

Übungsblatt 8

Aufgabe 30

Bestimmen Sie die Folge $G^{(i)}$, $i \geq 0$ der von G abgeleiteten Gruppen $G^{(i)}$ für $G = S_n$, $n \leq 5$.

Aufgabe 31

- (a) Zeigen Sie, dass der Kommutator $[a, b]$ zweier Gruppenelemente $a, b \in G$ genau dann gleich dem neutralen Element e ist, wenn a und b in G kommutieren (d.h. $ab = ba$).
- (b) Zeigen Sie, dass jedes Element $a \in G'$ als Produkt $\prod_{i=1}^m k_i$ von $m \leq \|G'\|$ Kommutatoren $k_i \in \{[a, b] \mid a, b \in G\}$ darstellbar ist.

Aufgabe 32

- (a) Zeigen Sie, dass die Reduktionsrelation \leq_{proj} transitiv ist.
- (b) Zeigen Sie, dass die Reduktionsrelation \leq_{proj} eine Verfeinerung von \leq_{cd} ist, d.h. $A \leq_{proj} B$ impliziert $A \leq_{cd} B$.

Aufgabe 33

Geben Sie eine Formel $\phi \in \text{FO}[<]$ mit zwei freien Variablen x und y an, so dass der Wert von x in jedem Modell von ϕ um eins größer ist als der Wert von y .

Aufgabe 34

Zeigen Sie, dass alle Sprachen in $\text{FO}[<]$ regulär sind.

Aufgabe 35

Welche Sprachen werden durch folgende Formeln beschrieben:

- (a) $\exists v_1(\forall v_2(v_1 \geq v_2) \wedge Q_0(v_1))$,
- (b) $\forall v_1(\forall v_2(v_1 \geq v_2) \wedge Q_0(v_1))$,
- (c) $\exists v_1(\forall v_2(v_1 \geq v_2) \rightarrow Q_0(v_1))$,
- (d) $\exists v_1(\forall v_2(v_1 \geq v_2) \wedge Q_0(v_1) \wedge \exists v_3(v_3 < v_1))$.