_{u \in U} N_G(u)$.

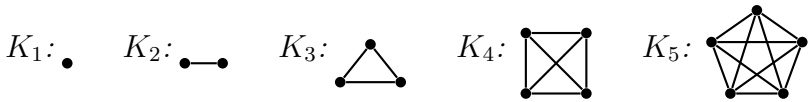
d) *Der* ***Grad*** *von* v *ist* $\deg_G(v) = \|N_G(v)\|$.

e) *Der* ***Minimalgrad*** *von* G *ist* $\delta(G) = \min_{v \in V} \deg_G(v)$ *und der* ***Maximalgrad*** *von* G *ist* $\Delta(G) = \max_{v \in V} \deg_G(v)$.

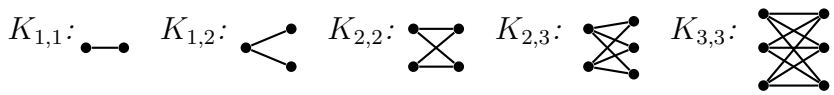
Falls G aus dem Kontext ersichtlich ist, schreiben wir auch einfach n, m, $N(v)$, $N(U)$, $\deg(v)$, δ usw.

Beispiel 195.

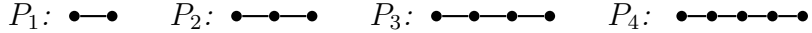
- *Der* ***vollständige Graph*** (V, E) *auf* n *Knoten, d.h.* $\|V\| = n$ *und* $E = \binom{V}{2}$*, wird mit* K_n *und der* ***leere Graph*** $(V, \varnothing)$ *auf* n *Knoten wird mit* E_n *bezeichnet.*



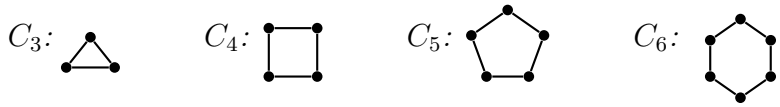
- *Der* ***vollständige bipartite Graph*** (A, B, E) *auf* $a + b$ *Knoten, d.h.* $A \cap B = \varnothing$, $\|A\| = a$, $\|B\| = b$ *und* $E = \{\{u, v\} \mid u \in A, v \in B\}$ *wird mit* $K_{a,b}$ *bezeichnet.*



- *Der* ***Pfad*** *der Länge* m *wird mit* P_m *bezeichnet.*



- *Der* ***Kreis*** *der Länge* n *wird mit* C_n *bezeichnet.*



7.3.1 Cliquen, Stabilität und Kantenüberdeckungen

Definition 196. *Sei* $G = (V, E)$ *ein Graph.*

a) *Ein Graph* $G' = (V', E')$ *heißt* ***Sub-/Teil-/Untergraph*** *von* G*, falls* $V' \subseteq V$ *und* $E' \subseteq E$ *ist. Ein Subgraph* $G' = (V', E')$ *heißt (durch* V'*)* ***induziert****, falls* $E' = E \cap \binom{V'}{2}$ *ist. Hierfür schreiben wir auch* $H = G[V']$.

b) *Ein* ***Weg*** *ist eine Folge von (nicht notwendig verschiedenen) Knoten* $v_0, \ldots, v_\ell$ *mit* $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ *für* $i = 0, \ldots, \ell - 1$*. Sind alle Knoten auf dem Weg paarweise verschieden, so heißt der Weg* ***einfach*** *oder* ***Pfad****. Die* ***Länge*** *des Weges ist die Anzahl der Kanten, also* ℓ*. Im Fall* $\ell = 0$ *heißt der Weg* ***trivial****. Ein Weg* $v_0, \ldots, v_\ell$ *heißt auch* v_0*-*v_ℓ*-Weg.*

c) *Ein* ***Zyklus*** *ist ein* u*-*v*-Weg der Länge* $\ell \geq 2$ *mit* $u = v$.

d) *Ein* ***Kreis*** *ist ein Zyklus* $v_0, v_1 \ldots, v_{\ell-1}, v_0$ *der Länge* $\ell \geq 3$*, für den* $v_0, v_1, \ldots, v_{\ell-1}$ *paarweise verschieden sind.*

e) G *heißt* ***zusammenhängend****, wenn es von jedem Knoten* u *in* G *zu jedem Knoten* v *in* G *einen Weg gibt.*

f) *Eine Knotenmenge* $U \subseteq V$ *heißt* ***stabil*** *oder* ***unabhängig****, wenn keine Kante in* G *beide Endpunkte in* U *hat, d.h. es gilt*

$E \cap \binom{U}{2} = \varnothing$. *Die* ***Stabilitätszahl*** *ist*

$$\alpha(G) = \max\{\|U\| \mid U \text{ ist stabile Menge in } G\}.$$

g) *Eine Knotenmenge $U \subseteq V$ heißt* ***Clique****, wenn jede Kante mit beiden Endpunkten in U in E ist, d.h. es gilt $\binom{U}{2} \subseteq E$. Die* ***Cliquenzahl*** *ist*

$$\omega(G) = \max\{\|U\| \mid U \text{ ist Clique in } G\}.$$

h) *Eine Knotenmenge $U \subseteq V$ heißt* ***Kantenüberdeckung*** *(engl. vertex cover), wenn jede Kante $e \in E$ mindestens einen Endpunkt in U hat, d.h. es gilt $e \cap U \neq \varnothing$ für alle Kanten $e \in E$. Die* ***Überdeckungszahl*** *ist*

$$\beta(G) = \min\{\|U\| \mid U \text{ ist eine Kantenüberdeckung in } G\}.$$

Für einen gegebenen Graphen G und eine Zahl $k \geq 1$ betrachten wir die folgenden Fragestellungen:

Clique: Hat G eine Clique der Größe k?

Matching: Hat G ein Matching der Größe k?

Independent Set (IS): Hat G eine stabile Menge der Größe k?

Vertex Cover (VC): Hat G eine Kantenüberdeckung der Größe k?

Satz 197.

- Clique, IS *und* VC *sind* NP*-vollständig.*
- Matching *ist in* P *entscheidbar (ohne Beweis).*

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass IS NP-hart ist. Hierzu reduzieren wir 3-Sat auf IS. Sei $F = \{C_1, \ldots, C_m\}$ mit $C_i = \{l_{i,1}, \ldots, l_{i,k_i}\}$ für $i = 1, \ldots, m$ eine 3-KNF-Formel über den Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Betrachte den Graphen $G = (V, E)$ mit

$$V = \{v_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k_i\} \text{ und}$$
$$E = \left\{\{v_{s,t}, v_{u,v}\} \in \binom{V}{2} \,\middle|\, s = u \text{ oder } l_{st} \text{ ist komplementär zu } l_{uv}\right\}.$$

Dabei heißen zwei Literale ***komplementär***, wenn das eine die Negation des anderen ist. Nun gilt

$$\begin{aligned} F \in \text{3-Sat} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{es gibt eine Belegung, die in jeder Klausel } C_i \text{ mindestens ein Literal wahr macht} \\ &\Leftrightarrow \quad \text{es gibt } m \text{ Literale } l_{1,j_1}, \ldots, l_{m,j_m}, \text{ die paarweise nicht komplementär sind} \\ &\Leftrightarrow \quad \text{es gibt } m \text{ Knoten } v_{1,j_1}, \ldots, v_{m,j_m}, \text{ die nicht durch Kanten verbunden sind} \\ &\Leftrightarrow \quad G \text{ besitzt eine stabile Knotenmenge der Größe } m. \end{aligned}$$

Als nächstes reduzieren wir IS auf Clique. Es ist leicht zu sehen, dass jede Clique in einem Graphen $G = (V, E)$ eine stabile Menge in dem zu G komplementären Graphen $\bar{G} = (V, \bar{E})$ mit $\bar{E} = \binom{V}{2} \setminus E$ ist und umgekehrt. Daher lässt sich IS mittels

$$f : (G, k) \mapsto (\bar{G}, k)$$

auf Clique reduzieren. Schließlich ist eine Menge I offenbar genau dann stabil, wenn ihr Komplement $V \setminus I$ eine Kantenüberdeckung ist. Daher lässt sich IS mittels

$$f : (G, k) \mapsto (G, n(G) - k)$$

auf VC reduzieren. ∎

7.3.2 Färbung von Graphen

Definition 198. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und sei $k \in \mathbb{N}$.*

a) Eine Abbildung $f\colon V \to \mathbb{N}$ heißt **Färbung** *von G, wenn $f(u) \neq f(v)$ für alle $\{u, v\} \in E$ gilt.*

b) G heißt **k-färbbar**, *falls eine Färbung $f\colon V \to \{1, \ldots, k\}$ existiert.*

c) Die **chromatische Zahl** *ist*

$$\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ ist } k\text{-färbbar}\}.$$

k-Färbbarkeit (k-Coloring):

Gegeben: Ein Graph G.
Gefragt: Ist G k-färbbar?

Um zu zeigen, dass 3-Coloring NP-vollständig ist, reduzieren wir NaeSat auf 3-Coloring. Die Reduktion von CirSat auf 3-Sat lässt sich nämlich leicht zu einer Reduktion von CirSat auf NaeSat modifizieren, weshalb NaeSat (wie 3-Sat) NP-vollständig ist.

Satz 199. NaeSat *ist* NP*-vollständig.*

Beweis. Es ist klar, dass NaeSat $\in$ NP liegt. Die Reduktion $s \mapsto F_s$ von CirSat auf 3-Sat aus vorigem Beweis erfüllt bereits die folgenden Bedingungen:

- Ist $s(a) = 1$, so können wir a zu einer erfüllenden Belegung ab von F_s erweitern, d.h. unter ab wird in jeder Klausel von F_s ein Literal wahr.
- Tatsächlich wird unter der Belegung ab in jeder Dreierklausel von F_s auch bereits ein Literal falsch.

Letzteres ist leicht zu sehen, da ab für jedes Und-Gatter g_i nicht nur die Dreierklausel $\{\bar{y}_i, y_j, y_k\}$, sondern auch die Klauseln $\{\bar{y}_j, y_i\}$ und $\{\bar{y}_k, y_i\}$ erfüllt. Diese verhindern nämlich, dass ab alle Literale der Dreierklausel $\{\bar{y}_i, y_j, y_k\}$ erfüllt. Entsprechend verhindern die zu einem Oder-Gatter g_i gehörigen Klauseln $\{y_j, \bar{y}_i\}$ und $\{y_k, \bar{y}_j\}$, dass ab alle Literale der Dreierklausel $\{y_i, \bar{y}_j, \bar{y}_k\}$ erfüllt.

Um zu erreichen, dass auch in den übrigen Klauseln C mit $\|C\| < 3$ ein Literal falsch wird, können wir einfach eine neue Variable z zu diesen Klauseln hinzufügen und z mit dem Wert 0 belegen. Sei also F'_s die 3-KNF Formel über den Variablen $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, z$, die die Klausel $\{y_m, z\}$ und für jedes Gatter g_i die Klauseln folgender Formel F'_i enthält:

Gatter g_i	Klauseln von F'_i
0	$\{\bar{y}_i, z\}$
1	$\{y_i, z\}$
x_j	$\{\bar{y}_i, x_j, z\}, \{\bar{x}_j, y_i, z\}$
$(\neg, j)$	$\{\bar{y}_i, \bar{y}_j, z\}, \{y_j, y_i, z\}$
$(\wedge, j, k)$	$\{\bar{y}_i, y_j, z\}, \{\bar{y}_i, y_k, z\}, \{\bar{y}_j, \bar{y}_k, y_i\}$
$(\vee, j, k)$	$\{\bar{y}_j, y_i, z\}, \{\bar{y}_k, y_i, z\}, \{\bar{y}_i, y_j, y_k\}$

Wie wir gesehen haben, lässt sich dann jede Belegung $a \in \{0,1\}^n$ der x-Variablen mit $s(a) = 1$ zu einer Belegung $abc \in \{0,1\}^{n+m+1}$ für F'_s erweitern, unter der in jeder Klausel von F'_s mindestens ein Literal wahr und mindestens ein Literal falsch wird, d.h. es gilt

$$s \in \text{CirSat} \Rightarrow F'_s \in \text{NaeSat}.$$

Für den Nachweis der umgekehrten Implikation sei nun $F'_s \in$ NaeSat angenommen. Dann existiert eine Belegung $abc \in \{0,1\}^{n+m+1}$ für F'_s, unter der in jeder Klausel ein wahres und ein falsches Literal vorkommen. Da dies auch unter der komplementären Belegung $\overline{abc}$ der Fall ist, können wir $c = 0$ annehmen. Dann erfüllt aber die Belegung ab die Formel F_s und damit folgt $s(a) = 1$, also $s \in$ CirSat. ∎

Satz 200.

(i) 1-Coloring *und* 2-Coloring *sind in* P *entscheidbar.*

(ii) 3-Coloring *ist* NP*-vollständig.*

Beweis. Es ist leicht zu sehen, dass 1-Coloring und 2-Coloring in P und 3-Coloring in NP entscheidbar sind. Zum Nachweis, dass 3-Coloring NP-hart ist, reduzieren wir NaeSat auf 3-Coloring. Sei eine 3-KNF-Formel $F = \{C_1, \ldots, C_m\}$ über den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ mit Klauseln

$$C_j = \{l_{j,1}, \ldots, l_{j,k_j}\},\ k_j \leq 3$$

gegeben. Wir können annehmen, dass F keine Einerklauseln enthält. Wir konstruieren einen Graphen $G_F = (V, E)$, der genau dann 3-färbbar ist, wenn $F \in$ NaeSat ist. Wir setzen

$$V = \{s, x_1, \ldots, x_n, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\} \cup \{v_{jk} | 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq k_j\}$$

und

$$E = \Big\{\{s, x_i\}, \{s, \bar{x}_i\}, \{x_i, \bar{x}_i\} \,\Big|\, 1 \leq i \leq n\Big\} \cup \Big\{\{s, v_{jk}\} \,\Big|\, k_j = 2\Big\} \cup \Big\{\{v_{jk}, v_{jl}\} \,\Big|\, k \neq l\Big\} \cup \Big\{\{v_{jk}, x_i\} \,\Big|\, l_{jk} = \bar{x}_i\Big\} \cup \Big\{\{v_{jk}, \bar{x}_i\} \,\Big|\, l_{jk} = x_i\Big\}.$$

Sei $a = a_1 \ldots a_n$ eine Belegung für F, unter der in jeder Klausel $C_j = \{l_{j1}, \ldots, l_{jk_j}\}$ ein Literal wahr und eines falsch wird. Wir können annehmen, dass $l_{j1}(a) = 0$ und $l_{j2}(a) = 1$ ist. Dann lässt sich G_F wie folgt mit den 3 Farben $0, 1, 2$ färben:

Knoten v	s	x_i	$\bar{x}_i$	v_{j1}	v_{j2}	v_{j3} (falls $k_j = 3$)
Farbe $c(v)$	2	a_i	$\bar{a}_i$	0	1	2

Ist umgekehrt $c : V \to \{0, 1, 2\}$ eine 3-Färbung von G_F, dann können wir annehmen, dass $c(v) = 2$ ist. Dies hat zur Folge, dass $\{c(x_i), c(\bar{x}_i)\} = \{0, 1\}$ für $i = 1, \ldots, n$ ist. Zudem müssen die Knoten $v_{j1}, \ldots, v_{jk_j}$ im Fall $k_j = 2$ mit 0 und 1 und im Fall $k_j = 3$ mit allen drei Farben 0, 1 und 2 gefärbt sein. Wir können annehmen, dass $c(v_{j1}) = 0$ und $c(v_{j2}) = 1$ ist. Wegen $\{v_{jk}, \bar{l}_{jk}\} \in E$ muss $c(v_{jk}) \neq c(\bar{l}_{jk})$ für $k = 1, \ldots, k_j$ und daher $c(v_{jk}) = c(l_{jk})$ für $k = 1, 2$ gelten. Also macht die Belegung $a = c(x_1) \ldots c(x_n)$ die Literale l_{j1}, $j = 1, \ldots, m$, falsch und die Literale l_{j2}, $j = 1, \ldots, m$, wahr. Insgesamt gilt also

$$F \in \text{NaeSat} \Leftrightarrow G_F \in \text{3-Coloring}.$$

■

7.3.3 Euler- und Hamiltonkreise

Definition 201. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph und sei $s = (v_0, v_1, \ldots, v_l)$ eine Folge von Knoten mit $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für $i = 0, \ldots, l-1$.*

a) s heißt **Eulerlinie** *(auch* **Eulerzug** *oder* **Eulerweg***) in G, falls s jede Kante in E genau einmal durchläuft, d.h. es gilt $\big\{\{v_i, v_{i+1}\} \mid i = 0, \ldots, l-1\big\} = E$ und $l = \|E\|$.*

b) Gilt zudem $v_l = v_0$, so heißt s **Eulerkreis** *(auch* **Eulerzyklus** *oder* **Eulertour***).*

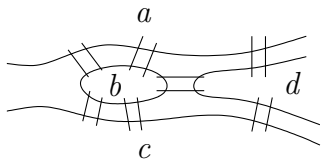
c) s heißt **Hamiltonpfad** *in G, falls s jeden Knoten in V genau einmal durchläuft, d.h. es gilt $\{v_0, \ldots, v_l\} = V$ und $l = \|V\| - 1$.*

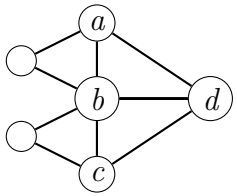
d) Ist zudem $\{v_0, v_l\} \in E$, d.h. $s' = (v_0, v_1, \ldots, v_l, v_0)$ ist ein Kreis, so heißt s' **Hamiltonkreis***.*

Die angegebenen Definitionen lassen sich unmittelbar auf Digraphen übertragen, indem wir jede darin vorkommende ungerichtete Kante $\{u, v\}$ durch die gerichtete Kante (u, v) ersetzen.

Beispiel 202 (Das Königsberger Brückenproblem)**.**

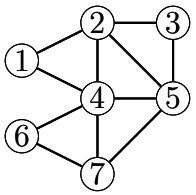
Gibt es einen Spaziergang über alle 7 Brücken, bei dem keine Brücke mehrmals überquert wird und der zum Ausgangspunkt zurückführt?

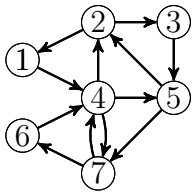




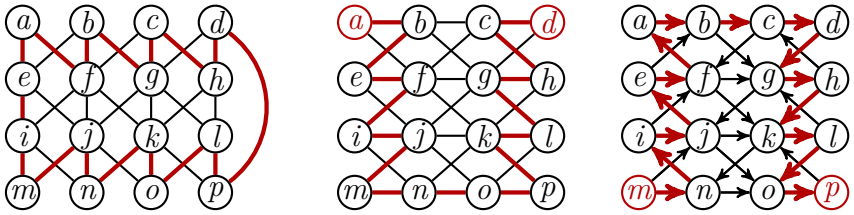
Diese Frage wurde von Euler (1707 – 1783) durch Betrachtung des nebenstehenden Graphen beantwortet. Dieser Graph hat offenbar genau dann einen Eulerkreis, wenn die Antwort „ja“ ist. (Wir werden gleich sehen, dass die Antwort „nein“ ist.) ◁

Beispiel 203.
Der nebenstehende Graph besitzt die Eulerlinie $(4, 1, 2, 3, 5, 7, 6, 4, 5, 2, 4, 7)$*, aber keinen Eulerkreis.*





Der nebenstehende Digraph besitzt den Eulerkreis $s = (1, 4, 5, 2, 3, 5, 7, 4, 7, 6, 4, 2, 1)$.
Es folgen ein Hamiltonkreis in einem Graphen sowie ein a-d-Hamiltonpfad in einem Graphen und ein m-p-Hamiltonpfad in einem Digraphen:



◁

Wir betrachten für einen gegebenen Graphen (bzw. Digraphen) G und zwei Knoten s und t folgende Entscheidungsprobleme:

Das Eulerlinienproblem (EulerPath bzw. DiEulerPath)
Hat G eine Eulerlinie von s nach t?

Das Hamiltonpfadproblem (HamPath bzw. DiHamPath)
Hat G einen Hamiltonpfad von s nach t?

Zudem betrachten wir für einen gegebenen Graphen (bzw. Digraphen) G die folgenden Probleme:

Das Eulerkreisproblem (EulerCycle bzw. DiEulerCycle)
Hat G einen Eulerkreis?

Das Hamiltonkreisproblem (HamCycle bzw. DiHamCycle)
Hat G einen Hamiltonkreis?

Satz 204 (Euler, 1736)**.** *Sei G ein zusammenhängender Graph.*

(i) G besitzt genau dann einen Eulerkreis, wenn alle seine Knoten geraden Grad haben.

(ii) G besitzt im Fall $s \neq t$ genau dann eine Eulerlinie von s nach t, wenn s und t ungeraden Grad und alle übrigen Knoten geraden Grad haben.

Beweis.

(i) Falls G einen Eulerkreis s besitzt, existiert zu jeder Kante, auf der s einen Knoten erreicht, eine weitere Kante, auf der s den Knoten wieder verlässt. Daher hat jeder Knoten geraden Grad.

Ist umgekehrt G zusammenhängend und hat jeder Knoten geraden Grad, so können wir wie folgt einen Eulerkreis s konstruieren:

Berechnung eines Eulerkreises in $G = (V, E)$

1 Wähle $u \in V$ beliebig und initialisiere s zu $s = (u)$
2 Wähle einen beliebigen Knoten u auf dem Weg s, der mit einer unmarkierten Kante verbunden ist.
3 Folge ausgehend von u den unmarkierten Kanten auf einem beliebigen Weg z solange wie möglich und markiere dabei jede durchlaufene Kante. (Da von jedem erreichten Knoten $v \neq u$ ungerade viele markierte Kanten ausgehen, muss der Weg z zum Ausgangspunkt u zurückführen.)

4 Füge den Zyklus z an der Stelle u in s ein.
5 Wenn noch nicht alle Kanten markiert sind, gehe zu 2.
6 **Output**: s

(ii) Da G im Fall $s \neq t$ genau dann eine Eulerlinie von s nach t hat, wenn der Graph $G' = (V \cup \{u_{neu}\}, E \cup \{\{t, u_{neu}\}, \{u_{neu}, s\}\})$ einen Eulerkreis hat, folgt dies aus Teil (i) des Satzes.

■

Ganz ähnlich lässt sich ein entsprechender Satz für Digraphen beweisen. Zuvor übertragen wir die Begriffe Weg, Pfad usw. von Graphen auf Digraphen.

Definition 205. *Sei $G = (V, E)$ ein Digraph, d.h. $E \subseteq V \times V = \{(u, v) \mid u, v \in V\}$, wobei E auch Schlingen (u, u) enthalten kann, und sei $v \in V$ ein Knoten.*

a) Die **Nachfolgermenge** *von v ist $N^+(v) = \{u \in V \mid (v, u) \in E\}$.*
b) Die **Vorgängermenge** *von v ist $N^-(v) = \{u \in V \mid (u, v) \in E\}$.*
c) Die **Nachbarmenge** *von v ist $N(v) = N^+(v) \cup N^-(v)$.*
d) Der **Ausgangsgrad** *von v ist $\deg^+(v) = \|N^+(v)\|$.*
e) Der **Eingangsgrad** *von v ist $\deg^-(v) = \|N^-(v)\|$.*
f) Der **Grad** *von v ist $\deg(v) = \deg^+(v) + \deg^-(v)$.*
g) Ein **(gerichteter) v_0-v_j-Weg** *in G ist eine Folge von Knoten $(v_0, \ldots, v_j)$ mit $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für $i = 0, \ldots, j-1$.*
h) Ein **(gerichteter) Zyklus** *in G ist ein gerichteter u-v-Weg der Länge $j \geq 1$ mit $u = v$.*
i) Ein gerichteter Weg heißt **einfach** *oder* **(gerichteter) Pfad**, *falls alle durchlaufenen Knoten paarweise verschieden sind.*
j) Ein **(gerichteter) Kreis** *in G ist ein gerichteter Zyklus $(v_0, \ldots, v_{j-1}, v_0)$, für den $v_0, \ldots, v_{j-1}$ paarweise verschieden sind.*
k) G heißt **stark zusammenhängend**, *wenn es von jedem Knoten u in G zu jedem Knoten v in G einen Weg gibt.*

Satz 206 (Euler, 1736)**.** *Sei $G = (V, E)$ ein stark zusammenhängender Digraph.*

(i) G besitzt genau dann einen Eulerkreis, wenn für jeden Knoten u in V der Ein- und Ausgangsgrad übereinstimmen.
(ii) G besitzt genau dann eine Eulerlinie von s nach t, wenn für jeden Knoten $u \in V \setminus \{s, t\}$ der Ein- und Ausgangsgrad übereinstimmen und $\deg^+(s) - \deg^-(s) = \deg^-(t) - \deg^+(t) = 1$ ist.

Korollar 207. *Die Probleme* EulerPath, EulerCycle, DiEulerPath *und* DiEulerCycle *sind alle in* P *entscheidbar.*

Beim Problem des Handlungsreisenden sind die Entfernungen d_{ij} zwischen n Städten $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ gegeben. Gesucht ist eine Rundreise $(i_1, \ldots, i_n)$ mit minimaler Länge $d_{i_1,i_2} + \cdots + d_{i_{n-1},i_n} + d_{i_n,i_1}$, die jede Stadt genau einmal besucht. Die Entscheidungsvariante dieses Optimierungsproblems ist wie folgt definiert.

Problem des Handlungsreisenden (TSP; *traveling-salesman-problem*)

Gegeben: Eine $n \times n$ Matrix $D = (d_{i,j}) \in \mathbb{N}^{n \times n}$ und eine Zahl k.
Gefragt: Existiert eine Permutation $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, so dass die Rundreise $(\pi(1), \ldots, \pi(n))$ die Länge $\leq k$ hat?

Wir zeigen nun, dass die Probleme DiHamPath, HamPath, DiHamCycle, HamCycle und TSP alle NP-vollständig sind. Es ist leicht zu sehen, dass diese Probleme in NP entscheidbar sind. Zum Nachweis der NP-Härte zeigen wir folgende Reduktionen:

$$\text{3-Sat} \leq^p \text{DiHamPath} \leq^p \begin{matrix}\text{HamPath,}\\ \text{DiHamCycle}\end{matrix} \leq^p \text{HamCycle} \leq^p \text{TSP}.$$

Wir reduzieren zuerst HamCycle auf TSP.

Satz 208. HamCycle $\leq^p$ TSP.

Beweis. Sei ein Graph $G = (V, E)$ gegeben. Wir können annehmen, dass $V = \{1, \ldots, n\}$ ist. Dann lässt sich G in Polynomialzeit auf die TSP Instanz (D, n) mit $D = (d_{i,j})$ und

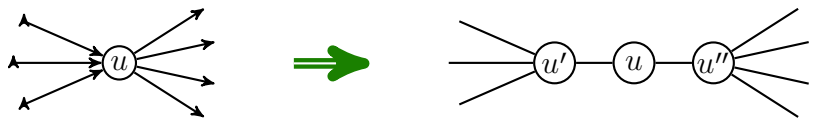
$$d_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \{i,j\} \in E, \\ 2, & \text{sonst,} \end{cases}$$

transformieren. Diese Reduktion ist korrekt, da G genau dann einen Hamiltonkreis hat, wenn es in dem Distanzgraphen D eine Rundreise $(\pi(1), \ldots, \pi(n))$ der Länge $L(\pi) \leq n$ gibt. ■

Als nächstes reduzieren wir DiHamCycle auf HamCycle.

Satz 209. DiHamCycle $\leq^p$ HamCycle.

Beweis. Wir transformieren wir einen Digraphen G auf einen Graphen G', indem wir lokal für jeden Knoten $u \in V$ die folgende Ersetzung durchführen:



Dann ist klar, dass die Funktion $G \mapsto G'$ in FP berechenbar ist, und G genau dann einen Hamiltonkreis enthält, wenn dies auf G' zutrifft. Ähnlich lässt sich auch DiHamPath auf HamPath reduzieren. ■

Satz 210. DiHamPath $\leq^p$ DiHamCycle.

Beweis. Um DiHamPath auf DiHamCycle zu reduzieren, transformieren wir einen gegebenen Digraphen $G = (V, E)$ mit zwei ausgezeichneten Knoten $s, t \in V$ in den Digraphen $G' = (V', E')$ mit

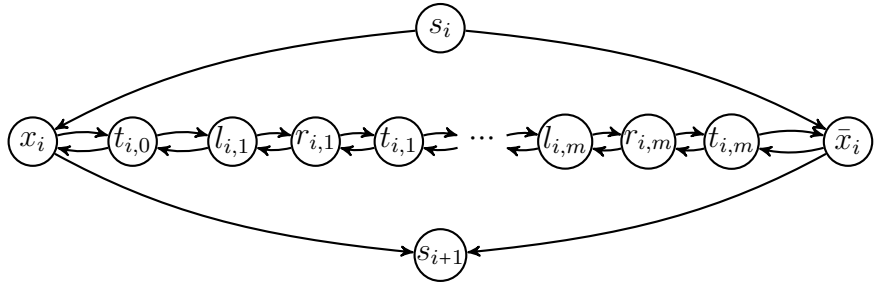
$$V' = V \cup \{u_{\text{neu}}\} \text{ und}$$
$$E' = E \cup \{(t, u_{\text{neu}}), (u_{\text{neu}}, s)\}.$$

Offenbar ist G' in Polynomialzeit aus G berechenbar und besitzt genau dann einen Hamiltonkreis, wenn G einen s-t-Hamiltonpfad besitzt. Ähnlich lässt sich auch HamPath auf HamCycle reduzieren. ■

Satz 211. 3-Sat $\leq^p$ DiHamPath.

Beweis. Sei $F = \{C_1, \ldots, C_m\}$ mit $C_j = \{l_{j1}, \ldots, l_{jk_j}\}$ für $j = 1, \ldots, m$ eine 3-KNF-Formel über den Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Wir transformieren F in Polynomialzeit in einen Digraphen $G_F = (V, E)$ mit zwei ausgezeichneten Knoten s und t, der genau dann einen hamiltonschen s-t-Pfad besitzt, wenn F erfüllbar ist.

Jede Klausel C_j repräsentieren wir durch einen Knoten c_j und jede Variable x_i repräsentieren wir durch folgenden Graphen X_i.



Die Knotenmenge V von G_F ist also

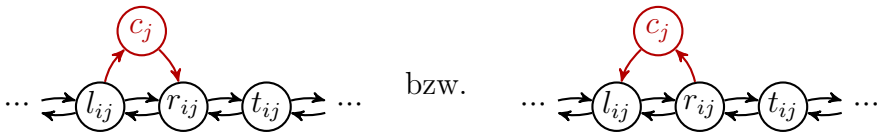
$$V = \{c_1, \ldots, c_m\} \cup \{s_1, \ldots, s_{n+1}\} \cup \{x_1, \bar{x}_1, \ldots, x_n, \bar{x}_n\}$$
$$\cup \bigcup_{i=1}^{n} \{t_{i,0}, l_{i,1}, r_{i,1}, t_{i,1}, \ldots, l_{i,m}, r_{i,m}, t_{i,m}\}.$$

Dabei haben die Graphen X_{i-1} und X_i den Knoten s_i gemeinsam. Als Startknoten wählen wir $s = s_1$ und als Zielknoten $t = s_{n+1}$.

Ein Pfad von s nach t kann ausgehend von jedem Knoten s_i $(i = 1, \ldots, n)$ entweder zuerst den Knoten x_i oder zuerst den Knoten $\bar{x}_i$ besuchen. Daher können wir jedem s-t-Pfad P eine Belegung $b_P = b_1 \ldots b_n$ zuordnen mit $b_i = 1$ gdw. P den Knoten x_i vor dem Knoten $\bar{x}_i$ besucht.

Die Klauselknoten c_j verbinden wir mit den Teilgraphen X_i so, dass ein s-t-Pfad P genau dann einen „Abstecher“ nach c_j machen kann, wenn die Belegung b_P die Klausel C_j erfüllt.

Hierzu fügen wir zu E für jedes Literal $l \in C_j$ im Fall $l = x_i$ die beiden Kanten (l_{ij}, c_j) und (c_j, r_{ij}), und im Fall $l = \bar{x}_i$ die Kanten (r_{ij}, c_j) und (c_j, l_{ij}) hinzu:

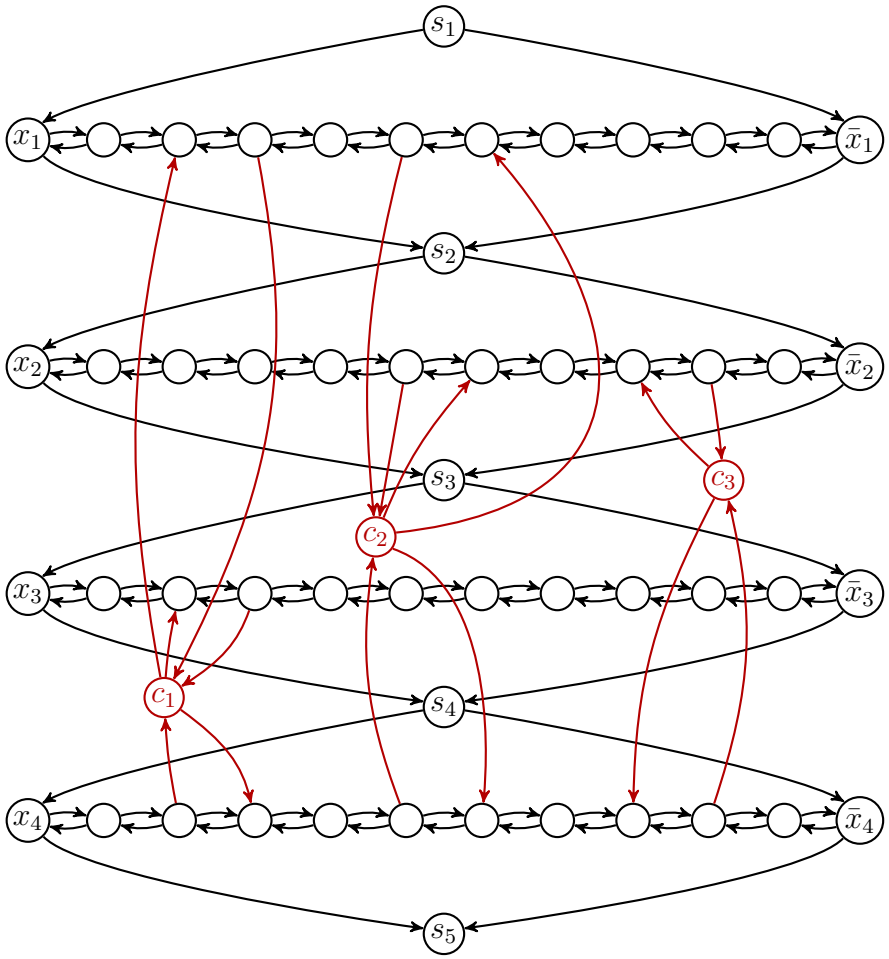


Man beachte, dass einem s-t-Pfad P genau dann ein Abstecher über diese Kanten zu c_j möglich ist, wenn die Belegung b_P das Literal l wahr macht.

Nun ist klar, dass die Reduktionsfunktion $F \mapsto (G_F, s, t)$ in Polynomialzeit berechenbar ist. Es bleibt also zu zeigen, dass F genau dann erfüllbar ist, wenn in G_F ein Hamiltonpfad von $s = s_1$ nach $t = s_{n+1}$ existiert.

Falls $F(b) = 1$ ist, so lässt sich der zu b gehörige s-t-Pfad P wie folgt zu einem Hamiltonpfad erweitern. Wir wählen in jeder Klausel C_j ein wahres Literal $l = x_i$ bzw. $l = \bar{x}_i$ und bauen in den Pfad P einen Abstecher vom Knotenpaar l_{ij}, r_{ij} zum Klauselknoten c_j ein.

Ist umgekehrt P ein s-t-Hamiltonpfad in G_F, so müssen der Vorgänger- und Nachfolgerknoten jedes Klauselknotens c_j ein Paar l_{ij}, r_{ij} bilden, da P andernfalls nicht beide Pufferknoten $t_{i,j-1}$ und $t_{i,j}$ besuchen kann. Da aber P alle Klauselknoten besucht und ausgehend von dem Paar l_{ij}, r_{ij} nur dann ein Abstecher zu c_j möglich ist, wenn die Belegung b_P die Klausel C_j erfüllt, folgt $F(b_P) = 1$. ■



Beispiel 212. *Die* 3-SAT-*Instanz*

$$F = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4)$$

lässt sich auf oben abgebildeten Digraphen G mit Startknoten $s = s_1$ und Zielknoten $t = s_5$ reduzieren. Der erfüllenden Belegung $b = 0110$ entspricht beispielsweise der Hamiltonpfad, der von s_1 über $\bar{x}_1$, c_1, x_1, s_2, x_2, c_2, $\bar{x}_2$, s_3, x_3, $\bar{x}_3$, s_4, $\bar{x}_4$, c_3 und x_4 nach s_5 geht. ◁

7.4 Das Rucksack-Problem

Wie schwierig ist es, einen Rucksack der Größe w mit einer Auswahl aus k Gegenständen der Größe $u_1, \ldots, u_k$ möglichst voll zu packen? Dieses Optimierungsproblem lässt sich leicht auf folgendes Entscheidungsproblem reduzieren.

Rucksack-Problem (Rucksack):

Gegeben: Eine Folge $(u_1, \ldots, u_k, v, w)$ von natürlichen Zahlen.
Gefragt: Ex. eine Auswahl $S \subseteq \{1, \ldots, k\}$ mit $v \leq \sum_{i \in S} u_i \leq w$?

Beim SubsetSum-Problem möchte man dagegen nur wissen, ob der Rucksack randvoll gepackt werden kann.

SubsetSum:

Gegeben: Eine Folge $(u_1, \ldots, u_k, w)$ von natürlichen Zahlen.
Gefragt: Ex. eine Auswahl $S \subseteq \{1, \ldots, k\}$ mit $\sum_{i \in S} u_i = w$?

Satz 213. Rucksack *und* SubsetSum *sind* NP*-vollständig.*

Beweis. Es ist leicht zu sehen, dass beide Probleme in NP enthalten sind. Zum Nachweis der NP-Härte zeigen wir die folgenden Reduktionen:

$$\text{3-Sat} \leq^p \text{SubsetSum} \leq^p \text{Rucksack}.$$

Da SubsetSum einen Spezialfall des Rucksack-Problems darstellt, lässt es sich leicht darauf reduzieren:

$$(u_1, \ldots, u_k, w) \mapsto (u_1, \ldots, u_k, w, w).$$

Es bleibt also 3-Sat $\leq^p$ SubsetSum zu zeigen. Sei $F = \{C_1, \ldots, C_m\}$ eine 3-KNF-Formel über den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ mit $C_j = \{l_{j1}, \ldots, l_{jk_j}\}$ für $j = 1, \ldots, m$. Betrachte die Reduktionsfunktion

$$f : F \mapsto (u_1, \ldots, u_n, u'_1, \ldots, u'_n, v_1, \ldots, v_m, v'_1, \ldots, v'_m, w),$$

wobei u_i und u'_i die Dezimalzahlen

$$u_i = b_{i1} \ldots b_{im} 0^{i-1} 1 0^{n-i-1} \text{ und } u'_i = b'_{i1} \ldots b'_{im} 0^{i-1} 1 0^{n-i-1}$$

mit

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & x_i \in C_j, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases} \quad \text{und} \quad b'_{ij} = \begin{cases} 1, & \bar{x}_i \in C_j, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

und $v_j = v'_j = 0^{j-1} 1 0^{m-j-1} 0^n$ sind. Die Zielsumme w setzen wir auf den Wert $w = \underbrace{3 \ldots 3}_{m\text{-mal}} \underbrace{1 \ldots 1}_{n\text{-mal}}$.

Sei nun $a = a_1 \ldots a_n$ eine erfüllende Belegung für F. Da a in jeder Klausel mindestens ein und höchstens drei Literale wahr macht, hat die Zahl

$$\sum_{a_i = 1} u_i + \sum_{a_i = 0} u'_i$$

eine Dezimaldarstellung der Form $b_1 \ldots b_m 1 \ldots 1$ mit $1 \leq b_j \leq 3$ für $j = 1, \ldots, m$. Durch Addition von

$$\sum_{b_j \leq 2} v_j + \sum_{b_j = 1} v'_j$$

erhalten wir den gewünschten Wert w. Dies zeigt, dass $F \in$ 3-Sat die Zugehörigkeit von $f(F) \in$ SubsetSum impliziert. Für die umgekehrte Implikation sei $S = P \cup N \cup I \cup J$ eine Auswahlmenge für die SubsetSum-Instanz $f(F)$ mit

$$\sum_{i \in P} u_i + \sum_{i \in N} u'_i + \sum_{j \in I} v_j + \sum_{j \in J} v'_j = \underbrace{3 \ldots 3}_{m\text{-mal}} \underbrace{1 \ldots 1}_{n\text{-mal}}.$$

Da die Teilsumme $\sum_{j \in I} v_j + \sum_{j \in J} v'_j$ die Form $c_1 \ldots c_m 0 \ldots 0$ mit $c_j \leq 2$ hat, muss die Teilsumme $\sum_{i \in P} u_i + \sum_{i \in N} u'_i$ die Form $b_1 \ldots b_m 1 \ldots 1$ mit $b_j \geq 1$ haben. Da keine Überträge auftreten, muss also $P = \{1, \ldots, n\} - N$ gelten und jede Klausel C_j mindestens ein Literal aus

der Menge $\{x_i \mid i \in P\} \cup \{\bar{x}_i \mid i \in N\}$ enthalten. Folglich wird F von folgender Belegung $a = a_1 \dots a_n$ erfüllt:

$$a_i = \begin{cases} 1, & i \in P, \\ 0, & i \in N. \end{cases}$$

Damit haben wir die Korrektheit von f gezeigt. Da f zudem in Polynomialzeit berechenbar ist, folgt 3-SAT $\leq^p$ SUBSETSUM. ■

Beispiel 214. *Betrachte die 3-KNF Formel*

$$F = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4).$$

Die zu F gehörige SUBSETSUM*-Instanz $f(F)$ ist*

$$(u_1, u_2, u_3, u_4, u_1', u_2', u_3', u_4', v_1, v_2, v_3, v_1', v_2', v_3', w)$$

mit

$$\begin{aligned} u_1 &= 010\,1000, & u_1' &= 100\,1000, & v_1 &= v_1' = 100\,0000, \\ u_2 &= 010\,0100, & u_2' &= 001\,0100, & v_2 &= v_2' = 010\,0000, \\ u_3 &= 000\,0010, & u_3' &= 100\,0010, & v_3 &= v_3' = 001\,0000, \\ u_4 &= 110\,0001, & u_4' &= 001\,0001, \end{aligned}$$

sowie $w = 333\,1111$. Der erfüllenden Belegung $a = 0100$ entspricht dann die Auswahl $(u_1', u_2, u_3', u_4', v_1, v_2, v_2', v_3, v_3')$. ◁

7.5 Ganzzahlige lineare Programmierung

In vielen Anwendungen tritt das Problem auf, eine ganzzahlige Lösung für ein System linearer Ungleichungen zu finden.

Ganzzahlige Programmierung (IP; *integer programming*)

Gegeben: Eine ganzzahlige $m \times n$ Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ und ein ganzzahliger Vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^m$.

Gefragt: Existiert ein ganzzahliger Vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n$ mit $A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$ wobei $\geq$ komponentenweise zu verstehen ist.

Satz 215. IP *ist* NP*-hart.*

Beweis. Wir reduzieren 3-SAT auf IP. Sei $F = \{C_1, \dots, C_m\}$ mit $C_j = \{l_{j1}, \dots, l_{jk_j}\}$ für $j = 1, \dots, m$ eine 3-KNF-Formel über den Variablen $x_1, \dots, x_n$. Wir transformieren F in ein Ungleichungssystem $A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$ für den Lösungsvektor $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$, das

- für $i = 1, \dots, n$ die vier Ungleichungen

$$x_i + \bar{x}_i \geq 1, \quad -x_i - \bar{x}_i \geq -1, \quad x_i \geq 0, \quad \bar{x}_i \geq 0 \qquad (*)$$

- und für jede Klausel $C_j = \{l_{j1}, \dots, l_{jk_j}\}$ folgende Ungleichung enthält:

$$l_{j1} + \dots + l_{jk_j} \geq 1. \qquad (**)$$

Die Ungleichungen $(*)$ sind für ganzzahlige $x_i, \bar{x}_i$ genau dann er- füllt, wenn x_i den Wert 0 und $\bar{x}_i$ den Wert 1 hat oder umgekehrt. Die Klauselungleichungen $(**)$ stellen sicher, dass mindestens ein Literal in jeder Klausel C_j wahr wird. Nun ist leicht zu sehen, dass jede Lösung $\boldsymbol{x}$ von $A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$ einer erfüllenden Belegung von F entspricht und umgekehrt. ■

Bemerkung 216.

- *Es ist nicht leicht zu sehen, dass IP in* NP *entscheidbar ist.*
- *Ein nichtdeterministischer Algorithmus kann zwar eine Lösung raten, aber a priori ist nicht klar, ob eine Lösung $\boldsymbol{x}$ ex., deren Binärkodierung polynomiell in der Länge der Eingabe $(A, \boldsymbol{b})$ ist.*
- *Mit Methoden der linearen Algebra lässt sich jedoch zeigen, dass jede lösbare IP-Instanz $(A, \boldsymbol{b})$ auch eine Lösung $\boldsymbol{x}$ hat, deren Kodierung polynomiell in der Länge von $(A, \boldsymbol{b})$ ist.*
- *Wenn wir nicht verlangen, dass die Lösung $\boldsymbol{x}$ der IP-Instanz ganzzahlig ist, dann spricht man von einem* ***linearen Programm****.*

- *Für* **LP** *(Lineare Programmierung) gibt es Polynomialzeitalgorithmen (von Khachiyan 1979 und von Karmarkar 1984).*

7.6 Max-Sat Probleme

In manchen Anwendungen genügt es nicht, festzustellen, dass eine KNF-Formel F nicht erfüllbar ist. Vielmehr möchte man wissen, wieviele Klauseln in F maximal erfüllbar sind. Die Schwierigkeit dieses Optimierungsproblems lässt sich durch folgendes Entscheidungsproblem charakterisieren.

Max-k-SAT:

Gegeben: Eine Formel F in k-KNF und eine Zahl l.
Gefragt: Existiert eine Belegung a, die mindestens l Klauseln in F erfüllt?

Man beachte, dass hierbei die Klauseln in F auch mehrfach vorkommen können (d.h. F ist eine ***Multimenge*** von Klauseln).

Satz 217.

(i) Max-1-Sat $\in$ P.

(ii) Max-2-Sat $\in$ NPC.

Beweis. Wir reduzieren 3-Sat auf Max-2-Sat. Für eine Dreierklausel $C = \{l_1, l_2, l_3\}$, in der die Variable v nicht vorkommt, sei $G(l_1, l_2, l_3, v)$ die 2-KNF Formel, die aus folgenden 10 Klauseln besteht:

$$\{l_1\}, \{l_2\}, \{l_3\}, \{v\}, \{\overline{l_1}, \overline{l_2}\}, \{\overline{l_2}, \overline{l_3}\}, \{\overline{l_1}, \overline{l_3}\}, \{l_1, \overline{v}\}, \{l_2, \overline{v}\}, \{l_3, \overline{v}\}$$

Dann lassen sich folgende 3 Eigenschaften von G leicht verifizieren:

- Keine Belegung von G erfüllt mehr als 7 Klauseln von G.
- Jede Belegung a von C mit $C(a) = 1$ ist zu einer Belegung a' von G erweiterbar, die 7 Klauseln von G erfüllt.
- Keine Belegung a von C mit $C(a) = 0$ ist zu einer Belegung a' von G erweiterbar, die 7 Klauseln von G erfüllt.

Ist nun F eine 3-KNF-Formel über den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ mit m Klauseln, so können wir annehmen, dass $C_j = \{l_{j1}, l_{j2}, l_{j3}\}$, $j = 1, \ldots, k$, die Dreier- und $C_{k+1}, \ldots, C_m$ die Einer- und Zweierklauseln von F sind. Wir transformieren F auf das Paar $g(F) = (F', m + 6k)$, wobei die 2-KNF Formel F' wie folgt aus F entsteht:

> Ersetze jede Dreierklausel $C_j = \{l_{j1}, l_{j2}, l_{j3}\}$ in F durch die 10 Klauseln der 2-KNF-Formel $G_j = G(l_{j1}, l_{j2}, l_{j3}, v_j)$.

Dann ist leicht zu sehen, dass g in FP berechenbar ist. Außerdem gilt folgende Äquivalenz:

$$F \in \text{3-Sat} \Leftrightarrow (F', m + 6k) \in \text{Max-2-Sat}.$$

Die Vorwärtsrichtung ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, dass jede erfüllende Belegung a für F zu einer Belegung a' für F' erweiterbar ist, die $7k + m - k = m + 6k$ Klauseln von F' erfüllt.

Für die Rückwärtsrichtung sei a eine Belegung, die mindestens $m + 6k$ Klauseln von F' erfüllt. Da a in jeder 10er-Gruppe G_j, $j = 1, \ldots, k$, nicht mehr als 7 Klauseln erfüllen kann, muss a in jeder 10er-Gruppe genau 7 Klauseln und zudem alle Klauseln C_j für $j = k + 1, \ldots, m$ erfüllen. Dies ist aber nur möglich, wenn a alle Klauseln C_j von F erfüllt. ■

7.7 Matchings und der Heiratssatz

Beim Heiratsproblem ist eine Gruppe V von heiratswilligen Personen gegeben, wobei $u, w \in V$ durch eine Kante verbunden sind, falls aus Sicht von u und w die Möglichkeit einer Heirat zwischen u und w besteht. Sind Vielehen ausgeschlossen, so lässt sich jedes mögliche Heiratsarrangement durch ein Matching beschreiben.

Definition 218. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph.*

a) *Zwei Kanten $e, e' \in E$ heißen* **unabhängig**, *falls $e \cap e' = \varnothing$ ist.*

b) *Eine Kantenmenge $M \subseteq E$ heißt* **Matching** *in G, falls die Kanten in M paarweise unabhängig sind.*

c) *Analog lassen sich d-dimensionale Matchings $M \subseteq E$ in einem* **d-uniformen Hypergraphen** *$G = (V, E)$ mit $E \subseteq \binom{V}{d}$ definieren.*

d) *Die* **Matchingzahl** *von G ist*

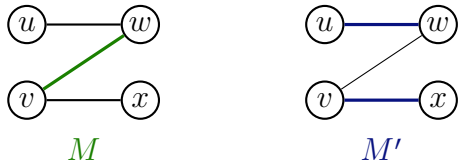
$$\mu(G) = \max\{\|M\| \mid M \text{ ist ein Matching in } G\}$$

e) *Ein Matching M der Größe $\|M\| = \mu(G)$ heißt* **optimal**.

f) *Ein Matching M heißt* **gesättigt**, *falls $M \cup \{e\}$ für keine Kante $e \in E \setminus M$ ein Matching ist.*

g) *Ein d-dimensionales Matching M heißt* **perfekt**, *falls $\|M\| = \lfloor \|V\|/d \rfloor$ ist.*

Beispiel 219. *Ein gesättigtes Matching muss nicht optimal sein:*



Das Matching $M = \{\{v, w\}\}$ ist gesättigt, da es sich nicht zu einem größeren Matching erweitern lässt. M ist jedoch nicht optimal, da $M' = \{\{v, x\}, \{u, w\}\}$ größer ist. Die Greedy-Methode, ausgehend von $M = \varnothing$ solange Kanten zu M hinzuzufügen, bis sich M nicht mehr zu einem größeren Matching erweitern lässt, funktioniert also nicht. ◁

In vielen Anwendungen geht es darum, ein möglichst großes Matching zu finden. Falls beim Heiratsproblem Homoehen ausgeschlossen sind, ist der resultierende Graph $G = (V, E)$ bipartit.

Definition 220. *Sei $G = (V, E)$ ein Graph.*

a) *Für $U, W \subseteq V$ bezeichne*

$$E(U, W) = \{\{u, w\} \in E \mid u \in U, w \in W\}$$

die Menge aller Kanten zwischen U und W in G.

b) *G heißt* **bipartit**, *falls sich V in zwei Teilmengen U und W mit $E(U, W) = E$ zerlegen lässt.*

c) *In diesem Fall notieren wir G auch in der Form $G = (U, W, E)$.*

d) *Für eine Knotenmenge $A \subseteq V$ und ein Matching M bezeichne*

$$A_M^+ = \left\{u \in A \,\middle|\, \exists v \in V : \{u, v\} \in M\right\}$$

die Menge aller von M in A überdeckten Knoten und $A_M^- = A - A_M^+$ bezeichne die Menge aller von M in A nicht überdeckten Knoten.

d-dimensionales Matching (d-Matching)

Gegeben: Ein d-uniformer Hypergraph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \geq 1$.
Gefragt: Gibt es in G ein Matching M der Größe $\|M\| \geq k$?

d-dimensionales perfektes Matching (d-PerfectMatch)

Gegeben: Ein d-uniformer Hypergraph $G = (V, E)$.
Gefragt: Gibt es in G ein perfektes Matching M?

Im Fall $d = 2$ schreiben wir auch einfach Matching bzw. PerfectMatch.

Bipartites Matching (BiMatch; *bipartite matching*)

Gegeben: Ein bipartiter Graph G und eine Zahl $k \geq 1$.
Gefragt: Gibt es in G ein Matching M der Größe $\|M\| \geq k$?

Satz 221.

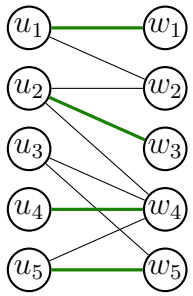
(i) *d-Matching, d-PerfectMatch und BiMatch sind für $d \leq 2$ in P entscheidbar.*

(ii) Für $d \geq 3$ sind d-Matching und d-PerfectMatch NP-*vollständig.*

Beispiel 222. *Der bipartite Graph G hat ein Matching $M = \{\{u_1, w_1\}, \{u_2, w_3\}, \{u_4, w_4\}, \{u_5, w_5\}\}$ der Größe 4. Die Nachbarschaft von $A = \{u_3, u_4, u_5\}$ ist*

$$N(A) = \{w_4, w_5\}.$$

Daher kann jedes Matching höchstens 2 der 3 Knoten in A und somit höchstens 4 der 5 Knoten in U überdecken. Dies zeigt, dass M optimal ist.



$G = (U, W, E)$

◁

Sei $A \subseteq U$ beliebig und sei M ein beliebiges Matching. Da M höchstens $\|N(A)\|$ Knoten in A überdecken kann, gilt

$$\|M\| \leq \|U - A\| + \|N(A)\| = \|U\| - (\|A\| - \|N(A)\|).$$

Folglich ist

$$\mu(G) \leq \|U\| - \max_{A \subseteq U} (\|A\| - \|N(A)\|).$$

Frage. *Ist diese Schranke in jedem bipartiten Graphen scharf?*

Anders ausgedrückt: Lässt sich die Optimalität von M immer durch Angabe einer Menge $A \subseteq U$ mit $\|U\| - \|M\| = \|A\| - \|N(A)\|$ beweisen?

Eine positive Antwort auf diese Frage gibt folgender Satz von Hall.

Satz 223 (Heiratssatz von Hall)**.**
Für einen bipartiten Graphen $G = (U, W, E)$ ist

$$\mu(G) = \|U\| - \max_{A \subseteq U} (\|A\| - \|N(A)\|).$$

Insbesondere hat G genau dann ein Matching M der Größe $\|M\| = \|U\|$, wenn für alle Teilmengen $A \subseteq U$ gilt: $\|N(A)\| \geq \|A\|$.