Übungen zur Komplexitätstheorie Wintersemester 06/07

Johannes Köbler

Übungsblatt 6

Aufgabe 21 Seien $f, g, t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ echte Komplexitätsfunktionen mit $t(n) \geq n$. Für eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ sei die Sprache A_t definiert durch

$$A_t = \{x\#^{t(|x|)-|x|} \mid x \in A\}.$$

a) Zeigen Sie die Äquivalenz

$$A \in \mathrm{DTIME}(f(t(n))) \Leftrightarrow A_t \in \mathrm{DTIME}(f(n)).$$

b) Zeigen Sie die Implikation

$$\mathrm{DTIME}(f(n)) = \mathrm{DTIME}(g(n)) \Rightarrow \mathrm{DTIME}(f(t(n))) = \mathrm{DTIME}(g(t(n))).$$

c) Zeigen Sie für $j, k \geq 1$ und $a > 0$ die Implikationen

$$\begin{aligned}
&\mathrm{DTIME}(n^k) = \mathrm{DTIME}(n^k \log^a n) \Rightarrow \mathrm{DTIME}(2^n) = \mathrm{DTIME}(2^n n^a),\\
&\mathrm{DTIME}(2^n) = \mathrm{DTIME}(2^n n^a) \Rightarrow \mathrm{DTIME}(2^{2^n+jan}) = \mathrm{DTIME}(2^{2^n+(j+1)an}),\\
&\mathrm{DTIME}(2^n) = \mathrm{DTIME}(2^n n^a) \Rightarrow \mathrm{DTIME}(2^{2^n}) = \mathrm{DTIME}(2^{2^n+(a+1)n}).
\end{aligned}$$

d) Schließen Sie hieraus $\mathrm{DTIME}(n^k) \subsetneq \mathrm{DTIME}(n^k \log^a n)$ für $k \geq 1$ und $a > 0$.

Aufgabe 22 Zeigen Sie, dass aus E = NE folgt, dass EXP = NEXP ist.

Aufgabe 23 Zeigen Sie, dass die $\leq_m^L$-Reduzierbarkeit reflexiv und transitiv ist.

Aufgabe 24 (schriftlich, 10 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Komplexitätsklassen NP und E verschieden sind. Betrachten Sie hierzu die Sprache

$$K := \{\langle M, x, 1^t\rangle \mid \text{die DTM } M \text{ akzeptiert } x \in \{0,1\}^* \text{ in } \leq 2^t \text{ Schritten}\}$$

und zeigen Sie:

a) K ist E-vollständig.

b) Eine Sprache ist genau dann E-hart, wenn sie EXP-hart ist.

c) E ist nicht unter $\leq_m^L$ abgeschlossen.