

Theoretische Informatik 2

12. Übung

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 22.-25.1.
Abgabe der schriftlichen Lösungen am 29. Januar

Aufgabe 78 Zeigen Sie: [mündlich]

- Die Reduktionsrelation \leq ist reflexiv und transitiv, aber nicht antisymmetrisch.
- Die Klasse RE ist unter \leq abgeschlossen.
- Jede entscheidbare Sprache A ist auf die Sprache $B = \{1\}$ reduzierbar (d.h. B ist REC-vollständig).
- Jede semi-entscheidbare Sprache A ist auf das Halteproblem H reduzierbar (d.h. H ist RE-vollständig).

Aufgabe 79 [mündlich]

Für zwei Sprachen A und B sei die *markierte Vereinigung* $A \oplus B$ definiert durch

$$A \oplus B = \{0x \mid x \in A\} \cup \{1x \mid x \in B\}.$$

Zeigen Sie für beliebige Sprachen A , B und C :

- $A \leq A \oplus B$ und $B \leq A \oplus B$.
- $A \oplus B$ ist genau dann entscheidbar, wenn A und B entscheidbar sind.
- $A \oplus B$ ist genau dann semi-entscheidbar, wenn A und B semi-entscheidbar sind.
- Es gilt genau dann $A \oplus B \leq C$, wenn $A \leq C$ und $B \leq C$ gilt.

Aufgabe 80 Zeigen Sie: [mündlich]

- Durch $A \equiv B :\Leftrightarrow A \leq B$ und $B \leq A$ wird eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Sprachen definiert. (Die durch A repräsentierte Äquivalenzklasse $[A]$ wird auch der *Grad* (engl. *degree*) von A genannt und mit $\text{deg}(A)$ bezeichnet.)
- Durch $\text{deg}(A) \leq \text{deg}(B) :\Leftrightarrow A \leq B$ wird eine Ordnung auf der Menge der Grade definiert.
- Jede endliche Menge von Graden besitzt ein Supremum.

Aufgabe 81 [mündlich]

Beweisen sie die folgende Variante des Satzes von Rice: Sei K eine Sprachklasse mit $\emptyset \subsetneq K \subsetneq \text{RE} \cap \mathcal{P}(\{0, 1, \#\}^*)$. Dann ist die Sprache

$$L_K = \{w \in \{0, 1\}^* \mid L(M_w) \in K\}$$

unentscheidbar.

Aufgabe 82 [mündlich]

Betrachten Sie die Sprache $\text{Eq} = \{v\#w \mid L(M_v) = L(M_w)\}$. Zeigen Sie:

- Das Halteproblem lässt sich auf Eq reduzieren.
- Das Halteproblem lässt sich auf $\overline{\text{Eq}}$ reduzieren.
- Weder Eq noch $\overline{\text{Eq}}$ sind semi-entscheidbar.

Aufgabe 83 [10 Punkte]

Welche der folgenden Sprachen sind entscheidbar? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

- $\{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{es gibt ein } w' \in \{0, 1\}^* \text{ mit } M_w(w') = 0\}$,
- $\{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{es gibt ein } w' \in \{0, 1\}^* \text{ mit } M_{w'}(w) = 0\}$,
- $\{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{es gibt ein } w' \neq w \text{ mit } L(M_w) = L(M_{w'})\}$,
- $\{w \in \{0, 1\}^* \mid L(M_w) \text{ ist rekursiv aufzählbar}\}$,
- $\{w \in \{0, 1\}^* \mid \overline{L(M_w)} \text{ ist semi-entscheidbar}\}$,
- $\{w \in \{0, 1\}^* \mid L(M_w) \text{ ist abzählbar}\}$.