Übungsblatt 7

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 5.–8. 1. 2021
Bearbeitung des Moodle-MC-Tests bis 4. 1. 2021, 23:59 Uhr
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 12. 1. 2021, 23:59 Uhr

Aufgabe 41 ***mündlich***

Beweisen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas, dass die Sprache
$L = \left\{w \in \{a,b\}^* \,\middle|\, \#_a(w) \text{ teilt } \#_b(w)\right\}$ nicht regulär ist.

Aufgabe 42 ***mündlich***

Betrachten Sie die folgenden **falschen** „Beweise“, die das Pumping-Lemma anwenden, und entscheiden Sie wo jeweils der Fehler liegt.

(a) Die Sprache $L = \left\{0^n 1^n \,\middle|\, n \geq 0\right\}$ ist nicht regulär, da sie das Pumping-Lemma nicht erfüllt. Angenommen L würde das Pumping-Lemma erfüllen, dann müssen wir das Wort $x = 000111 \in L$ nach den Bedingungen in der Konklusion des Pumping-Lemmas zerlegen können. Angenommen $x = uvw$ ist eine solche Zerlegung mit $|uv| \leq l$ und $v \neq \varepsilon$. Wegen $|uv| \leq l$ muss uv komplett in den 0en von x enthalten sein und wegen $v \neq \varepsilon$ muss v mindestens eine 0 enthalten. Dann enthält uv^2w mindestens vier 0en, aber nur drei 1en, also $uv^2w \notin L$. Somit erfüllt L das Pumping-Lemma nicht und L ist nicht regulär.

(b) Die Sprache $L = \left\{0^{2n} \,\middle|\, n \geq 0\right\}$ ist nicht regulär, da sie das Pumping-Lemma nicht erfüllt. Angenommen L wäre regulär, dann gibt es eine Pumpingzahl l für L. Betrachte das Wort $x = 0^{2l} \in L$ und die Zerlegung $x = uvw$ mit $u = \varepsilon$, $v = 0$ und $w = 0^{2l-1}$. Diese Zerlegung erfüllt die ersten beiden Bedingungen $|uv| \leq l$ und $v \neq \varepsilon$. Mit dieser Zerlegung gilt aber $uv^2w = 0^{2p+1} \notin L$, da die Länge von uv^2w ungerade ist. Somit erfüllt L das Pumping-Lemma nicht und L ist nicht regulär.

Aufgabe 43 ***11 Punkte***

Betrachten Sie die Sprache $L = \left\{a^{2n} b^m \,\middle|\, n \geq m \geq 0\right\}$.

(a) Geben Sie alle Zerlegungen des Wortes $x = a^6 b^2 = aaaaaabb$ in Teilwörter $x = uvw$ an, die für $l = 6$ alle drei Bedingungen in der Konklusion des Pumping-Lemmas erfüllen. *(5 Punkte)*

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas, dass die Sprache L dennoch nicht regulär ist. *(6 Punkte)*

Aufgabe 44 *8 Punkte*

Für eine Sprache A, sei $l_{\text{reg}}(A)$ die Pumpingzahl von A nach dem Pumping-Lemma für reguläre Sprachen. Zeigen Sie für beliebige Sprachen A, B mit endlichen Pumpingzahlen (nicht nur für reguläre A, B):

(a) $l_{\text{reg}}(A \cup B) \leq \max\{l_{\text{reg}}(A), l_{\text{reg}}(B)\}$ und es gibt $A, B \in \mathsf{REG}$, sodass Gleichheit gilt.

(b) $l_{\text{reg}}(AB) \leq l_{\text{reg}}(A) + l_{\text{reg}}(B)$ und es gibt $A, B \in \mathsf{REG}$, sodass Gleichheit gilt.

(c) $A \neq \varnothing \Rightarrow l_{\text{reg}}(A^*) \leq l_{\text{reg}}(A)$ und es gibt ein $A \in \mathsf{REG}$, sodass Gleichheit gilt.

(d) Aus den bisherigen Teilfaufgaben folgt das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen.

Hinweis: Bei a) und b) gibt es jeweils zwei sehr ähnliche Fälle. Es genügt jeweils den Beweis für einen anzugeben, betrachten Sie bei b) aber zwingend den Fall, bei dem das hintere Teilwort $z \in B$ eines Wortes $x = yz \in AB$ zerlegt wird.

Aufgabe 45 Seien A, B beliebige Typ-i-Sprachen ($i \in \{0, 1, 2\}$). ***mündlich***

Zeigen Sie, dass dann auch A^R, $A \cup B$ und AB Typ-i-Sprachen sind.

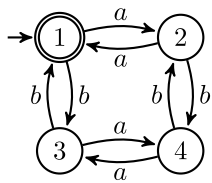
Aufgabe 46 Betrachten Sie den unten dargestellten DFA M. ***mündlich***

(a) Geben Sie für M eine äquivalente reguläre Grammatik an.

(b) Geben Sie für die reguläre Grammatik $G = (\{A, B\}, \{a, b\}, P, A)$ mit den Regeln

$$P: A \to aB, a, \varepsilon$$
$$B \to bA, b$$

einen äquivalenten NFA an.



Benutzen Sie jeweils das Verfahren aus der Vorlesung.

Aufgabe 47 ***11 Punkte***

Eine **linksreguläre** Grammatik darf nur Regeln der Bauart $A \to a$, $A \to Ba$ oder $A \to \varepsilon$ enthalten. Der Begriff **rechtsregulär** ist analog definiert, entspricht also der Vorlesungsdefinition einer regulären Grammatik.

Gegeben sei die Grammatik

$$G_1 = \big(\{S, T\},\ \{a, b\},\ \{S \to aS, abT;\ T \to aT, abS, ab\},\ S\big).$$

(a) Geben Sie einen regulären Ausdruck sowie eine links- und eine rechtsreguläre Grammatik für die Sprache $L(G_1)$ an. *(5 Punkte)*

(b) Zeigen Sie allgemein, dass eine Sprache genau dann von einer linksregulären Grammatik erzeugt wird, wenn es eine rechtsreguläre Grammatik für sie gibt. (*Hinweis:* Nutzen Sie die Aufgabe 12.c.) *(3 Punkte)*

(c) Lassen sich mit Grammatiken, die nur Produktionen der Form $A \to a$, $A \to Ba$, $A \to aB$ und $A \to \varepsilon$ enthalten, auch nicht-reguläre Sprachen erzeugen? Begründen Sie Ihre Antwort. *(3 Punkte)*