Übungen zur Komplexitätstheorie Wintersemester 06/07

Johannes Köbler

Übungsblatt 9

Aufgabe 33 Zeigen Sie, dass das Problem 3-COLORING, für einen Graphen G zu entscheiden, ob er 3-färbbar ist, NP-vollständig ist. *Hinweis*: NAESAT $\leq$ 3-COLORING.

Aufgabe 34 Zeigen Sie:

a) Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ liegt genau dann in PP, wenn es eine P-Relation $R \subseteq \Sigma^* \times \{0,1\}^*$ und ein Polynom p gibt, so dass für alle $x \in \Sigma^*$ gilt:

$$x \in L \Leftrightarrow \|\{y \in \{0,1\}^{p(|x|)} \mid (x,y) \in R\}\| \geq 2^{p(|x|)-1}.$$

b) MAJSAT ist PP-vollständig und es gilt PP $\subseteq$ PSPACE.

Aufgabe 35 Zeigen Sie, dass eine Sprache L genau dann in RP liegt, wenn es eine PTM M gibt, die niemals ? ausgibt, keinen Fehler macht und deren erwartete Laufzeit bei allen Eingaben $x \in L$ polynomiell beschränkt ist. Finden Sie eine analoge Charakterisierung für $L \in$ ZPP.

Aufgabe 36 (schriftlich, 10 Punkte)

Betrachten Sie folgenden probabilistischen Algorithmus RANDOMWALK:

Eingabe: eine KNF-Formel $F(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geq 1$, ohne Einerklauseln
  wähle eine beliebige Belegung a, z.B. $a(x_i) = 0$ für $i = 1, \ldots, n$
  while $F(a) = 0$ **do**
    wähle eine beliebige Klausel C von F mit $C(a) = 0$
    wähle zufällig ein Literal l in C
    flippe den Wert von $a(l)$
  end
Ausgabe: a

Sei F eine 2-KNF-Formel (o.B.d.A. ohne Einerklauseln) und sei h eine Belegung, die F erfüllt. Zeigen Sie, dass die erwartete Laufzeit von RANDOMWALK(F) polynomiell beschränkt ist. *Hinweis*: Zeigen Sie folgende Abschätzungen für die erwartete Anzahl $t(i)$ von Schleifendurchläufen, falls die Anfangsbelegung a in genau i Variablen von h abweicht:

a) $t(0) = 0$ und $t(n) \leq t(n-1) + 1$,

b) $t(i) \leq 1 + (t(i-1) + t(i+1))/2$ für $i = 1, \ldots, n-1$,

c) $t(i) \leq i(2n - i)$ für $i = 0, \ldots, n$.

Aufgabe 37 Zeigen Sie, dass aus NP $\subseteq$ BPP die Gleichheit NP $=$ RP folgt.