

## Übungsblatt 2

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 29.10.–2.11.2012  
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis 15:00 Uhr am 7.11.2012

### Aufgabe 8

Seien  $A, B, C$  Sprachen. Zeigen oder widerlegen Sie:

- (a)  $A(B \cup C) = AB \cup AC$ , (b)  $A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC$ , (mündlich)  
(c)  $A^+ = AA^*$ , (d)  $A(B \cap C) = AB \cap AC$ . (2+3 Punkte)

**Aufgabe 9** Für eine Sprache  $L$  seien

5 Punkte

$$\min(L) = \{x \in L \mid \text{kein Wort } y \in L \text{ ist echtes Präfix von } x\}$$

und

$$\max(L) = \{x \in L \mid x \text{ ist kein echtes Präfix eines Wortes } y \in L\}.$$

$L$  heißt *präfixfrei*, falls kein Wort in  $L$  echtes Präfix eines anderen Wortes in  $L$  ist.

- (a) Charakterisieren Sie die Präfixfreiheit mit Hilfe des  $\min$ -Operators. (mündlich)  
(b) Zeigen Sie, dass  $L = \max(L)$  die Gleichheit  $L = \min(L)$  impliziert. (mündlich)  
(c) Gilt hiervon auch die Umkehrung? Begründen Sie. (2 Punkte)  
(d) Zeigen Sie, dass die Klasse REG unter dem  $\min$ -Operator abgeschlossen ist, d. h. für  $L \in \text{REG}$  folgt  $\min(L) \in \text{REG}$ . (mündlich)  
(e) Zeigen Sie, dass REG unter dem  $\max$ -Operator abgeschlossen ist. (3 Punkte)

### Aufgabe 10

Betrachten Sie die Sprachen

$$A = \{u \in \{a, b\}^* \mid u \text{ endet mit } b\} \text{ und } B = \{v \in \{a, b\}^* \mid \#_a(v) \text{ ist ungerade}\}.$$

- (a) Geben Sie für die Sprachen  $A$  und  $B$  DFAs  $M$  und  $M'$  mit jeweils 2 Zuständen an. (mündlich)  
(b) Konstruieren Sie aus  $M$  und  $M'$  mit dem Verfahren aus der Vorlesung einen NFA  $N$  für das Produkt  $L = AB$ . (mündlich)  
(c) Konstruieren Sie aus  $N$  einen NFA  $N'$  für die Sternhülle  $L^*$  von  $L$  mit dem Verfahren aus der Vorlesung. (5 Punkte)

### Aufgabe 11

Ein ENFA (extended NFA) ist ein NFA  $N = (Z, \Sigma, \delta, S, E)$ , wobei  $\delta$  die Form

$$\delta : Z \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Z)$$

hat und  $\{(z, w) \mid \delta(z, w) \neq \emptyset\}$  endlich ist. Der Zustandsgraph von  $N$  hat also nur endlich viele Kanten, die mit Wörtern  $w \in \Sigma^*$  beschriftet sind. Ist eine Kante mit  $\varepsilon$  beschriftet, so spricht man von einem »spontanen« Übergang, da  $N$  den Zustand wechselt, ohne ein Eingabezeichen zu lesen.

- (a) Definieren Sie die von einem ENFA  $N$  erkannte Sprache formal.  
(b) Zeigen Sie, dass  $\{L(N) \mid N \text{ ist ein ENFA}\} = \text{REG}$  ist.  
(c) Zeigen Sie, dass bei Verzicht auf die Bedingung „ $\{(z, w) \mid \delta(z, w) \neq \emptyset\}$  ist endlich“ jede Sprache  $L \subseteq \Sigma^*$  von einem ENFA erkannt wird.

### Aufgabe 12

Sei  $L_1 \subseteq \{a, b\}^*$  die Sprache der Wörter, die  $aba$  als Teilwort enthalten.

- (a) Geben Sie einen NFA  $N$  für  $L_1$  an und zeigen Sie, dass  $L(N) = L_1$  ist.  
(b) Konstruieren Sie den zu  $N$  gehörigen Potenzmengenautomaten.  
(c) Geben Sie reguläre Ausdrücke für  $L_1$  und für  $\overline{L_1}$  an.

### Aufgabe 13

Sei  $L_2 \subseteq \{a, b\}^*$  die Sprache der Wörter, die das Teilwort  $abab$  enthalten.

- (a) Geben Sie einen NFA  $N$  für  $L_2$  an und zeigen Sie  $L(N) = L_2$ . (3 Punkte)  
(b) Konstruieren Sie den zu  $N$  gehörigen Potenzmengenautomaten. (3 Punkte)  
(c) Geben Sie reguläre Ausdrücke für  $L_2$  und für  $\overline{L_2}$  an. (4 Punkte)

### Aufgabe 14

Sei  $L \subseteq \Sigma^*$  eine reguläre Sprache. Zeigen Sie, dass dann auch die folgenden Sprachen regulär sind, indem Sie aus einem DFA für  $L$  einen DFA (oder NFA) für diese Sprachen konstruieren. Begründen Sie jeweils auch die Korrektheit des von Ihnen konstruierten Automaten.

- (a)  $\text{prefix}(L) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* : xy \in L\}$ , (mündlich)  
(b)  $L^R = \{x^R \mid x \in L\}$ , (mündlich)  
( $x^R$  bezeichnet das gespiegelte Wort, z.B.  $abcd^R = dcba$ )  
(c)  $\text{suffix}(L) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* : xy \in L\}$ , (2 Punkte)  
(d)  $L^+$ , (3 Punkte)  
\*(e)  $\text{cycle}(L) = \{vu \in \Sigma^* \mid uv \in L\}$ , (4 Zusatzpunkte)  
\*(f)  $L/2 = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* : xy \in L, |x| = |y|\}$ . (6 Zusatzpunkte)

*Hinweis:* Mit \* markierte Aufgaben haben einen erhöhten Schwierigkeitsgrad. Falls Sie schriftlich zu lösen sind, werden dafür Bonuspunkte vergeben.

mündlich

mündlich

10 Punkte

5+10 Punkte