

Modul OMSI-2 im SoSe 2011

Objektorientierte Simulation mit ODEMx

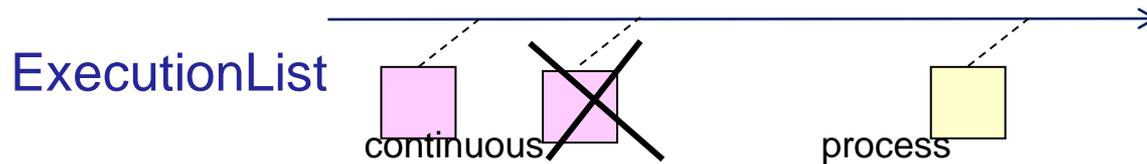
Prof. Dr. Joachim Fischer
Dr. Klaus Ahrens
Dipl.-Inf. Ingmar Eveslage
Dipl.-Inf. Andreas Blunk

fischer|ahrens|eveslage|blunk@informatik.hu-berlin.de

2. Analyse zeitkontinuierlicher Systeme

1. Wirkungsstrukturen
2. Beispiel: Einfaches Räuber-Beute-System
3. Gleichgewichtspunkte und ihre Stabilität Zusammenfassung
4. Systematische Betrachtung von Systemstrukturen
5. Stabilitätsanalyse linearer und nichtlinearer Systeme
6. Analytische Stabilitätsanalyse (Prinzip)
7. Besonderheiten nichtlinearer Systeme

Einfluss der Modellstruktur auf die Güte der Berechnung



Objekte von Continuous-Spezialisierungen
eigene Menge ausgezeichneter Attribute
 (Zustandsgrößen, deren Änderung von zeitkontinuierlicher Art ist)

Bsp.: x, y, z mit Repräsentation als 3-dimensionaler Zustandsvektor $state$

Fall 1

verwenden hier nur 1 Continuous-Objekt

```
x = state[0]
y = state[1]
z = state[2]
```

```
x' = rate[0]
y' = rate[1]
z' = rate[2]
```

```
x' = -y - z
y' = x + a * y
z' = b + (x - c) * z
```

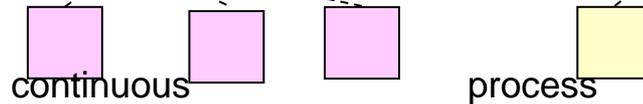
```
void derivatives (double t) {
    rate[0] = -state[1] - state[2];
    rate[1] = state[0] + a * state[1];
    rate[2] = b + (state[0] - c) * state[3];
}
```

autonomes Teilsystem, denn
 Zustandsgrößen hängen im
 gesamten Lebenslauf nur
 von Attributen des Objektes
 selbst ab (nicht von anderen!!)

Damit ist eine perfekte Synchronisation in der Berechnung der Größen x, y und z gegeben.

Einfluss der Modellstruktur auf die Güte der Berechnung

ExecutionList →



Fall 2

Objekte von 3 Continuous-Spezialisierungen

$$\begin{aligned} x' &= -y - z \\ y' &= x + a \cdot y \\ z' &= b + (x - c) \cdot z \end{aligned}$$

X-Objekt

Y-Objekt

Z-Objekt

Y-Object* y Z-Object* z

x = state[0] x' = rate[0]

```
void derivatives (double t) {
    rate[0]= - y->state[0]- z->state[0];
}
```

X-Object* x

y = state[0] y' = rate[0]

```
void derivatives (double t) {
    rate[0]= x->state[0] + a*state[0];
}
```

X-Object* x

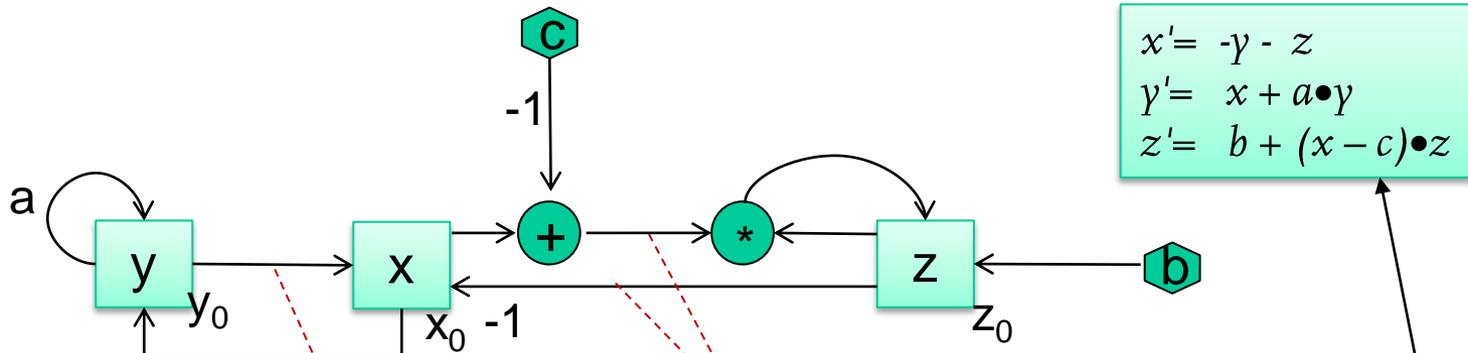
z = state[0] z' = rate[0]

```
void derivatives (double t) {
    rate[0]= b+(x->state[0]-c) * state[0];
}
```

3 sehr einfache, aber nicht mehr autonome Teilsysteme, sondern mit (z.T. starken) Rückkopplungen untereinander

Eine perfekte Synchronisation in der Berechnung der Größen x,y und z ist ausgeschlossen. Also sollte man auf eine derartige Zerlegung verzichten. ist aber ein Problem, wenn die Abhängigkeiten sich ebenfalls dynamisch ändern (s. Barren-Beisp.)

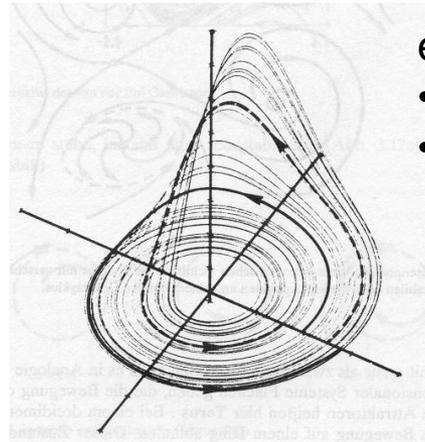
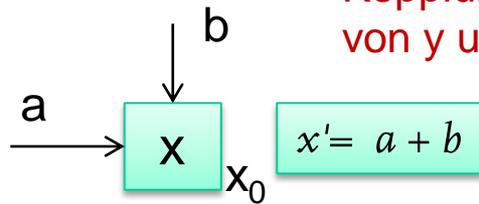
Wirkungsstrukturdiagramm



$$\begin{aligned} x' &= -y - z \\ y' &= x + a \cdot y \\ z' &= b + (x - c) \cdot z \end{aligned}$$

Kopplung und Rückkopplung von y und x

Kopplung und Rückkopplung von x und z



entscheidende Verhaltensgröße

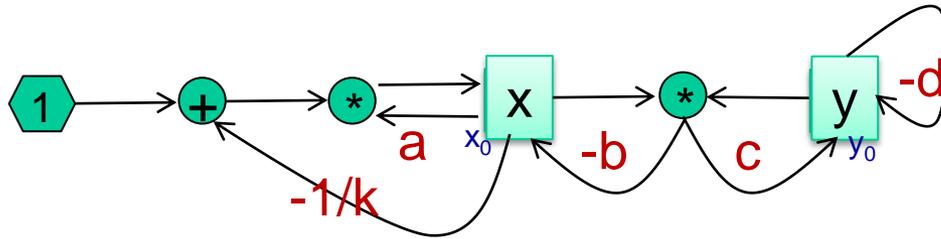
- Schwingungsperiode
- c bestimmt Chaos $c > c_0$

Rössler-Attraktor
(Beispiel eines chaotischen Systems)

Der Verhaltensvorhersagbarkeit sind auch bei deterministischen Systemen Grenzen gesetzt.

Aufgabe der Systemanalyse:
Bestimmung solcher Attraktorflächen

Räuber-Beute-System mit Kapazitätsgrenze (Wdh.)



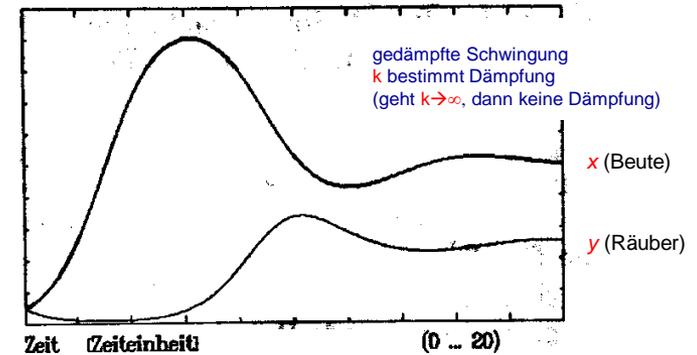
$$x'(t) = ax\left(1 - \frac{x}{k}\right) - bxy$$

$$y'(t) = cxy - dy$$

- a - Wachstumsrate der Beute = 1.0
- b - Beuteverlustrate = 1.0
- c - Beutegewinnrate = 1.0
- d - Atmungsrate des Räubers = 1.0
- k - Tragfähigkeit für Beutepopulation = 1.0
- $x_0 = 0.1$
- $y_0 = 0.1$

Systementwicklung für Anfangswerte

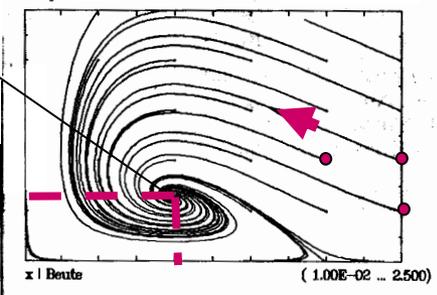
$x = 0.1$
 $y = 0.1$



Zustandsgrößen:

- x - Beutepopulation (logistisches Wachstum mit Wachstumsbeschränkung: Kapazitätsgrenze k)
- y - Räuberpopulation

RÄUBER-BEUTE-SYSTEM 2



Gleichgewichtspunkte (Wdh.)

- (oder stationärer Punkte, Fixpunkte) im Zustandsraum sind natürliche Ruhepunkte eines Systems
ihre Kenntnis ist für die Beurteilung des Systemverhaltens wichtig
- an diesen Stellen verschwinden die Ableitungen $\frac{d\vec{y}}{dt} \rightarrow 0$ der Zustandsgrößen nach der Zeit
Das System ist aber immer noch in Bewegung: aber Zuwächse und Verluste heben sich auf.
- nichtlineare Systeme können mehrere Gleichgewichtspunkte besitzen, welcher angenommen wird, hängt häufig von Anfangswerten der Zustandsgrößen ab
- besonders interessant ist die jeweilige Bewegung des Systems (Zustandsbahnen) in der Umgebung seiner Gleichgewichtspunkte

Stabilität von Gleichgewichtspunkten

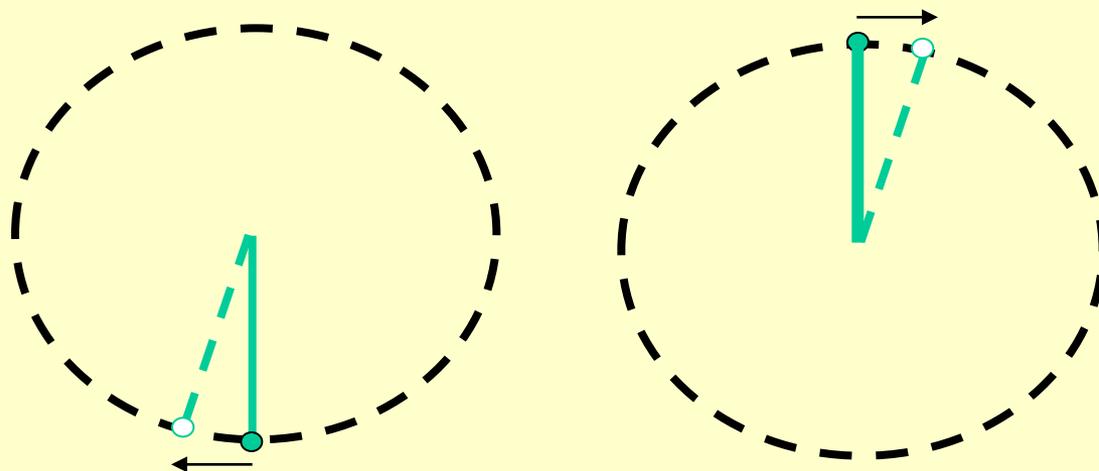
Stabile und instabile Gleichgewichtspunkte (Wdh.)

Entscheidungskriterium : Welches Verhalten ergibt sich bei kleinster Bewegung aus dem Gleichgewichtspunkt ?

stabil: Rückkehr in den Gleichgewichtspunkt

instabil: Verlassen des Gleichgewichtspunktes (meist Übergang in anderen Gleichgewichtspunkt)

Pendel-Beispiel



Es gibt mathematische Verfahren zur Bestimmung der Qualität von Gleichgewichtspunkten

unterer GP ist stabil, der obere dagegen instabil

3. Analyse zeitkontinuierlicher Systeme

1. Wirkungsstrukturen
2. Beispiel: Einfaches Räuber-Beute-System
3. Gleichgewichtspunkte und ihre Stabilität
4. Systematische Betrachtung von Systemstrukturen (Systemzoo)
5. Stabilitätsanalyse linearer und nichtlinearer Systeme
6. Analytische Stabilitätsanalyse (Prinzip)
7. Besonderheiten nichtlinearer Systeme

Zeitkontinuierliche Referenzsysteme

$$z = a \cdot \sin^2 \omega t$$

Eigenkopplungsfaktor

$$z' = (b - d) \cdot z$$

$$z' = a \cdot z \cdot (1 - z / k)$$

$$z' = a \cdot z \cdot (1 - z / k) - h$$

$$z' = u(t) - a \cdot z$$

$$x' = a \cdot x + b \cdot y$$

$$y' = c \cdot x + d \cdot y + u$$

$$x' = a \cdot x - b \cdot x \cdot y$$

$$y' = c \cdot x \cdot y - d \cdot y$$

$$x' = y$$

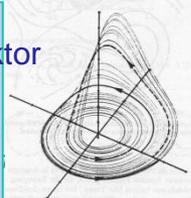
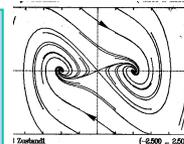
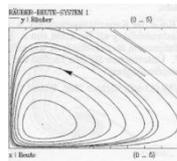
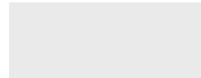
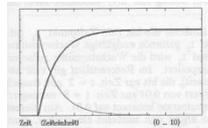
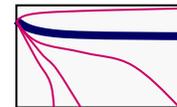
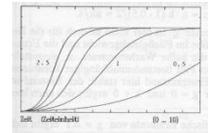
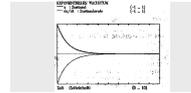
$$y' = x - x^3 - d \cdot y$$

$$x' = -y - z$$

$$y' = x + a \cdot y$$

$$z' = b + (x - c) \cdot z$$

Rückkopplungsfaktor



Transformation (kein Gedächtnis)

exponentielles Wachstum/Zerfall

logistisches Wachstum

logistisches Wachstum mit konstanter Ernterate

Eingabe mit Leck

Linearer Schwinger
gedämpfte oder sich verstärkende
Schwingung

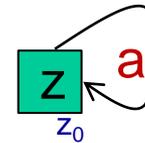
nichtlinearer Schwinger
(und Van der Pol als Spezialfall)

bipolarer Schwinger
(und chaotischer bipolarer Schwinger)

Rössler-Attraktor

b) Exponentielles Wachstum

- **typisch:** Zustandsänderung hängt (nur) vom Zustand selbst ab
- Nettowachstum $a = b - d$
 - b Geburtenrate
 - d Sterberate



$$dz/dt = z' = (b-d) \cdot z = a \cdot z$$

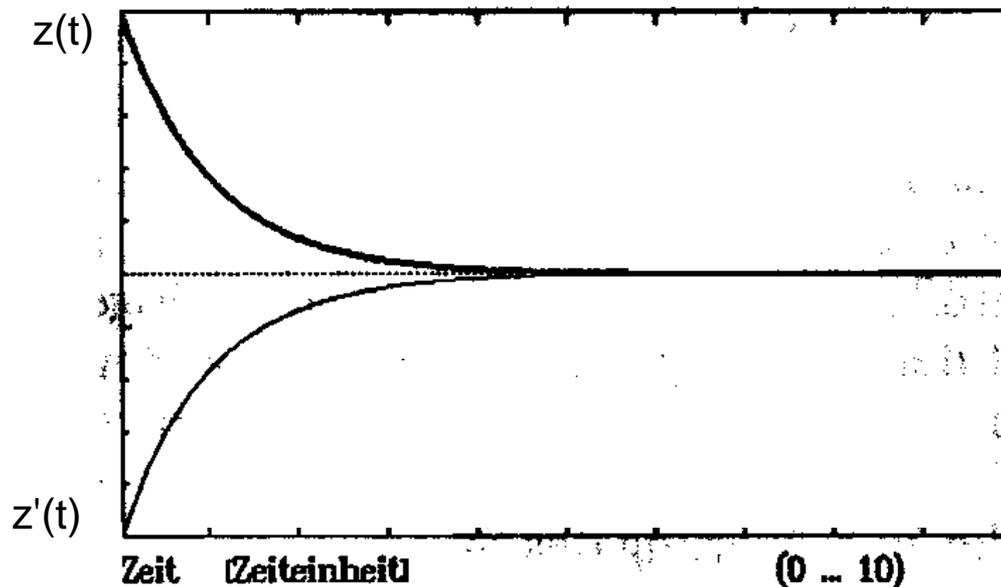
Zustand bestimmt die Zustandsänderung
(Eigenkopplung)

- System 1.Ordnung (linear)
- keine äußere Erregung, aber Eigendynamik

b) Exponentielles Wachstum (Forts.)

typisch: Zustandsänderung hängt vom Zustand ab

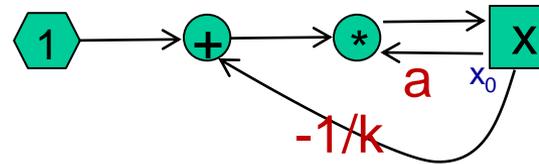
$$z' = a \cdot z, \quad (a < 0 \text{ exponentieller Zerfall})$$



c) Logistisches Wachstum

typisch: Tragfähigkeit der Umgebung beeinflusst Wachstumsrate

$$z' = a \cdot z \cdot (1 - z / k)$$



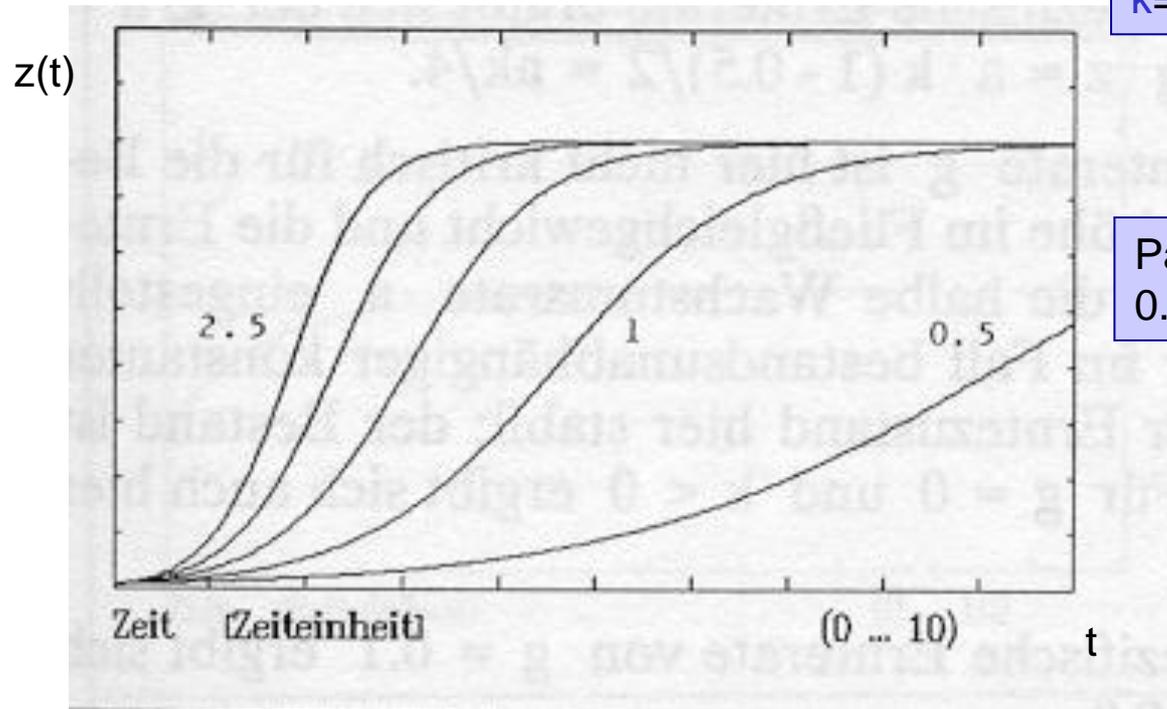
vgl.:

- ungestörte Ofentemperatur
- ungestörtes Beute-Wachstum

c) Logistisches Wachstum (Forts.)

$$z' = a \cdot z \cdot (1 - z/k)$$

$$k = 1$$



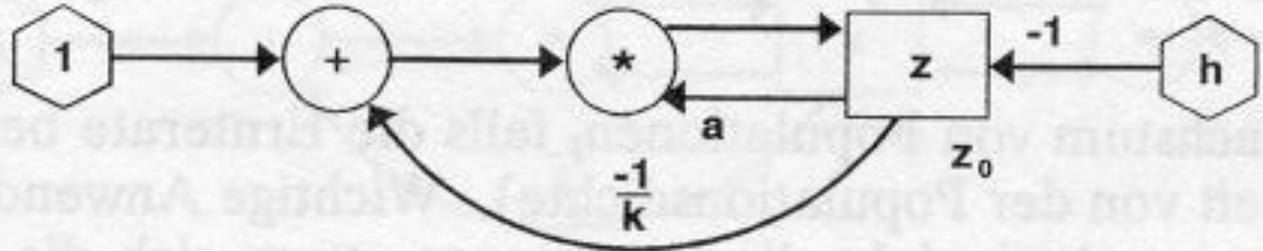
Parameter a
0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5

d) Logistisches Wachstum mit konstanter Ernterate (Forts.)

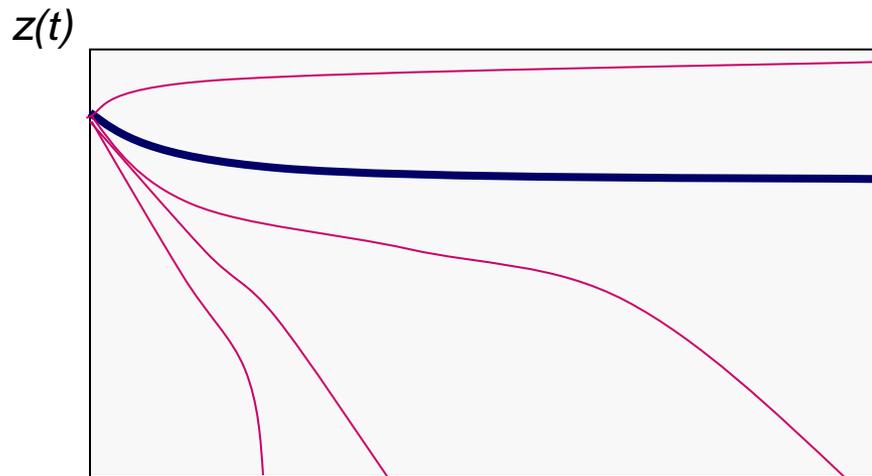
$$z' = a \cdot z \cdot (1 - z / k) - h$$

$$k = 1$$

$$a = 1$$



h ist ein kritischer Parameter, ab einem bestimmten Wert bricht die Population zusammen



Parameter h
0.1, **0.2**, 0.3, 0.4, 0.5

$z_0 = 0.8$

kritischer Wert

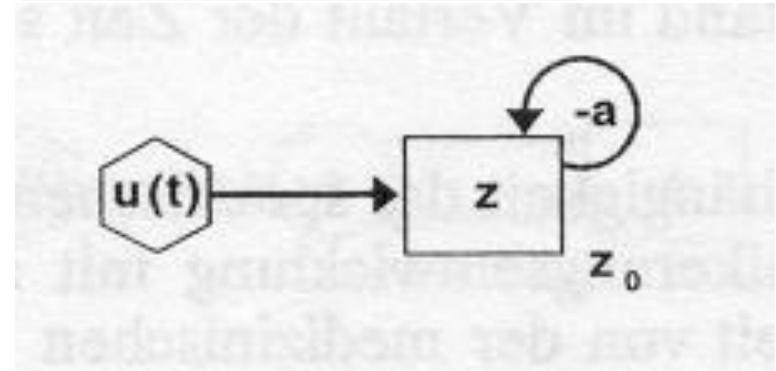
Zeit t

e) Exponentielle Verzögerung / exponentielles Leck

- System 1. Ordnung (linear):
- Verluste der Zustandsgröße sind proportional zum jeweiligen Bestand

d.h.: exponentielle Abnahme trotz Zufluss $u(t)$ von außen

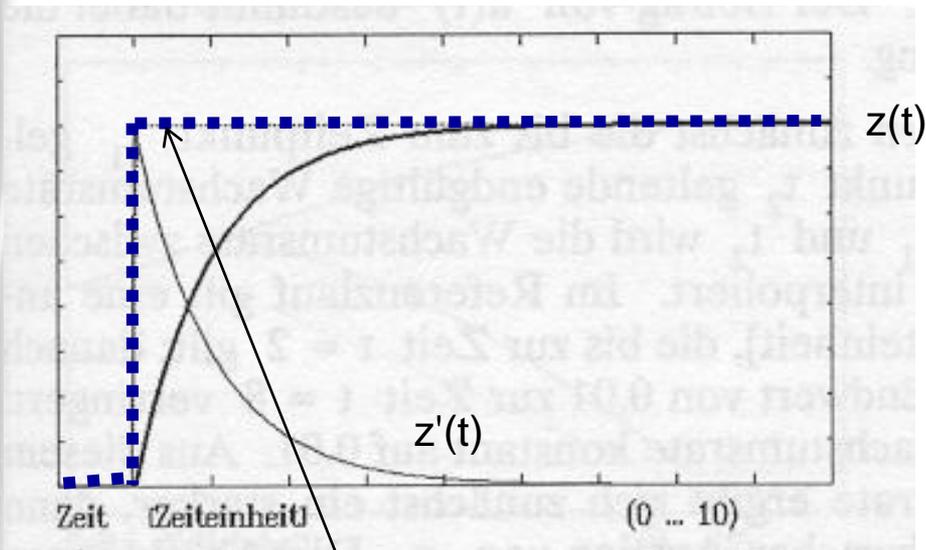
$$z' = u(t) - a \cdot z$$



- **Beispiel:** Zulauf in Badewanne mit undichtem Stopfen
 - Beginn: leere Wanne, konstanter Zulauf u ($u > a \cdot z$)
 - Wasserhöhe steigt, aber Leckverluste nehmen zu bis Leckverluste $a \cdot z$ allmählich genau den Wert von u erreichen
 - Wasserhöhe bleibt nun konstant
- Ähnliches gilt auch bei zeitlicher Veränderung von u
 - Zustand stellt sich hier mit zeitlicher Verzögerung auf die jeweilige Umweltänderung ein

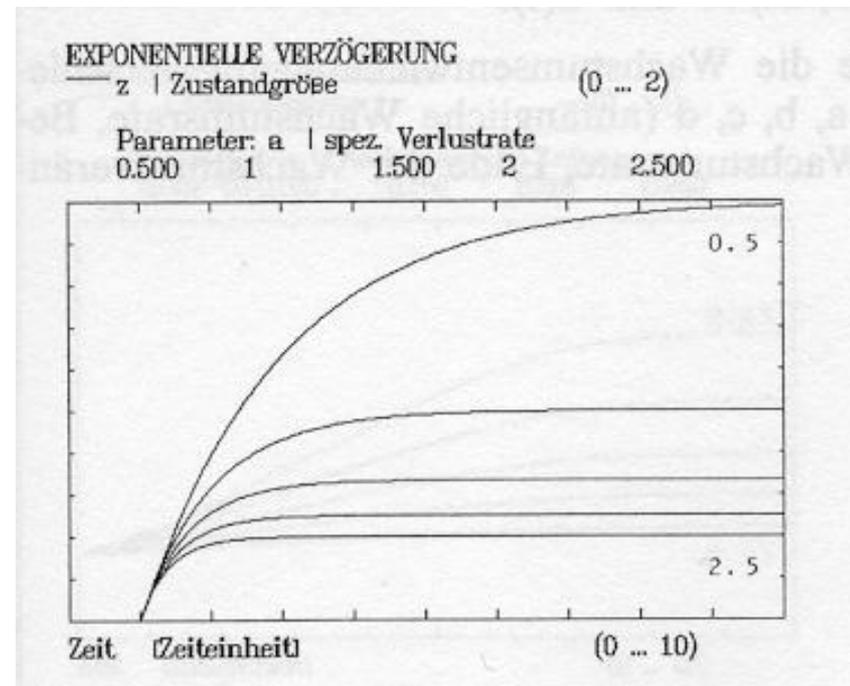
e) Exponentielle Verzögerung / exponentielles Leck (Forts.)

$$z' = u(t) - a \cdot z$$



hier:
u(t): Sprungfunktion (0→1)
a= 1

Abhängigkeit von a



f) Linearer Schwinger

- System 2. Ordnung (linear)

$$\begin{aligned}x' &= y \\ y' &= -c \cdot x - d \cdot y\end{aligned}$$

1. Rückkopplung: $y \rightarrow x$

Eigenkopplung: y

2. Rückkopplung $x \rightarrow y$

- typische Rückkopplung:

bei über **mindestens zwei** Zustandsgrößen laufende Rückkopplungen sind immer Schwingungen zu erwarten

- in Abhängigkeit von Rückkopplungsstärke c und Dämpfung d zeigt das System in Gleichgewichtspunkten unterschiedliches Verhalten: (stabil, instabil)

fundamental:

lineares Systemverhalten wichtig für Bewertung von **lokalem** Verhalten von **nichtlinearen** Systemen

Herleitung der Schwingungsgleichung

- Stellt man das Kräftegleichgewicht eines linearen, geschwindigkeitsproportional gedämpften Ein-Massen-Schwingers auf, so findet man folgende Bewegungsgleichung:

m: Masse

d: Dämpfungskonstante

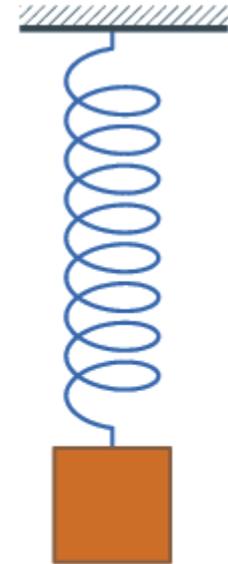
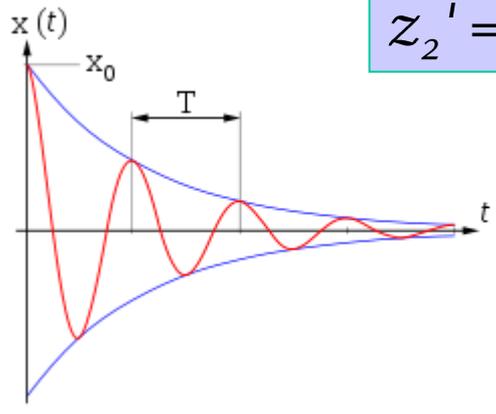
c: Federkonstante (Rückstellmoment)

$$m x'' + d x' + c x = 0$$

$$z_1 = x,$$
$$z_2 = x'$$

$$z_1' = z_2$$

$$z_2' = -c/m \cdot z_1 - d/m \cdot z_2$$

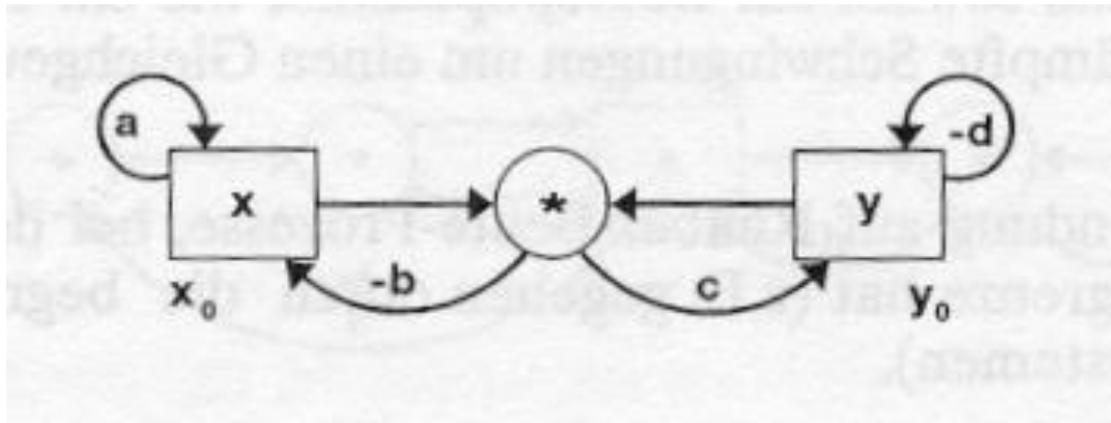


g) Nichtlinearer Schwinger

nichtlineare Terme

- System 2. Ordnung

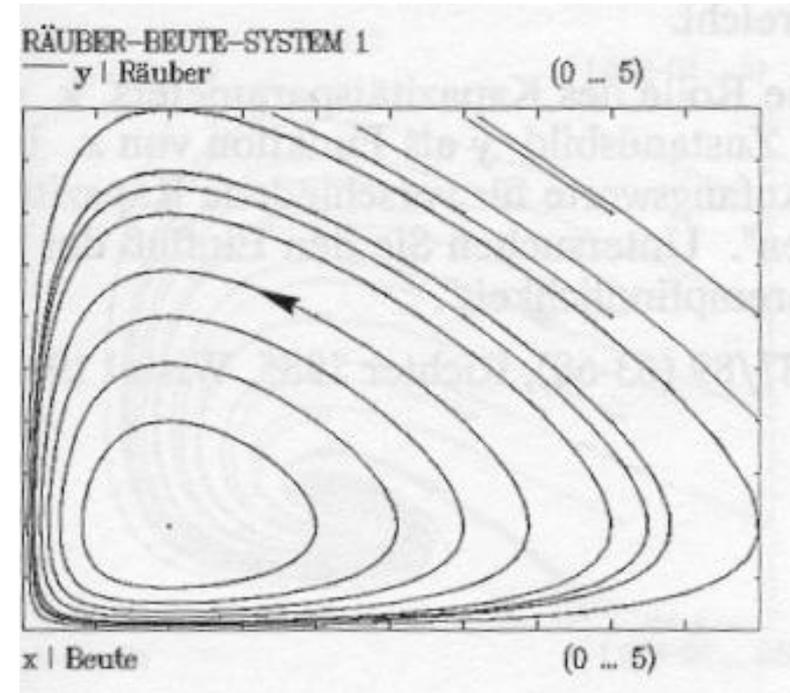
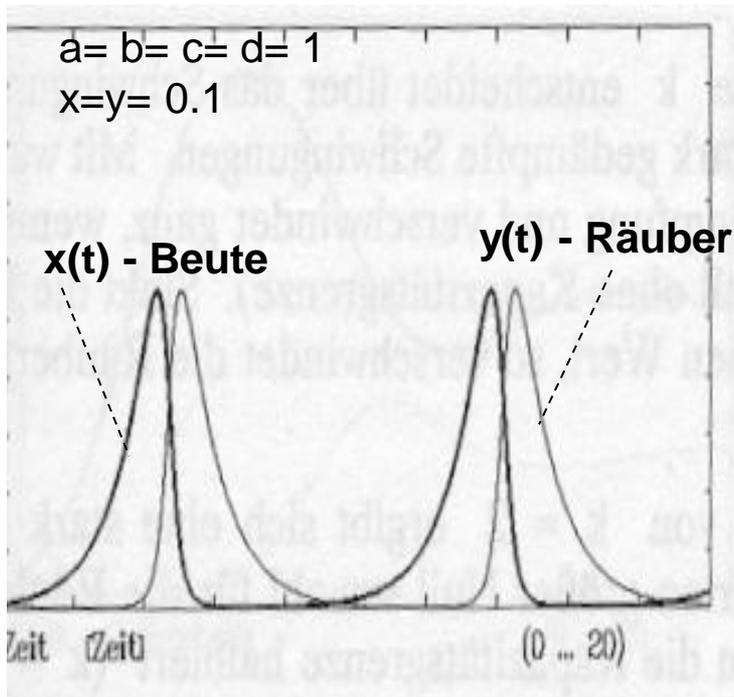
$$\begin{aligned}x' &= a \bullet x - b \bullet x \bullet y \\y' &= c \bullet x \bullet y - d \bullet y\end{aligned}$$



- Räuber-Beute-System **ohne Kapazitätsbeschränkung**
 - a – Wachstumsrate der Beute
 - b – Beuteverlustrate der Beute
 - c – Beutegewinnrate des Räubers
 - d – Atmungsrate des Räubers

g) Nichtlinearer Schwinger (Forts.)

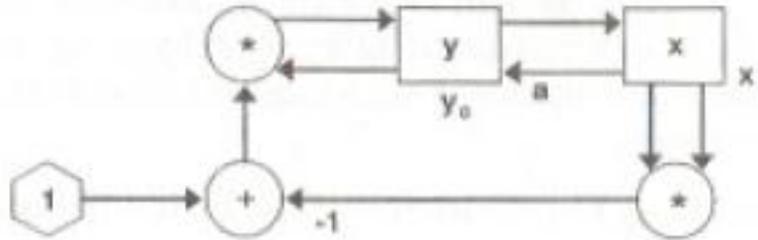
$$x' = a \cdot x - b \cdot x \cdot y$$
$$y' = c \cdot x \cdot y - d \cdot y$$



- ungedämpfte Schwingung um einen Gleichgewichtspunkt
- Verschwinden der Beute ist unmöglich
- Parameter bestimmen Schwingungsfrequenz
- Anfangswerte bestimmen Amplitude

Spezialfall: Schwinger mit Grenzzyklus (Van der Pol)

Systemgleichung



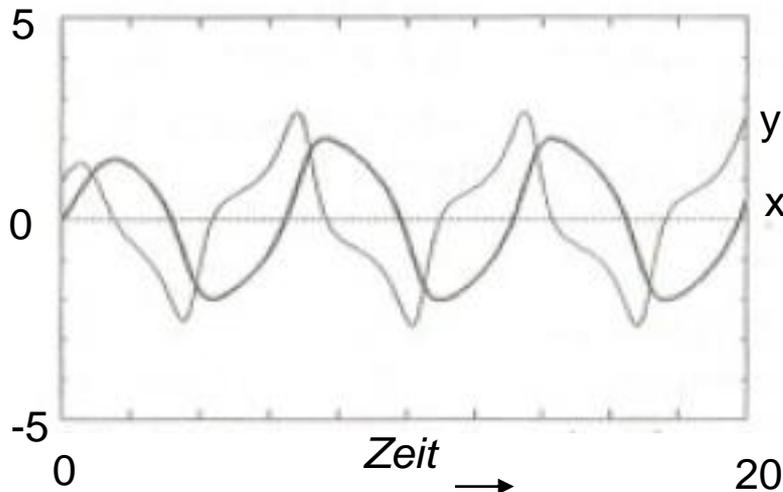
$$x' = y$$

$$y' = a \cdot x + (1 - x^2) \cdot y$$

$a = -1.0$ (Kopplungsparameter)

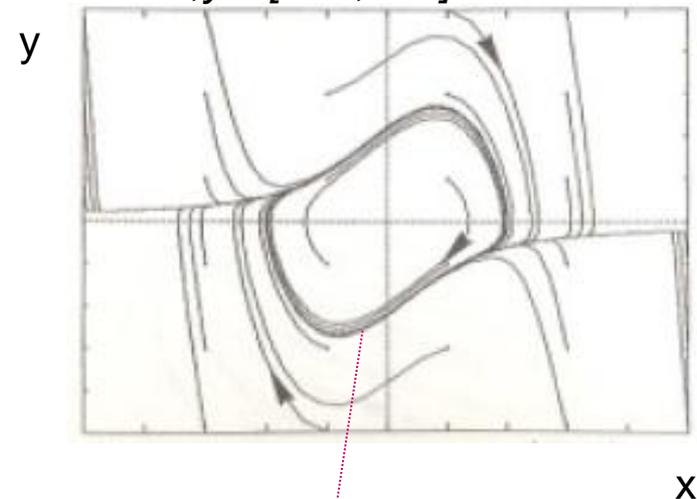
Zeitdiagramm

mit $x(0) = 0.0$, $y(0) = 1.0$



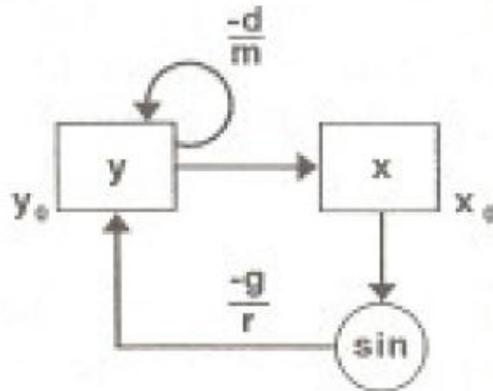
Phasendiagramm

bei Variation der Anfangswerte
mit $x, y \in [-5.0, 5.0]$



Grenzzyklus

Spezialfall: Rotationspendel

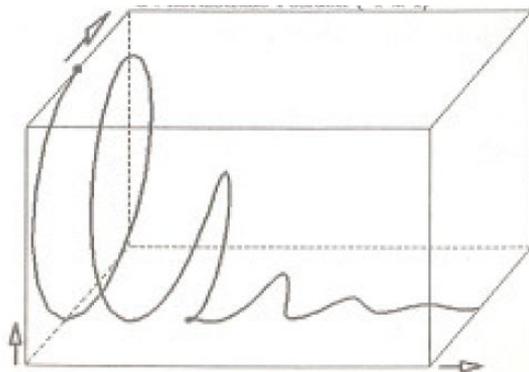


Systemgleichung

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -(g/r) \cdot \sin(x) - (d/m) \cdot y \\ g &= 9.81 \text{ [m/s}^2\text{]} \end{aligned}$$

- m – Pendelmasse [kg]
- r – Pendelradius [m]
- d – Dämpfungskonstante [N/(m/s)]
- x – Auslenkung (Winkel) [radian]
- y – Winkelgeschwindigkeit [1/sec]

horizontale Auslenkung



vertikale Auslenkung

Zeit

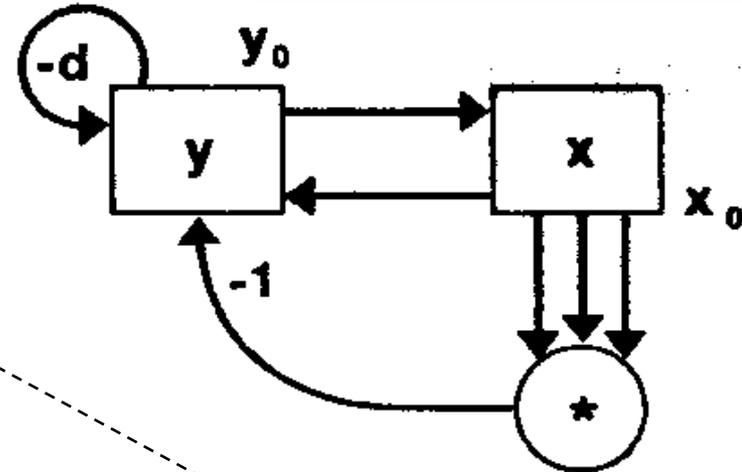
- Anfangseinstellung bewirkt:
- zunächst volle Rotation
 - danach stark gedämpftes Pendeln

h) Bistabiler Schwinger



- System 2. Ordnung

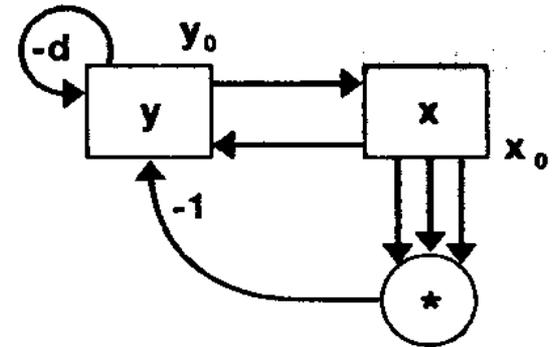
$$\begin{aligned}x' &= y \\ y' &= x - x^3 - d \cdot y\end{aligned}$$



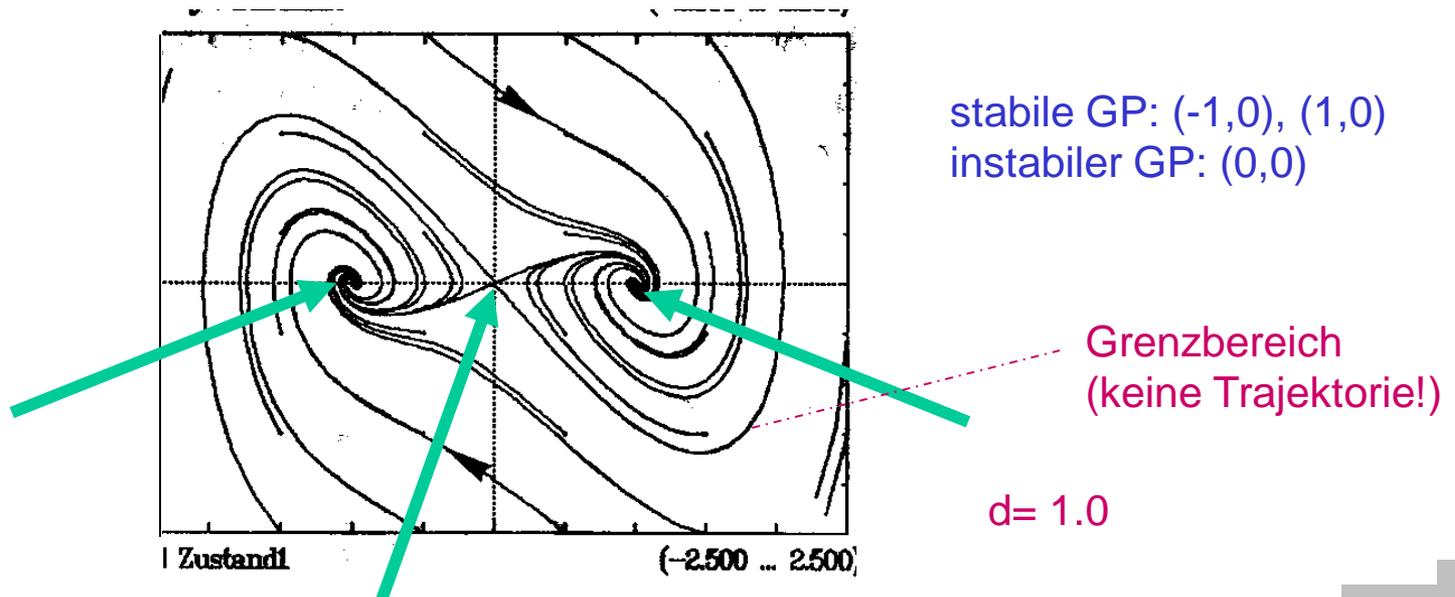
- **dämpfende Eigenkopplung** an einer Zustandsgröße und
- eine **lineare Rückkopplung** zwischen beiden Zustandsgrößen (wie linearer Schwinger)
- zusätzlich (**nichtlineare**) **kubische Rückkopplung** zwischen beiden Zustandsgrößen mit negativen Vorzeichen (falls $|x| > 1$ wird x-nach-y-Kopplung negativ)

h) Bistabiler Schwinger (Forts.)

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= x - x^3 - d \cdot y \end{aligned}$$



- zwei stabile und ein instabiler Gleichgewichtspunkt, bei welchem man „landet“ hängt von Anfangsbedingungen ab

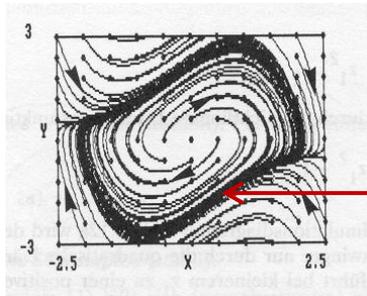


Besonderes Phänomen nichtlinearer Systeme

Verlauf mit $a = -1.0$

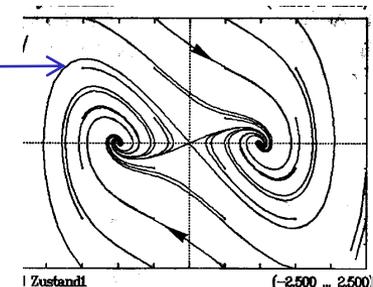
bei mehreren Gleichgewichtspunkten

- Im Zustandsraum können u.U. **Trennlinien/Trennflächen** existieren, die durch die singulären Punkte verlaufen und die Zustandsebenen in Bereiche mit unterschiedlichem Verhaltenscharakter aufteilen
- Trennungsgebilde heißen **Attraktoren**
- Phänomen: befindet sich das System (sein Zustand) erst einmal auf einem bestimmten Bereich abgegrenzt, so besteht **keine** Möglichkeit in freier Bewegung auf einen anderen Bereich zu kommen (s. Bi-stabiler Schwinger)



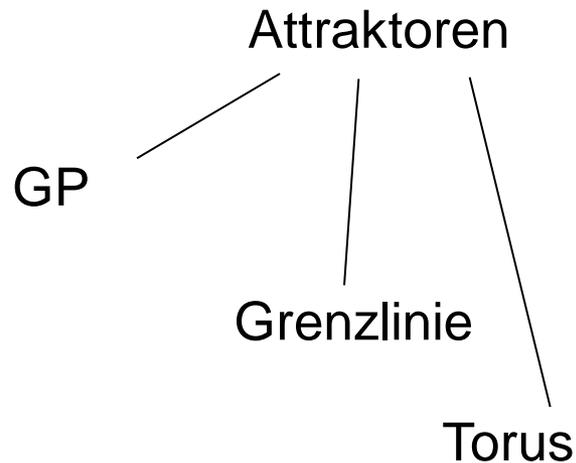
Trennlinie

Trennlinie



Attraktoren als Tori

- in Analogie zu Grenzyklen zweidimensionaler Systeme kann es bei Systemen mit **mehr als zwei Zustandsgrößen** Flächen im Zustandsraum geben, die die Bewegung des Systems "einfangen"
- Attraktor in Gestalt einer Trennfläche heißt **Torus**



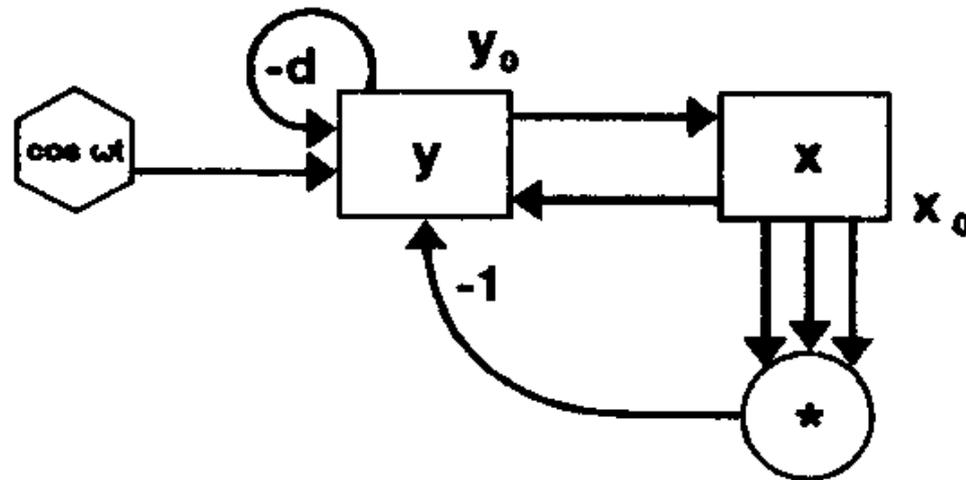
i) Chaotischer bistabiler Schwinger

- System 2. Ordnung

$$x' = y$$

$$y' = x - x^3 - d \cdot y + q \cdot \cos(\omega t)$$

- der bistabile Schwinger wird zusätzlich durch zeitabhängige Winkel-Funktion angeregt



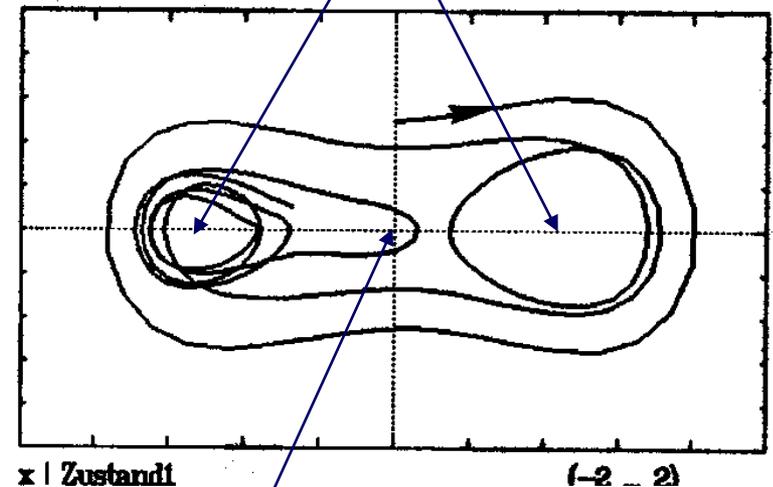
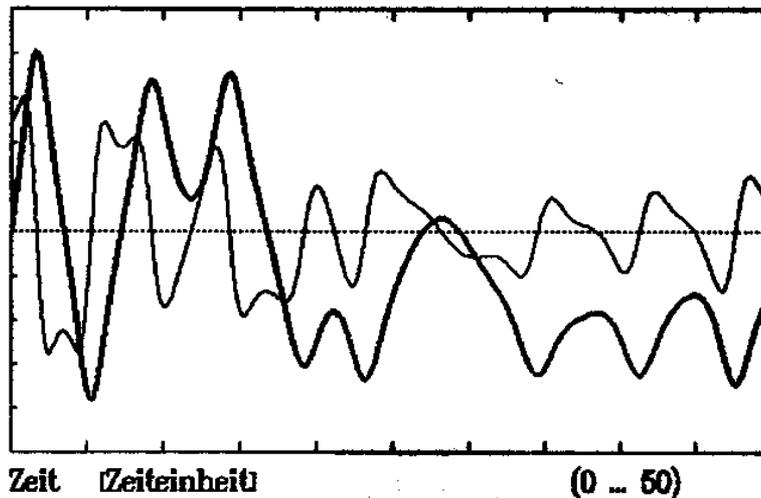
i) Chaotischer bistabiler Schwinger (Forts.)

$$x' = y$$

$$y' = x - x^3 - d \cdot y + q \cdot \cos(\omega t)$$

- in gewissen Parameterbereichen ergibt sich chaotisches Verhalten

zwei stabile GP (werden aber nicht angenommen)



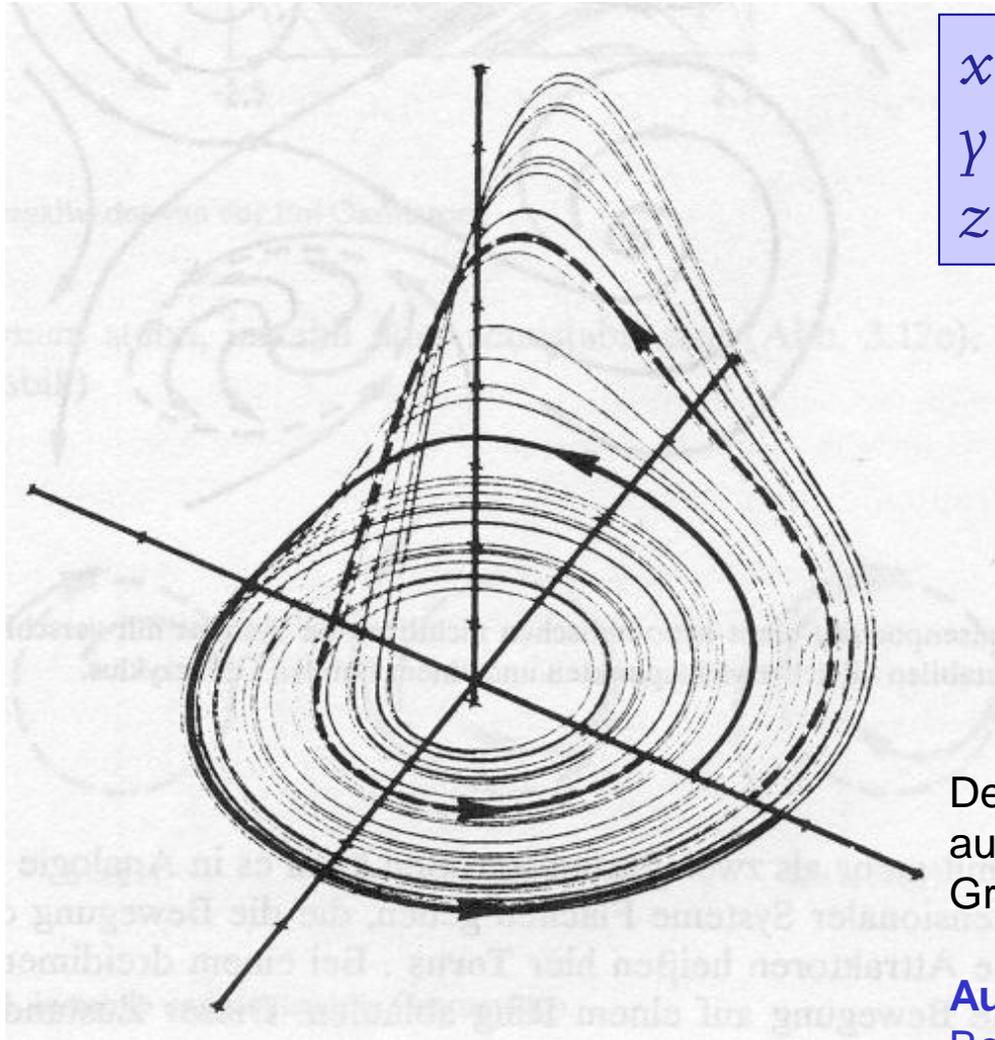
instabil

Typisches Untersuchungsziel:

Sensitivität von Parametern auf das Systemverhalten
(denn häufig stellt man chaotisches Verhalten nur bei bestimmten Parameterkonstellationen fest)

Simulation mit ODEMX

j) Chaotischer Attraktor (Rössler-Attraktor)



$$x' = -y - z$$

$$y' = x + ay$$

$$z' = b + (x - c) \cdot z$$

entscheidende Verhaltensgröße

- Schwingungsperiode
- c bestimmt Chaos $c > c_0$

Der Verhaltensvorhersagbarkeit sind auch bei deterministischen Systemen Grenzen gesetzt.

Aufgabe der Systemanalyse:
Bestimmung solcher Attraktorflächen

Chaotische Attraktoren

- bei den meisten realen Systemen bleiben benachbarte Zustandsbahnen im Laufe der Zeit nahe beieinander.
 - Systeme sind deshalb vorhersagbar
 - aus den Anfangswerten lässt sich die zukünftige Entwicklung ermitteln
 - Entwicklung ist gegenüber kleinen Messfehlern der Anfangswerte nicht sehr empfindlich
- chaotische Systeme haben zwar **Attraktorflächen**, in denen sich der Systemzustand nach einer gewissen Zeit befinden muss, ohne dass jedoch sein exakter Ort mit Sicherheit vorhergesagt werden kann
 - benachbarte Zustandsbahnen streben exponentiell auseinander, verlassen aber die Attraktorfläche nicht
 - Endzustand liegt irgendwo auf dem Attraktor
- chaotische Systeme sind deshalb nicht vorhersagbar

3. Analyse zeitkontinuierlicher Systeme

1. Wirkungsstrukturen
2. Beispiel: Einfaches Räuber-Beute-System
3. Gleichgewichtspunkte und ihre Stabilität
4. Systematische Betrachtung von Systemstrukturen
5. Stabilitätsanalyse linearer und nichtlinearer Systeme
6. Analytische Stabilitätsanalyse (Prinzip)
7. Besonderheiten nichtlinearer Systeme

Typische Aufgabenstellung bei der Untersuchung zeitkontinuierlicher Systeme

- (1) Bestimmung von **Gleichgewichtspunkten**
 - Zustandsgrößen ändern sich nicht,
 - ihre ersten Ableitungen nach der Zeit sind alle Null

- (2) Ermittlung der **Qualität** der Gleichgewichtspunkte
 - verschiedene Formen der Stabilität
 - Identifikation von Grenzbereichen

- (1) Bestimmung der **Abhängigkeit** der Lösungen für (1) und (2) von
 - Systemparametern und
 - möglichen Eingaben/Belastungen des Systems

(z.B. stellt man häufig chaotisches Verhalten nur bei bestimmten Parameterkonstellationen fest)

Achtung:

- aber nur einfache Systeme haben tatsächlich Punkte im Zustandsraum, für die bestimmte Eigenschaften gelten
- oft nur Aussagen zu potentiellen Bereichen (Grenzflächen) im n-dimensionalen Zustandsraum, die selbst nicht angenommen werden können

Ziele der Systemuntersuchung

interessantes Charakteristikum des Systemverhaltens
stationäre / eingeschwungene Zustände

Bewertung des Systemverhaltens:
Stabilität stationärer / eingeschwungener Zustände
Identifikation von Grenzbereichen

Bewertung des Systemverhaltens:
lineare – nichtlineare (chaotische und nichtchaotische) Systeme

Typisches Untersuchungsziel:
Sensitivität von Parametern auf das Systemverhalten
(z.B. stellt man häufig chaotisches Verhalten nur bei bestimmten Parameterkonstellationen fest)

Analytische Verfahren

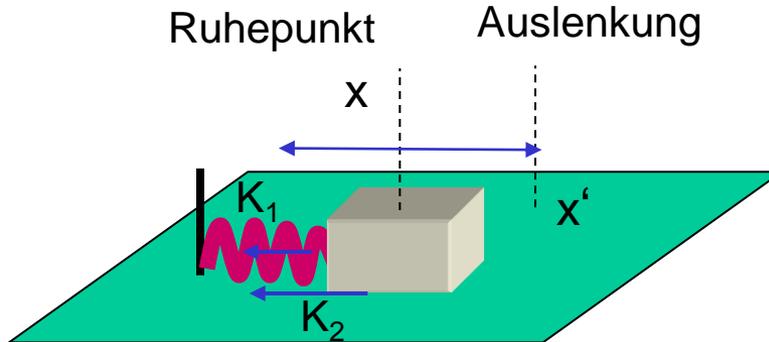


Experimentelle Verfahren

3. Zeitkontinuierliche Systeme

1. Wirkungsstrukturen
2. Beispiel: Einfaches Räuber-Beute-System
3. Gleichgewichtspunkte und ihre Stabilität
4. Systematische Betrachtung von Systemstrukturen
5. Stabilitätsanalyse linearer und nichtlinearer Systeme
6. Analytische Stabilitätsanalyse (Prinzip)
7. Besonderheiten nichtlinearer Systeme

Lineare Systeme



Dynamik wird durch Kräfte bestimmt:

$$K_1 = -kx \quad (k \text{ Maß für Sprungkraft der Feder})$$

$$K_2 = -cx' \quad (c \text{ Reibungskoeffizient})$$

$x' = dx/dt$ (Bewegungsgeschwindigkeit des Klotzes:
positiv: nach rechts, negativ: nach links)

2. Newtonsche Gesetz

$$K_1 + K_2 = m \, d^2x/dt^2$$

der Bewegung des Klotzes wirken zwei Kräfte entgegen: Federkraft und Reibungskraft

Gleichung für Zeitabhängigkeit der Zustandsgröße x (Position)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

lineare DGL 2.Ordnung

$x \rightarrow z_1$ Position

$dx/dt \rightarrow z_2$ Geschwindigkeit

$$z_1' = z_2$$

$$z_2' = -\frac{k}{m} z_1 - \frac{c}{m} z_2$$

zweidimensionales System
linearer DGL 1.Ordnung

Zustandsraumanalyse: Punkt $(z_1, z_2) = (0, 0)$ ist der einzige stabile GP

Stabilität linearer Systeme

$$z_1' = z_2$$

$$z_2' = -\frac{k}{m} z_1 - \frac{c}{m} z_2$$

$$z_1' = a_{11} z_1 + a_{12} z_2$$

$$z_2' = a_{21} z_1 + a_{22} z_2$$

homogene DGL

$$z' = A z$$

- Bedingung für GP: $z' = 0 \rightarrow A z = 0$
 - **Vor.:** Systemmatrix A ist nicht singulär: $\det(A) \neq 0$
 - lineares (algebraisches) Gleichungssystem $A z = 0$ hat nur die triviale Lösung $z = 0$ ($z_1, z_2 = (0, 0)$)

inhomogene DGL
 $z' = A z + B u$

- elegante Bedingung für Stabilität des GPs:
 - sei $z' = A z$ ein lineares dynamisches System mit nichtsingulärer Systemmatrix A.
 - der Punkt z im Zustandsraum mit $z = 0$ ist genau dann **asymptotisch stabil**, wenn die **Realteile aller Eigenwerte von A negativ** sind

- **wichtig:** Stabilitätsaussage gilt für lineare Systeme systemglobal, d.h. unabhängig von Anfangswerten

Eigenwerte der Systemmatrix

Berechnung

$\det(A - \lambda I) = 0$ sind Polynome in λ :
Lösungen liegen im Bereich der komplexen Zahlen

→ Ortslagendiagramm
der Eigenwerte

Fälle

- sind die Eigenwerte **reelle** Zahlen
 - dann sind alle Lösungsanteile abklingend, wenn die Eigenwerte kleiner Null sind
(**Gleichgewicht ist stabil**)
 - Wächst aber nur ein einziger Lösungsanteil, dann wird dieser mit zunehmender Zeit beliebig groß (**Gleichgewicht ist instabil**)

EW gehen ein in die explizite Lösung der DGL als Superposition von **e**-Funktionen
(als Exponenten der **e**-Funktion)

- sind die Eigenwerte **konjugiert komplex** $\lambda_{1,2} = p \pm iq$
 - dann ist die Lösung oszillierend (periodisches Schwanken)
 - sind auch hier wiederum **alle** Realanteile kleiner Null, sind die Schwingungen um den Gleichgewichtspunkt gedämpft (**Gleichgewicht ist asymptotisch stabil**)

Verhaltensmöglichkeiten eines *linearen Systems* in Abhängigkeit der Lage der Eigenwerte der System-Matrix (1)

Fall A: Realanteile **aller** Eigenwerte < 0



Stabilität des linearen Systems **unabhängig vom Anfangswert**

Frage: Was kann man aus den Imaginäranteilen erkennen?

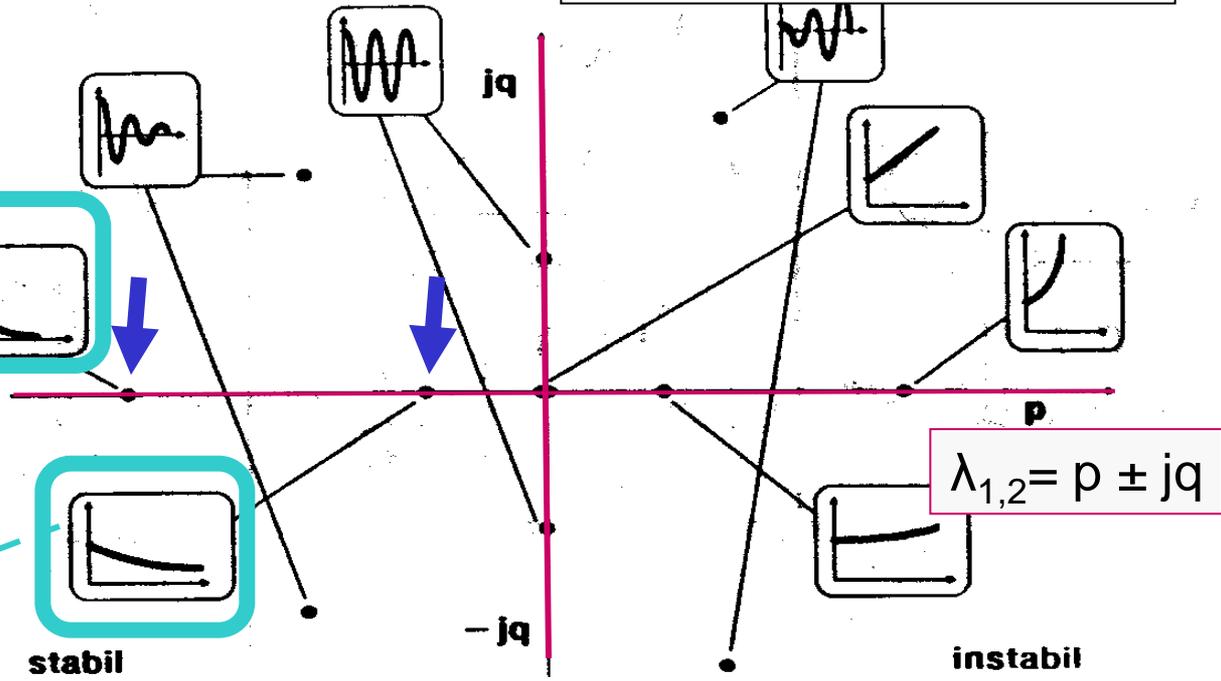
Fall A1: sind **alle** Null



asymptotische Annäherung
je kleiner der Realwert,
umso schneller

stabil
ohne Schwingung
in Richtung
Gleichgewichtspunkt

stabil
ohne Schwingung
in Richtung
Gleichgewichtspunkt

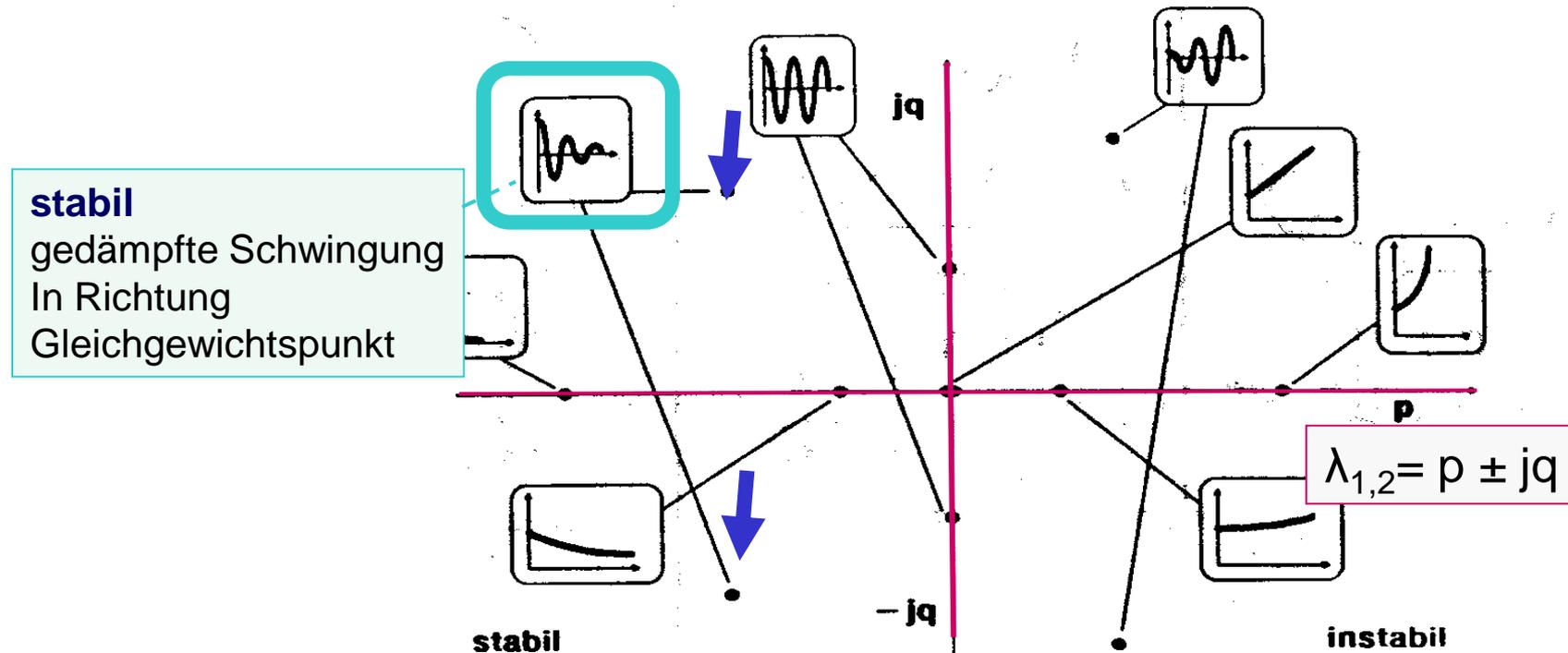


Verhaltensmöglichkeiten eines *linearen Systems* in Abhängigkeit der Lage der Eigenwerte der System-Matrix (2)

Frage: Was kann man aus den Imaginäranteilen erkennen?

Fall A2: konjugiert komplexe Doppellösung

gedämpfte Schwingung



Verhaltensmöglichkeiten eines *linearen Systems* in Abhängigkeit der Lage der Eigenwerte der System-Matrix (3)

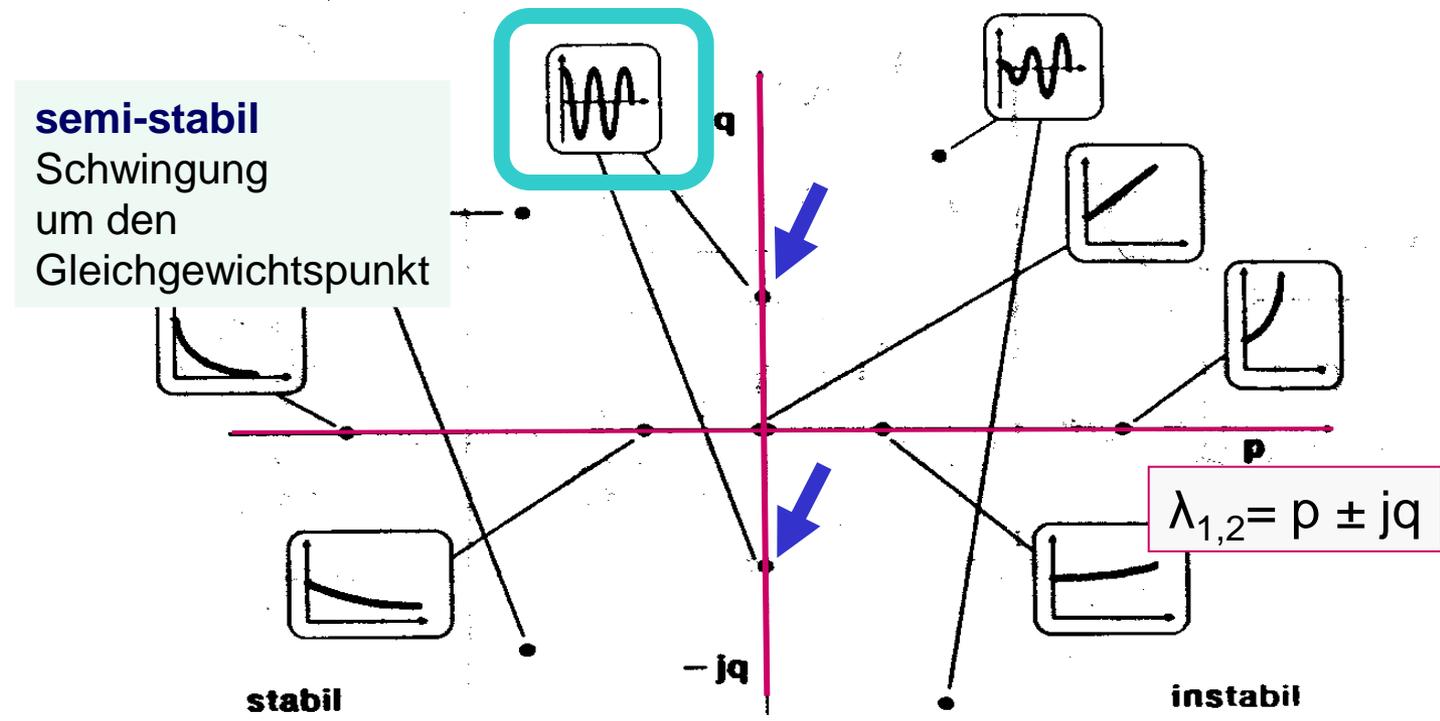
Fall B: Realanteile **aller** Eigenwerte = 0
konjugiert komplexe Doppellösung



Semi-Stabilität des linearen Systems
unabhängig vom Anfangswert



als Schwingung (geschlossene
Kurve um den stationären Zustand)



Verhaltensmöglichkeiten eines *linearen Systems* in Abhängigkeit der Lage der Eigenwerte der System-Matrix (4)

Fall C: Realanteil (mindstens) eines Eigenwertes > 0



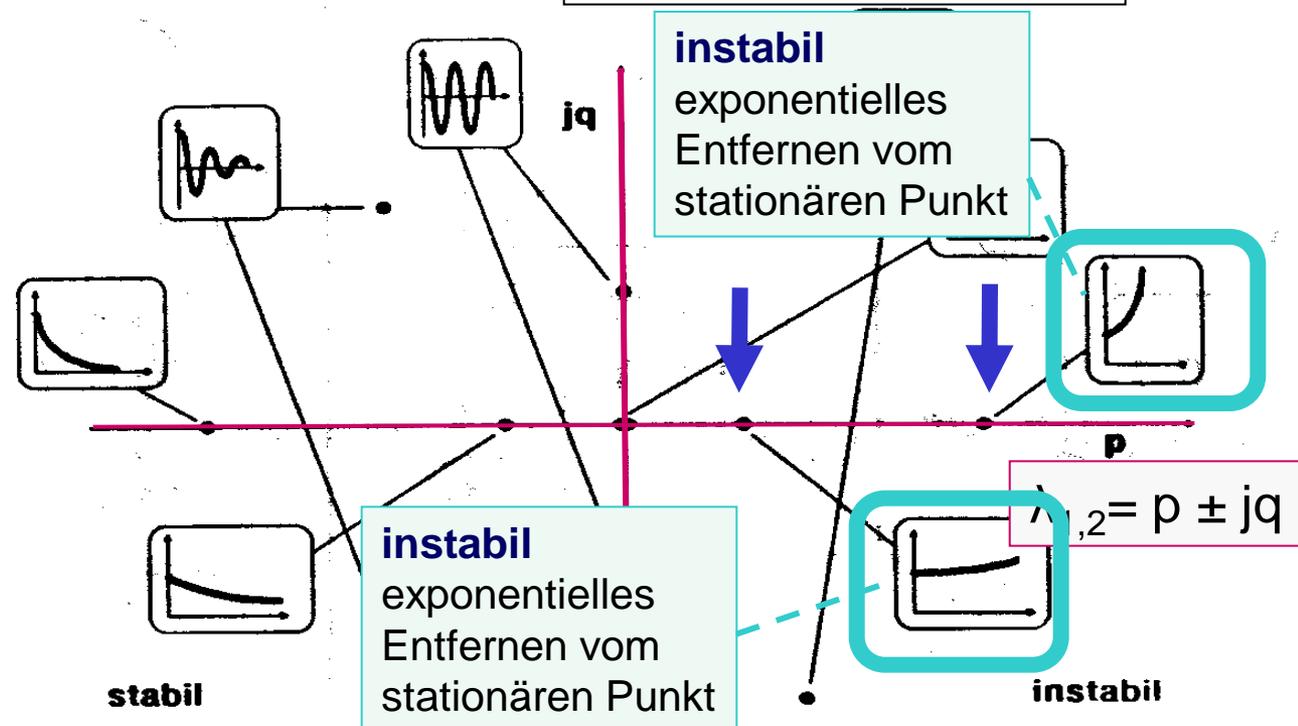
Instabilität des linearen Systems **unabhängig vom Anfangswert**

Frage: Was kann man aus den Imaginäranteilen erkennen?

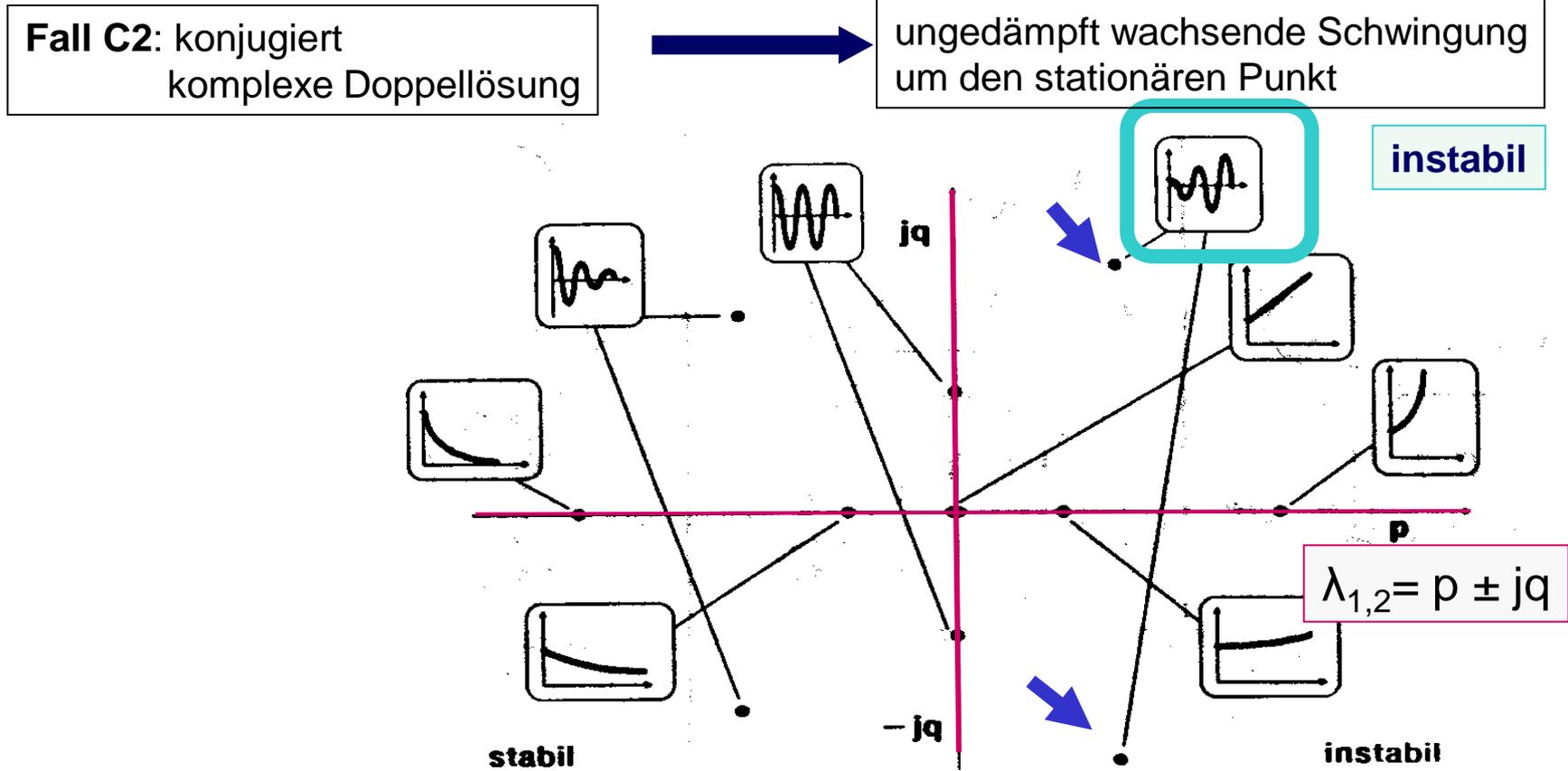
Fall C1: sind alle Null



exponentielles Entfernen je größer der Realwert, umso schneller



Verhaltensmöglichkeiten eines *linearen Systems* in Abhängigkeit der Lage der Eigenwerte der System-Matrix (5)



3. Zeitkontinuierliche Systeme

1. Wirkungsstrukturen
2. Beispiel: Einfaches Räuber-Beute-System
3. Gleichgewichtspunkte und ihre Stabilität
4. Systematische Betrachtung von Systemstrukturen
5. Stabilitätsanalyse linearer und nichtlinearer Systeme
6. Analytische Stabilitätsanalyse (Prinzip)
7. Besonderheiten nichtlinearer Systeme

Stabilitätsanalyse nichtlinearer Systeme

Stabilität gilt nicht mehr systemglobal

- es gibt **mehrere** Gleichgewichtspunkte, die zudem **unterschiedliche** Stabilitätseigenschaften zeigen
- abhängig
 - vom Eingang $u(t)$
 - von Anfangswerten

Stabilität ist eine lokale Eigenschaft eines nichtlinearen Systems

- ausgehend von einem Ausgangswert, der in **unmittelbarer** Nähe zum jeweiligen Gleichgewichtspunkt liegt
- in einer **hinreichend kleinen Umgebung** eines Gleichgewichtspunktes kann das Systemverhalten eines nichtlinearen Systems **näherungsweise** durch ein lineares System dargestellt werden
(→ Methode: um Zustandsraumanalyse nichtlinearer Systeme zu betreiben)
- Bei der Linearisierung wird **je Gleichgewichtspunkt** die Jacobi-Matrix abgeleitet, deren Eigenwerte Aussagen (bekannt für lineare Systeme) zur Stabilität des nichtlinearen System in dem jeweiligen Gleichgewichtspunkt erlauben
(s. Ortslagendiagramm der Eigenwerte)

Gleichgewichtspunkte (linearer u. nichtlinearer Fall)

- ... sind von besonderer Bedeutung, weil sich ein Fließgleichgewicht im System einstellt

allg. (insb. nichtlineare) Form

$$z_1'(t) = f_1(z_1, z_2, \dots, z_n, t)$$

$$z_2'(t) = f_2(z_1, z_2, \dots, z_n, t)$$

...

$$z_n'(t) = f_n(z_1, z_2, \dots, z_n, t)$$

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{z}(t))$$

mehrere Lösungen
sind möglich

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}^*) = \mathbf{0}$$

Lösungen \mathbf{z}^* sind Gleichgewichtspunkte

Spezialfall: lineare Form

$$z_1'(t) = a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + \dots + a_{1n}z_n$$

$$z_2'(t) = a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + \dots + a_{2n}z_n$$

...

$$z_n'(t) = a_{n1}z_1 + a_{n2}z_2 + \dots + a_{nn}z_n$$

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{A} \mathbf{z}(t)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{z}^* = \mathbf{0}$$

ist \mathbf{A} singular: mehrere Lösungen,
sonst $\mathbf{z}^* = \mathbf{0}$ einzige Lösung als Gleichgewichtspunkt

Stabilitätsanalyse linearer Systeme

$$\text{inhomogenes System} \\ \mathbf{z}' = \mathbf{A} \mathbf{z} + \mathbf{B} \mathbf{u}$$

- **Satz:** ein lineares (inhomogenes) System mit **konstantem Eingang** \mathbf{u} wird als **asymptotisch stabil** bezeichnet, wenn sich bei beliebigen Anfangsbedingungen $\mathbf{z}(0)$ der Zustandsvektor mit fortschreitender Zeit dem Gleichgewichtspunkt \mathbf{z}^* nähert.

$$\mathbf{z}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mathbf{z}^*$$

- Aussagen zur Stabilität ergeben sich in Abhängigkeit der Eigenwerte der Systemmatrix \mathbf{A}
(unabhängig von Start- und Eingangsbedingungen !!!)

$$\det [\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}] = 0$$

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + a_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Einheitsmatrix

Lösungen für λ liegen in der komplexen Zahlenebene: $\lambda = p \pm jq$
Eigenwerte sind

- (1) rein reell ($q=0$)
- (2) konjugiert komplex (also paarig: $\lambda_1 = r + jq$, $\lambda_2 = r - jq$)

Stabilitätsanalyse nichtlinearer Systeme

- geg. sei das nichtlineare System $\vec{y}' = \vec{F}(\vec{y}, t)$
- Stabilitätseigenschaften der Ruhelage (in den GPs) soll analysiert werden
- sei y_{GP} ein Gleichgewichtspunkt

1. Das System wird um die Ruhelage y_{GP} linearisiert: $A = \left. \frac{\partial F(y, t)}{\partial y} \right|_{y_{GP}}$
2. Die Eigenwerte des zugehörigen linearisierten Systems $\vec{z}' = A\vec{z}$ werden als Lösung des charakteristischen Polynoms von A bestimmt
3. Rückschluss auf das zugrunde liegende nichtlineare System $\vec{y}' = \vec{F}(\vec{y}, t)$
 - A ist asymptotisch stabil (alle Eigenwerte liegen links der imaginären Achse):
Ruhelage y_{GP} ist **asymptotisch stabil**.
 - A ist instabil (mindestens ein Eigenwert liegt rechts der imaginären Achse):
Ruhelage y_{GP} ist **instabil**.
 - andernfalls (mindestens ein Eigenwert auf der imaginären Achse und keiner rechts davon): Es ist **keine Stabilitätsaussage** für das nichtlineare System **möglich** (höhere Terme entscheiden über die Stabilität).

Zusammenfassung

Lineares System

Asymptotische Stabilität: sämtliche EWs der Systemmatrix müssen in der **linken** komplexen Halbebene liegen

Instabilität: wenn mindestens 1 EW der Systemmatrix in der **rechten** Halbebene liegt, oder wenn mindestens ein mehrfacher EW auf der imaginären Achse liegt

Grenzstabil: wenn kein EW in der **rechten** Halbebene liegt, keine mehrfachen EW auf der **imaginären** Achse liegen und mindestens ein einfacher EW vorhanden ist

Nichtlineares System

Asymptotische Stabilität: sämtliche EWs der Jacobi-Matrix müssen in der **linken** komplexen Halbebene liegen

Instabilität: der größte EW der Jacobi-Matrix ist **positiv**

Grenzstabilität

Die lineare Stabilitätstheorie vermag daher in diesem Fall als Näherungsmethode **keine Aussage** zu machen