Übungen zur Komplexitätstheorie Wintersemester 06/07
Johannes Köbler

Übungsblatt 10

Aufgabe 38 Zeigen Sie, dass nicht jede von einer PTM in erwarteter Laufzeit $n^{O(1)}$ akzeptierte Sprache in PP liegt.

Aufgabe 39 Für eine PTM M und eine Eingabe x sei $bias_M(x) = \Pr[M(x) = \text{ja}] - 1/2$. Zeigen Sie, dass jede von einer PPTM M mit $|bias_M(x)| = 1/|x|^{O(1)}$ akzeptierte Sprache in BPP liegt.

Aufgabe 40 (schriftlich, 10 Punkte)

Sei $\rho \in [0,1]$ eine beliebige reelle Zahl. Eine ρ-PTM ist eine PTM mit maximalem Verzweigungsgrad 2, die eine ρ-Münze benutzt: Sind in einer Konfiguration K zwei Anweisungen mit verschiedenen Folgekonfigurationen K' und K'' ausführbar, so gilt Pr$[K \to_M K'] = \rho$ und Pr$[K \to_M K''] = 1 - \rho$. Ersetzen wir in der Definition von PP, BPP, RP und ZPP PTMs durch ρ-PTMs, so führt dies auf die Klassen PP_ρ, BPP_ρ, RP_ρ und ZPP_ρ. Zeigen Sie:

a) Für $\rho \in \{0,1\}$ gilt $\mathrm{PP}_\rho = \mathrm{BPP}_\rho = \mathrm{RP}_\rho = \mathrm{ZPP}_\rho = \mathrm{P}$.

b) Für $\rho \in (0,1)$ kann jede PTM M durch eine ρ-PTM M' mit derselben Akzeptanzwahrscheinlichkeit in erwarteter Laufzeit $O(time_M(x))$ simuliert werden.

c) Jede ρ-PTM M kann durch eine PTM M' mit derselben Akzeptanzwahrscheinlichkeit in erwarteter Laufzeit $O(time_M(x))$ simuliert werden, falls ρ P-berechenbar ist (d.h. das n-te Bit b_n der Binärrepresentation $0.b_1b_2\ldots$ von ρ ist in Zeit $n^{O(1)}$ berechenbar).

d) Für jedes P-berechenbare $\rho \in (0,1)$ gilt $\mathrm{BPP} = \mathrm{BPP}_\rho$ (entsprechend für RP und ZPP).

e) Es gibt Zahlen $\rho \in (0,1)$ mit $\mathrm{PP} \neq \mathrm{PP}_\rho$ (sogar $\mathrm{PP}_\rho \not\subseteq \mathrm{RE}$).

Aufgabe 41 Zeigen Sie:

a) $\exists \cdot \mathrm{P} = \mathrm{NP}$,

b) $\forall \cdot \mathrm{P} = \text{co-}\mathrm{NP}$.

Aufgabe 42 Zeigen Sie für jede Sprachklasse $\mathcal{C}$, die unter $\leq_m^{log}$-Reduktionen abgeschlossen ist:

a) $\exists \cdot \mathcal{C}$ ist unter $\exists$ abgeschlossen,

b) $\forall \cdot \mathcal{C}$ ist unter $\forall$ abgeschlossen.

Aufgabe 43 Zeigen Sie, dass $\mathrm{PSPACE} \neq \mathrm{PH}$ ist, außer wenn PH kollabiert (d.h. $\mathrm{PH} = \Sigma_k^p$ für ein $k \geq 1$).