

Vorlesungsskript  
Graphalgorithmen

Wintersemester 2018/19

Prof. Dr. Johannes Köbler  
Humboldt-Universität zu Berlin  
Lehrstuhl Komplexität und Kryptografie

12. Dezember 2018

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Graphentheoretische Grundlagen</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Färben von Graphen</b>	<b>3</b>
2.1	Färben von planaren Graphen . . . . .	4
2.2	Färben von chordalen Graphen . . . . .	10
2.3	Der Satz von Brooks . . . . .	17
2.4	Kantenfärbungen . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Flüsse in Netzwerken</b>	<b>21</b>
3.1	Der Ford-Fulkerson-Algorithmus . . . . .	21
3.2	Der Edmonds-Karp-Algorithmus . . . . .	25

# 1 Graphentheoretische Grundlagen

**Definition 1.1.** Ein (**ungerichteter**) **Graph** ist ein Paar  $G = (V, E)$ , wobei

$V$  - eine endliche Menge von **Knoten/Ecken** und

$E$  - die Menge der **Kanten** ist.

Hierbei gilt

$$E \subseteq \binom{V}{2} = \{\{u, v\} \subseteq V \mid u \neq v\}.$$

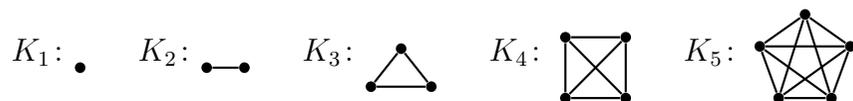
Sei  $v \in V$  ein Knoten.

- Die **Nachbarschaft** von  $v$  ist  $N_G(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}$ .
- Der **Grad** von  $v$  ist  $\deg_G(v) = |N_G(v)|$ .
- Der **Minimalgrad** von  $G$  ist  $\delta(G) = \min_{v \in V} \deg_G(v)$  und der **Maximalgrad** von  $G$  ist  $\Delta(G) = \max_{v \in V} \deg_G(v)$ .
- Jeder Knoten  $u \in V$  vom Grad  $\leq 1$  heißt **Blatt** und die übrigen Knoten (vom Grad  $\geq 2$ ) heißen **innere Knoten** von  $G$ .

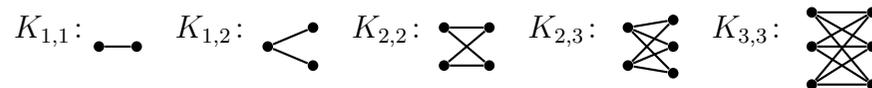
Falls  $G$  aus dem Kontext ersichtlich ist, schreiben wir auch einfach  $N(v)$ ,  $\deg(v)$ ,  $\delta$  usw.

**Beispiel 1.2.**

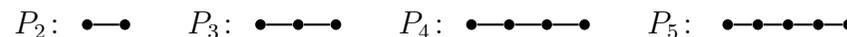
- Der **vollständige Graph**  $(V, E)$  auf  $n$  Knoten, d.h.  $|V| = n$  und  $E = \binom{V}{2}$ , wird mit  $K_n$  und der **leere Graph**  $(V, \emptyset)$  auf  $n$  Knoten wird mit  $E_n$  bezeichnet.



- Der **vollständige bipartite Graph**  $(A, B, E)$  auf  $a + b$  Knoten, d.h.  $A \cap B = \emptyset$ ,  $|A| = a$ ,  $|B| = b$  und  $E = \{\{u, v\} \mid u \in A, v \in B\}$  wird mit  $K_{a,b}$  bezeichnet.



- Der **Pfad** mit  $n$  Knoten wird mit  $P_n$  bezeichnet.



- Der **Kreis** mit  $n$  Knoten wird mit  $C_n$  bezeichnet.



**Definition 1.3.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph.

- Eine Knotenmenge  $U \subseteq V$  heißt **unabhängig** oder **stabil**, wenn es keine Kante von  $G$  mit beiden Endpunkten in  $U$  gibt, d.h. es gilt  $E \cap \binom{U}{2} = \emptyset$ . Die **Stabilitätszahl** ist

$$\alpha(G) = \max\{|U| \mid U \text{ ist stabile Menge in } G\}.$$

- Eine Knotenmenge  $U \subseteq V$  heißt **Clique**, wenn jede Kante mit beiden Endpunkten in  $U$  in  $E$  ist, d.h. es gilt  $\binom{U}{2} \subseteq E$ . Die **Cliquenzahl** ist

$$\omega(G) = \max\{|U| \mid U \text{ ist Clique in } G\}.$$

- Ein Graph  $G' = (V', E')$  heißt **Sub-/Teil-/Untergraph** von  $G$ , falls  $V' \subseteq V$  und  $E' \subseteq E$  ist. Im Fall  $V' = V$  wird  $G'$  auch ein **(auf)spannender** Teilgraph von  $G$  genannt und wir schreiben für  $G'$  auch  $G - E''$  (bzw.  $G = G' \cup E''$ ), wobei  $E'' = E - E'$  die Menge der aus  $G$  entfernten Kanten ist. Im Fall  $E'' = \{e\}$  schreiben wir für  $G'$  auch einfach  $G - e$  (bzw.  $G = G' \cup e$ ).

## 1 Graphentheoretische Grundlagen

- d) Ein  $k$ -regulärer spannender Teilgraph von  $G$  wird auch als  **$k$ -Faktor** von  $G$  bezeichnet. Ein  $d$ -regulärer Graph  $G$  heißt  **$k$ -faktorisierbar**, wenn sich  $G$  in  $l = d/k$  kantendisjunkte  $k$ -Faktoren  $G_1, \dots, G_l$  zerlegen lässt.
- e) Ein Subgraph  $G' = (V', E')$  heißt (**durch  $V'$** ) **induziert**, falls  $E' = E \cap \binom{V'}{2}$  ist. Für  $G'$  schreiben wir dann auch  $G[V']$  oder  $G - V''$ , wobei  $V'' = V - V'$  die Menge der aus  $G$  entfernten Knoten ist. Ist  $V'' = \{v\}$ , so schreiben wir für  $G'$  auch einfach  $G - v$  und im Fall  $V' = \{v_1, \dots, v_k\}$  auch  $G[v_1, \dots, v_k]$ .
- f) Ein **Weg** ist eine Folge von (nicht notwendig verschiedenen) Knoten  $v_0, \dots, v_\ell$  mit  $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$  für  $i = 0, \dots, \ell - 1$ . Die **Länge** des Weges ist die Anzahl der durchlaufenen Kanten, also  $\ell$ . Im Fall  $\ell = 0$  heißt der Weg **trivial**. Ein Weg  $(v_0, \dots, v_\ell)$  heißt auch  **$v_0$ - $v_\ell$ -Weg**.
- g)  $G$  heißt **zusammenhängend**, falls es für alle Paare  $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$  einen  $u$ - $v$ -Weg gibt.
- h) Die durch die Äquivalenzklassen  $V_i \subseteq V$  der Relation
- $$Z = \{(u, v) \in V \times V \mid \text{es gibt in } G \text{ einen } u\text{-}v\text{-Weg}\}$$
- induzierten Teilgraphen  $G[V_i]$  heißen **Zusammenhangskomponenten** (engl. connected components) oder einfach **Komponenten** von  $G$ .
- i) Ein  $u$ - $v$ -Weg heißt **einfach** oder  **$u$ - $v$ -Pfad**, falls alle durchlaufenen Knoten verschieden sind.
- j) Ein **Zyklus** ist ein  $u$ - $v$ -Weg mit  $u = v$ .
- k) Eine Menge von Pfaden heißt **disjunkt**, wenn je zwei Pfade in der Menge keine gemeinsamen Knoten haben, **kantendisjunkt**, wenn je zwei Pfade in der Menge keine gemeinsamen Kanten haben, und **knotendisjunkt**, wenn je zwei Pfade in der Menge höchstens gemeinsame Endpunkte haben.
- l) Ein **Kreis** ist ein Zyklus  $(v_1, \dots, v_\ell, v_1)$  der Länge  $\ell \geq 3$ , für den  $v_1, \dots, v_\ell$  paarweise verschieden sind.

- m) Ein Graph heißt **kreisfrei**, **azyklisch** oder **Wald**, falls er keinen Kreis enthält. Ein **Baum** ist ein zusammenhängender Wald.

**Definition 1.4.** Ein **gerichteter Graph** oder **Digraph** ist ein Paar  $G = (V, E)$ , wobei

$V$  - eine endliche Menge von **Knoten/Ecken** und  
 $E$  - die Menge der **Kanten** ist.

Hierbei gilt

$$E \subseteq V \times V = \{(u, v) \mid u, v \in V\},$$

wobei  $E$  auch Schlingen  $(u, u)$  enthalten kann. Sei  $v \in V$  ein Knoten.

- a) Die **Nachfolgermenge** von  $v$  ist  $N^+(v) = \{u \in V \mid (v, u) \in E\}$ .
- b) Die **Vorgängermenge** von  $v$  ist  $N^-(v) = \{u \in V \mid (u, v) \in E\}$ .
- c) Die **Nachbarmenge** von  $v$  ist  $N(v) = N^+(v) \cup N^-(v)$ .
- d) Der **Ausgangsgrad** von  $v$  ist  $\deg^+(v) = |N^+(v)|$  und der **Eingangsgrad** von  $v$  ist  $\deg^-(v) = |N^-(v)|$ . Der **Grad** von  $v$  ist  $\deg(v) = \deg^+(v) + \deg^-(v)$ .
- e) Ein (**gerichteter**)  **$v_0$ - $v_\ell$ -Weg** ist eine Folge von Knoten  $v_0, \dots, v_\ell$  mit  $(v_i, v_{i+1}) \in E$  für  $i = 0, \dots, \ell - 1$ .
- f) Ein (**gerichteter**) **Zyklus** ist ein gerichteter  $u$ - $v$ -Weg mit  $u = v$ .
- g) Ein gerichteter Weg heißt **einfach** oder (**gerichteter**) **Pfad**, falls alle durchlaufenen Knoten verschieden sind.
- h) Ein (**gerichteter**) **Kreis** in  $G$  ist ein gerichteter Zyklus  $(v_1, \dots, v_\ell, v_1)$  der Länge  $\ell \geq 1$ , für den  $v_1, \dots, v_\ell$  paarweise verschieden sind.
- i)  $G$  heißt **kreisfrei** oder **azyklisch**, wenn es in  $G$  keinen gerichteten Kreis gibt.
- j)  $G$  heißt **stark zusammenhängend**, wenn es in  $G$  für jedes Knotenpaar  $u \neq v \in V$  sowohl einen  $u$ - $v$ -Pfad als auch einen  $v$ - $u$ -Pfad gibt.
- k)  $G$  heißt **gerichteter Wald**, wenn  $G$  kreisfrei ist und jeder Knoten  $v \in V$  Eingangsgrad  $\deg^-(v) \leq 1$  hat.

## 2 Färben von Graphen

l) Ein Knoten  $w \in V$  vom Eingangsgrad  $\deg^-(w) = 0$  heißt **Wurzel** von  $G$ , und ein Knoten  $u \in V$  vom Ausgangsgrad  $\deg^+(u) = 0$  heißt **Blatt** von  $G$ .

Die **Adjazenzmatrix** eines Graphen bzw. Digraphen  $G = (V, E)$  mit (geordneter) Knotenmenge  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  ist die  $(n \times n)$ -Matrix  $A = (a_{ij})$  mit den Einträgen

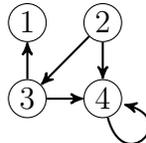
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \{v_i, v_j\} \in E \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für ungerichtete Graphen ist die Adjazenzmatrix symmetrisch mit  $a_{ii} = 0$  für  $i = 1, \dots, n$ .

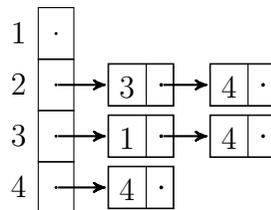
Bei der **Adjazenzlisten-Darstellung** wird für jeden Knoten  $v_i$  eine Liste mit seinen Nachbarn verwaltet. Im gerichteten Fall verwaltet man entweder nur die Liste der Nachfolger oder zusätzlich eine weitere für die Vorgänger. Falls die Anzahl der Knoten statisch ist, organisiert man die Adjazenzlisten in einem Feld, d.h. das Feldelement mit Index  $i$  verweist auf die Adjazenzliste von Knoten  $v_i$ . Falls sich die Anzahl der Knoten dynamisch ändert, so werden die Adjazenzlisten typischerweise ebenfalls in einer doppelt verketteten Liste verwaltet.

### Beispiel 1.5.

Betrachte den gerichteten Graphen  $G = (V, E)$  mit  $V = \{1, 2, 3, 4\}$  und  $E = \{(2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (4, 4)\}$ . Dieser hat folgende Adjazenzmatrix- und Adjazenzlisten-Darstellung:



	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	0	1	1
3	1	0	0	1
4	0	0	0	1



◁

## 2 Färben von Graphen

**Definition 2.1.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und sei  $k \in \mathbb{N}$ .

- Eine Abbildung  $f: V \rightarrow \mathbb{N}$  heißt **Färbung** von  $G$ , wenn  $f(u) \neq f(v)$  für alle  $\{u, v\} \in E$  gilt.
- $G$  heißt  **$k$ -färbbar**, falls eine Färbung  $f: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$  existiert.
- Die **chromatische Zahl** ist

$$\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ ist } k\text{-färbbar}\}.$$

### Beispiel 2.2.

$$\chi(E_n) = 1, \quad \chi(K_{n,m}) = 2, \quad \chi(K_n) = n,$$

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ gerade} \\ 3, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ein wichtiges Entscheidungsproblem ist, ob ein gegebener Graph  $k$ -färbbar ist. Dieses Problem ist für jedes feste  $k \geq 3$  schwierig.

### $k$ -Färbbarkeit ( $k$ -COLORING):

**Gegeben:** Ein Graph  $G$ .

**Gefragt:** Ist  $G$   $k$ -färbbar?

**Satz 2.3.**  $k$ -COLORING ist für  $k \geq 3$  NP-vollständig.

Das folgende Lemma setzt die chromatische Zahl  $\chi(G)$  in Beziehung zur Stabilitätszahl  $\alpha(G)$ .

**Lemma 2.4.**  $n/\alpha(G) \leq \chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$ .

*Beweis.* Sei  $G$  ein Graph und sei  $c$  eine  $\chi(G)$ -Färbung von  $G$ . Da dann die Mengen  $S_i = \{u \in V \mid c(u) = i\}$ ,  $i = 1, \dots, \chi(G)$ , stabil sind, folgt  $|S_i| \leq \alpha(G)$  und somit gilt

$$n = \sum_{i=1}^{\chi(G)} |S_i| \leq \chi(G)\alpha(G).$$

Für den Beweis von  $\chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$  sei  $S$  eine stabile Menge in  $G$  mit  $|S| = \alpha(G)$ . Dann ist  $G - S$   $k$ -färbbar für ein  $k \leq n - |S|$ . Da wir alle Knoten in  $S$  mit der Farbe  $k + 1$  färben können, folgt  $\chi(G) \leq k + 1 \leq n - \alpha(G) + 1$ . ■

Beide Abschätzungen sind scharf, können andererseits aber auch beliebig schlecht werden.

**Lemma 2.5.**  $\binom{\chi(G)}{2} \leq m$  und somit  $\chi(G) \leq 1/2 + \sqrt{2m + 1/4}$ .

*Beweis.* Zwischen je zwei Farbklassen einer optimalen Färbung muss es mindestens eine Kante geben. ■

Die chromatische Zahl steht auch in Beziehung zur Cliquenzahl  $\omega(G)$  und zum Maximalgrad  $\Delta(G)$ :

**Lemma 2.6.**  $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

*Beweis.* Die erste Ungleichung folgt daraus, dass die Knoten einer maximal großen Clique unterschiedliche Farben erhalten müssen.

Um die zweite Ungleichung zu erhalten, betrachten wir folgenden Färbungsalgorithmus:

#### Algorithmus greedy-color

---

```

1  input ein Graph  $G = (V, E)$  mit  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ 
2   $c(v_1) := 1$ 
3  for  $i := 2$  to  $n$  do
4     $F_i := \{c(v_j) \mid j < i, v_j \in N(v_i)\}$ 
5     $c(v_i) := \min\{k \geq 1 \mid k \notin F_i\}$ 

```

---

Da für die Farbe  $c(v_i)$  von  $v_i$  nur  $|F_i| \leq \Delta(G)$  Farben verboten sind, gilt  $c(v_i) \leq \Delta(G) + 1$ . ■

## 2.1 Färben von planaren Graphen

Ein Graph  $G$  heißt **planar**, wenn er so in die Ebene einbettbar ist, dass sich zwei verschiedene Kanten höchstens in ihren Endpunkten berühren. Dabei werden die Knoten von  $G$  als Punkte und die Kanten von  $G$  als Verbindungslinien (genauer: Jordankurven) zwischen den zugehörigen Endpunkten dargestellt.

Bereits im 19. Jahrhundert wurde die Frage aufgeworfen, wie viele Farben höchstens benötigt werden, um eine Landkarte so zu färben, dass aneinander grenzende Länder unterschiedliche Farben erhalten. Offensichtlich lässt sich eine Landkarte in einen planaren Graphen transformieren, indem man für jedes Land einen Knoten zeichnet und benachbarte Länder durch eine Kante verbindet. Länder, die sich nur in einem Punkt berühren, gelten dabei nicht als benachbart.

Die Vermutung, dass 4 Farben ausreichen, wurde 1878 von Kempe „bewiesen“ und erst 1890 entdeckte Heawood einen Fehler in Kempes „Beweis“. Übrig blieb der *5-Farben-Satz*. Der *4-Farben-Satz* wurde erst 1976 von Appel und Haken bewiesen. Hierbei handelt es sich jedoch nicht um einen Beweis im klassischen Sinne, da zur Überprüfung der vielen auftretenden Spezialfälle Computer benötigt werden.

**Satz 2.7** (Appel, Haken 1976).

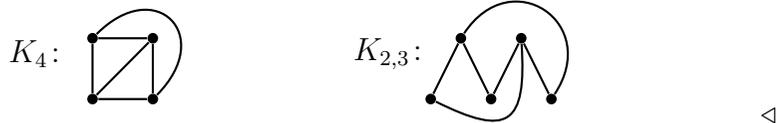
*Jeder planare Graph ist 4-färbbar.*

Aus dem Beweis des 4-Farben-Satzes von Appel und Haken lässt sich ein 4-Färbungsalgorithmus für planare Graphen mit einer Laufzeit von  $\mathcal{O}(n^4)$  gewinnen.

In 1997 fanden Robertson, Sanders, Seymour und Thomas einen einfacheren Beweis für den 4-Farben-Satz, welcher zwar einen deut-

lich schnelleren  $\mathcal{O}(n^2)$  Algorithmus liefert, aber ebenfalls nur mit Computer-Unterstützung verifizierbar ist.

**Beispiel 2.8.** *Wie die folgenden Einbettungen von  $K_4$  und  $K_{2,3}$  in die Ebene zeigen, sind  $K_4$  und  $K_{2,3}$  planar.*



Zur Beantwortung der Frage, ob auch  $K_5$  und  $K_{3,3}$  planar sind, betrachten wir die **Gebiete**, die bei der Einbettung von (zusammenhängenden) Graphen in die Ebene entstehen. Dabei gehören 2 Punkte zum selben Gebiet, falls es zwischen ihnen eine Verbindungslinie gibt, die keine Kante des eingebetteten Graphen kreuzt oder berührt. Nur eines dieser Gebiete ist unbeschränkt und dieses wird als **äußeres Gebiet** bezeichnet. Die Anzahl der Gebiete von  $G$  bezeichnen wir mit  $r(G)$  oder kurz mit  $r$ . Die begrenzenden Kanten eines Gebietes  $g$  bilden seinen **Rand**  $\text{rand}(g)$ . Ihre Anzahl bezeichnen wir mit  $d(g)$ , wobei Kanten  $\{u, v\}$ , an die  $g$  von beiden Seiten grenzt, doppelt gezählt werden.

Der **Rand**  $\text{rand}(g)$  eines Gebiets  $g$  ist die (zirkuläre) Folge aller Kanten, die an  $g$  grenzen, wobei man jede Kante so durchläuft, dass  $g$  „in Fahrtrichtung links“ liegt bzw. jeden Knoten  $u$ , den man über eine Kante  $e$  erreicht, über die im Uhrzeigersinn nächste Kante  $e'$  wieder verlässt. Auf diese Weise erhält jede Kante auf dem Rand von  $g$  eine Richtung (oder Orientierung).

Da jede Kante zur Gesamtlänge  $\sum_g d(g)$  aller Ränder den Wert 2 beiträgt (sie wird genau einmal in jeder Richtung durchlaufen), folgt

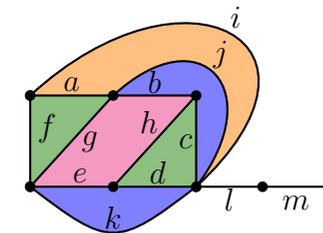
$$\sum_g d(g) = 2m(G).$$

Wir nennen das Tripel  $G' = (V, E, R)$  eine **ebene Realisierung** des Graphen  $G = (V, E)$ , falls es eine Einbettung von  $G$  in die Ebene

gibt, deren Gebiete die Ränder in  $R$  haben. In diesem Fall nennen wir  $G' = (V, E, R)$  auch einen **ebenen Graphen**. Ist  $G$  nicht zusammenhängend, so betten wir die Komponenten von  $G$  in die Ebene ein und fassen alle Ränder, die bei diesen Einbettungen entstehen, zu einer Randmenge  $R$  zusammen.

Führen zwei Einbettungen von  $G$  in die Ebene auf dieselbe Randmenge  $R$ , so werden sie als **äquivalent** angesehen. Eine andere Möglichkeit, Einbettungen bis auf Äquivalenz kombinatorisch zu beschreiben, besteht darin, für jeden Knoten  $u$  die (zirkuläre) Ordnung  $\pi_u$  aller mit  $u$  inzidenten Kanten anzugeben. Man nennt  $\pi = \{\pi_u \mid u \in V\}$  ein **Rotationssystem** für  $G$ , falls es eine entsprechende Einbettung gibt. Rotationssysteme haben den Vorteil, dass sie bei Verwendung der Adjazenzlistendarstellung ohne zusätzlichen Platzaufwand gespeichert werden können, indem man die zu  $u$  adjazenten Knoten gemäß  $\pi_u$  anordnet.

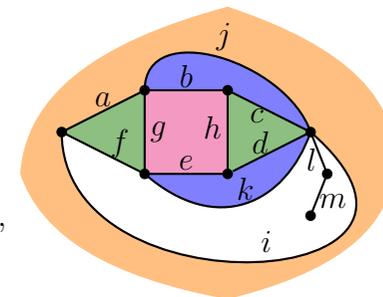
**Beispiel 2.9.** *Die beiden nebenstehenden Einbettungen eines Graphen  $G = (V, E)$  in die Ebene haben jeweils 7 Gebiete und führen beide auf den ebenen Graphen  $G' = (V, E, R)$  mit den 7 Rändern*



$$R = \{(a, f, g), (a, j, i), (b, g, e, h), (b, c, j), (c, h, d), (d, e, k), (f, i, l, m, m, l, k)\}.$$

Das zugehörige Rotationssystem ist

$$\pi = \{(a, f, i), (a, j, b, g), (b, c, h), (e, k, f, g), (d, e, h), (c, j, i, l, k, d), (l, m), (m)\}.$$



Man beachte, dass sowohl in  $R$  als auch in  $\pi$  jede Kante genau zweimal vorkommt. Anstelle von (zirkulären) Kantenfolgen kann man die Elemente von  $R$  und  $\pi$  natürlich auch durch entsprechende Knotenfolgen beschreiben.

**Satz 2.10** (Polyederformel von Euler, 1750).

Für einen zusammenhängenden ebenen Graphen  $G = (V, E, R)$  gilt

$$n(G) - m(G) + r(G) = 2. \quad (*)$$

*Beweis.* Wir führen den Beweis durch Induktion über die Kantenzahl  $m(G) = m$ .

$m = 0$ : Da  $G$  zusammenhängend ist, muss dann  $n = 1$  sein.

Somit ist auch  $r = 1$ , also  $(*)$  erfüllt.

$m - 1 \rightsquigarrow m$ : Sei  $G$  ein zusammenhängender ebener Graph mit  $m$  Kanten.

Ist  $G$  ein Baum, so entfernen wir ein Blatt und erhalten einen zusammenhängenden ebenen Graphen  $G'$  mit  $n' = n - 1$  Knoten,  $m' = m - 1$  Kanten und  $r' = r$  Gebieten. Nach IV folgt  $n - m + r = (n - 1) - (m - 1) + r = n' - m' + r' = 2$ .

Falls  $G$  kein Baum ist, entfernen wir eine Kante auf einem Kreis in  $G$  und erhalten einen zusammenhängenden ebenen Graphen  $G'$  mit  $n' = n$  Knoten,  $m' = m - 1$  Kanten und  $r' = r - 1$  Gebieten. Nach IV folgt  $n - m + r = n - (m - 1) + (r - 1) = n' - m' + r' = 2$ . ■

**Korollar 2.11.** Sei  $G = (V, E)$  ein planarer Graph mit  $n \geq 3$  Knoten. Dann ist  $m \leq 3n - 6$ . Falls  $G$  dreiecksfrei ist, gilt sogar  $m \leq 2n - 4$ .

*Beweis.* O.B.d.A. sei  $G$  zusammenhängend. Wir betrachten eine beliebige planare Einbettung von  $G$ . Da  $n \geq 3$  ist, ist jedes Gebiet  $g$  von  $d(g) \geq 3$  Kanten umgeben. Daher ist  $2m = i = \sum_g d(g) \geq 3r$  bzw.  $r \leq 2m/3$ . Eulers Formel liefert

$$m = n + r - 2 \leq n + 2m/3 - 2,$$

was  $(1 - 2/3)m \leq n - 2$  und somit  $m \leq 3n - 6$  impliziert.

Wenn  $G$  dreiecksfrei ist, ist jedes Gebiet von  $d(g) \geq 4$  Kanten umgeben. Daher ist  $2m = i = \sum_g d(g) \geq 4r$  bzw.  $r \leq m/2$ . Eulers Formel

liefert daher  $m = n + r - 2 \leq n + m/2 - 2$ , was  $m/2 \leq n - 2$  und somit  $m \leq 2n - 4$  impliziert. ■

**Korollar 2.12.** Die Graphen  $K_5$  und  $K_{3,3}$  sind nicht planar.

*Beweis.* Wegen  $n(K_5) = 5$ , also  $3n(K_5) - 6 = 9$ , und wegen  $m(K_5) = \binom{5}{2} = 10$  gilt  $m(K_5) \not\leq 3n(K_5) - 6$ .

Wegen  $n(K_{3,3}) = 6$ , also  $2n(K_{3,3}) - 4 = 8$ , und wegen  $m(K_{3,3}) = 3 \cdot 3 = 9$  gilt  $m(K_{3,3}) \not\leq 2n(K_{3,3}) - 4$ . ■

Als weitere interessante Folgerung aus der Polyederformel können wir zeigen, dass jeder planare Graph einen Knoten  $v$  vom Grad  $\deg(v) \leq 5$  hat.

**Korollar 2.13.** Jeder planare Graph hat einen Minimalgrad  $\delta \leq 5$ .

*Beweis.* Für  $n \leq 6$  ist die Behauptung klar. Für  $n > 6$  impliziert die Annahme  $\delta \geq 6$  die Ungleichung

$$m = \frac{1}{2} \sum_{u \in V} \deg(u) \geq \frac{1}{2} \sum_{u \in V} 6 = 3n,$$

was im Widerspruch zu  $m \leq 3n - 6$  steht. ■

**Definition 2.14.** Seien  $G = (V, E)$  und  $H$  Graphen und seien  $u, v \in V$ .

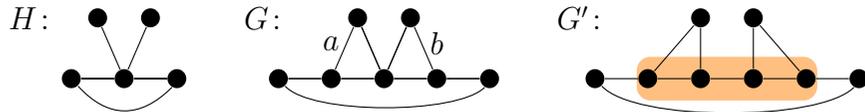
- Durch **Fusion** von  $u$  und  $v$  entsteht aus  $G$  der Graph  $G_{uv} = (V - \{v\}, E')$  mit

$$E' = \{e \in E \mid v \notin e\} \cup \{\{u, v'\} \mid \{v, v'\} \in E - \{u, v\}\}.$$

Ist  $e = \{u, v\}$  eine Kante von  $G$  (also  $e \in E$ ), so sagen wir auch,  $G_{uv}$  entsteht aus  $G$  durch **Kontraktion** der Kante  $e$ . Hat zudem  $v$  den Grad 2 mit  $N_G(v) = \{u, w\}$ , so sagen wir auch,  $G_{uv}$  entsteht aus  $G$  durch **Überbrückung** des Knotens  $v$  bzw.  $G$  aus  $G_{uv}$  durch **Unterteilung** der Kante  $\{u, w\}$ .

- $G$  heißt zu  $H$  **kontrahierbar**, falls  $H$  aus einer isomorphen Kopie von  $G$  durch wiederholte Kontraktionen gewonnen werden kann.
- $G$  heißt **Unterteilung** von  $H$ , falls  $G$  aus einer isomorphen Kopie von  $H$  durch wiederholte Unterteilungen gewonnen werden kann.
- $H$  heißt **Minor** von  $G$ , wenn ein Teilgraph von  $G$  zu  $H$  kontrahierbar ist, und **topologischer Minor**, wenn ein Teilgraph von  $G$  eine Unterteilung von  $H$  ist.
- $G$  heißt  **$H$ -frei**, falls  $H$  kein Minor von  $G$  ist. Für eine Menge  $\mathcal{H}$  von Graphen heißt  $G$   **$\mathcal{H}$ -frei**, falls  $G$  für alle  $H \in \mathcal{H}$   $H$ -frei ist.

**Beispiel 2.15.** Betrachte folgende Graphen:



$G$  ist keine Unterteilung von  $H$ , da  $G$  Knoten vom Grad 3 hat, aber  $H$  nicht. Entfernen wir jedoch die beiden Kanten  $a$  und  $b$  aus  $G$ , so ist der resultierende Teilgraph eine Unterteilung von  $H$ , d.h.  $H$  ist ein topologischer Minor von  $G$ .  $H$  ist aber kein topologischer Minor von  $G'$ , da  $H$  einen Knoten vom Grad 4 hat und  $G'$  nur Knoten vom Grad  $\leq 3$ . Da durch Kontraktion der drei umrandeten Kanten ein zu  $H$  isomorpher Graph entsteht, ist  $H$  aber ein Minor von  $G'$ .  $\triangleleft$

Es ist klar, dass die Klasse  $\mathcal{K}$  der planaren Graphen zwar unter Unterteilung und (topologischer) Minorenbildung abgeschlossen ist (d.h. wenn  $G \in \mathcal{K}$  und  $H$  ein Minor oder eine Unterteilung von  $G$  ist, dann folgt  $H \in \mathcal{K}$ ), aber nicht unter Fusion.

Nach Definition lässt sich jeder (topologische) Minor  $H$  von  $G$  aus einem zu  $G$  isomorphen Graphen durch wiederholte Anwendung folgender Operationen gewinnen:

- Entfernen einer Kante oder eines Knotens,
- Kontraktion einer Kante (bzw. Überbrückung eines Knotens).

Da die Kontraktionen (bzw. Überbrückungen) o.B.d.A. auch zuletzt ausgeführt werden können, gilt hiervon auch die Umkehrung. Zudem ist leicht zu sehen, dass  $G$  und  $H$  genau dann (topologische) Minoren voneinander sind, wenn sie isomorph sind.

**Satz 2.16** (Kempe 1878, Heawood 1890).  
 Jeder planare Graph ist 5-färbbar.

*Beweis.* Wir beweisen den Satz durch Induktion über  $n$ .  
 $n = 1$ : Klar.

$n - 1 \rightsquigarrow n$ : Da  $G$  planar ist, existiert ein Knoten  $u$  mit  $\deg(u) \leq 5$ . Im Fall  $\deg(u) \leq 4$  entfernen wir  $u$  aus  $G$ . Andernfalls hat  $u$  zwei Nachbarn  $v$  und  $w$ , die nicht durch eine Kante verbunden sind (andernfalls wäre  $K_5$  ein Teilgraph von  $G$ ). In diesem Fall entfernen wir alle mit  $u$  inzidenten Kanten außer  $\{u, v\}$  und  $\{u, w\}$  und kontrahieren diese beiden Kanten zum Knoten  $v$ .

In beiden Fällen ist der resultierende Graph  $G'$  ein Minor von  $G$  und daher planar. Da  $G'$  zudem höchstens  $n - 1$  Knoten hat, existiert nach IV eine 5-Färbung  $c'$  für  $G'$ . Da wir im 2. Fall dem Knoten  $w$  die Farbe  $c'(v)$  geben können, haben die Nachbarn von  $u$  höchstens 4 verschiedene Farben und wir können  $G$  5-färben.  $\blacksquare$

Kuratowski konnte 1930 beweisen, dass jeder nichtplanare Graph  $G$  den  $K_{3,3}$  oder den  $K_5$  als topologischen Minor enthält. Für den Beweis benötigen wir noch folgende Notationen.

**Definition 2.17.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph.

- Eine Menge  $S \subseteq V$  heißt **Separator** in  $G$ , wenn es zwei Knoten  $u, v \in V \setminus S$  gibt, zwischen denen in  $G - S$  kein  $u$ - $v$ -Weg existiert. Ist  $|S| = k$ , so nennen wir  $S$  auch einen  **$k$ -Separator** zwischen  $u$  und  $v$  oder auch einen  **$u$ - $v$ -Separator** der Größe  $k$ . Ein 1-Separator wird auch **Artikulation** oder **Schnittknoten** von  $G$  genannt.
- Ein Graph  $G$  heißt  **$k$ -zusammenhängend**,  $0 \leq k \leq n - 1$ , falls  $G$  keinen  $(k - 1)$ -Separator hat. Die größte Zahl  $k$ , für die  $G$   $k$ -

zusammenhängend ist, heißt **Zusammenhangszahl** von  $G$  und wird mit  $\kappa(G)$  bezeichnet.

Ein Graph  $G$  mit  $n \geq 2$  Knoten ist also genau dann zusammenhängend, wenn  $\kappa(G) \geq 1$  ist.

**Lemma 2.18.** *Ist ein Graph  $G = (V, E)$  nicht planar, so hat er einen*

- 2-zusammenhängenden Untergraphen  $U = (V', E')$  und einen
- 3-zusammenhängenden topologischen Minor  $M = (V'', E'')$ ,

die **minimal nicht planar** sind, d.h.  $U$  und  $M$  sind nicht planar und für alle  $e' \in E'$  und  $e'' \in E''$  sind die Graphen  $U - e'$  und  $M - e''$  planar.

*Beweis.* Wir entfernen zuerst solange Kanten und Knoten aus  $G$ , bis wir aus dem verbliebenen Teilgraphen  $U = (V', E')$  keine weiteren Kanten oder Knoten entfernen können, ohne dass  $U$  planar wird.

$U$  ist zusammenhängend, da andernfalls mindestens eine Komponente von  $U$  nicht planar ist und wir alle übrigen Komponenten entfernen könnten, ohne dass  $U$  planar wird.

$U$  ist sogar 2-zusammenhängend, da  $U$  sonst einen Schnittpunkt  $s$  enthält und  $U - s$  in  $k \geq 2$  Komponenten  $U[V_1], \dots, U[V_k]$  zerfällt. Dann ist aber mindestens ein Teilgraph  $T_i = U[V_i \cup \{s\}]$  nicht planar und wir können alle Knoten außerhalb von  $T_i$  entfernen, ohne dass  $U$  planar wird.

Um einen topologischen Minor  $M$  von  $G$  mit den behaupteten Eigenschaften zu erhalten, konstruieren wir zu  $U$  einen topologischen Minor  $U'$ , der minimal nicht planar ist und zudem 3-zusammenhängend ist oder weniger Knoten als  $U$  hat. Indem wir diese Konstruktion wiederholen, erhalten wir schließlich  $M$ .

Falls  $U$  3-zusammenhängend ist, ist  $U' = U$ . Andernfalls gibt es in  $U$  einen 2-Separator  $S = \{u, v\}$ , d.h.  $U - S$  zerfällt in  $k \geq 2$  Komponenten  $U[V_1], \dots, U[V_k]$ . Betrachte die (2-zusammenhängenden) Graphen  $G_i = U[V_i \cup \{u, v\}] \cup \{u, v\}$ . Dann ist mindestens ein  $G_i$

nicht planar (z.B.  $G_1$ ), da sonst auch  $U$  planar wäre. Da  $k \geq 2$  ist, erhalten wir einen zu  $G_1$  isomorphen Graphen  $U'$  als topologischen Minor von  $H = U[V_1 \cup V_2 \cup \{u, v\}]$  (und damit von  $U$ ), indem wir in  $U[V_2 \cup \{u, v\}]$  einen beliebigen  $u$ - $v$ -Pfad  $P$  wählen und aus  $H$  alle Knoten und Kanten entfernen, die nicht auf  $P$  liegen und danach  $P$  überbrücken. Dann hat  $U'$  weniger Knoten als  $U$  und ist wie  $U$  minimal nicht planar. ■

**Definition 2.19.** *Sei  $G$  ein Graph und sei  $K$  ein Kreis in  $G$ . Ein Teilgraph  $B$  von  $G$  heißt **Brücke** von  $K$  in  $G$ , falls*

- $B$  nur aus einer Kante besteht, die zwei Knoten von  $K$  verbindet, aber nicht auf  $K$  liegt (solche Brücken werden auch als **Sehnen** von  $K$  bezeichnet), oder
- $B - K$  eine Komponente von  $G - K$  ist und  $B$  aus  $B - K$  durch Hinzufügen aller Kanten zwischen  $B - K$  und  $K$  (und der zugehörigen Endpunkte auf  $K$ ) entsteht.

Die Knoten von  $B$ , die auf  $K$  liegen, heißen **Kontaktpunkte** von  $B$ . Zwei Brücken  $B$  und  $B'$  von  $K$  heißen **inkompatibel**, falls

- $B$  Kontaktpunkte  $u, v$  und  $B'$  Kontaktpunkte  $u', v'$  hat, so dass diese vier Punkte in der Reihenfolge  $u, u', v, v'$  auf  $K$  liegen, oder
- $B$  und  $B'$  mindestens 3 gemeinsame Kontaktpunkte haben.

Es ist leicht zu sehen, dass in einem planaren Graphen kein Kreis mehr als zwei inkompatible Brücken haben kann.

**Satz 2.20** (Kuratowski 1930).

Für einen Graphen  $G$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $G$  ist planar.
- (ii)  $G$  enthält weder den  $K_{3,3}$  noch den  $K_5$  als topologischen Minor.

*Beweis.* Die Implikation von i) nach ii) folgt aus der Abgeschlossenheit der planaren Graphen unter (topologischer) Minorenbildung.

Die Implikation von *ii*) nach *i*) zeigen wir durch Kontraposition. Sei also  $G = (V, E)$  nicht planar. Dann hat  $G$  nach Lemma 2.18 einen 3-zusammenhängenden nicht planaren topologischen Minor  $M = (V', E')$ , so dass  $M - e'$  für jede Kante  $e' \in E'$  planar ist. Wir entfernen eine beliebige Kante  $e_0 = \{a_0, b_0\}$  aus  $M$ . Dann ist  $M - e_0$  planar. Da  $M - e_0$  2-zusammenhängend ist, gibt es in  $M - e_0$  einen Kreis  $K$  durch die beiden Knoten  $a_0$  und  $b_0$  (siehe Übungen). Wir wählen  $K$  zusammen mit einer ebenen Realisierung  $H'$  von  $M - e_0$  so, dass  $K$  möglichst viele Gebiete in  $H'$  einschließt.

Für zwei Knoten  $a, b$  auf  $K$  bezeichnen wir mit  $K[a, b]$  die Menge aller Knoten, die auf dem Bogen von  $a$  nach  $b$  (im Uhrzeigersinn) auf  $K$  liegen. Zudem sei  $K[a, b) = K[a, b] \setminus \{b\}$ . Die Mengen  $K(a, b)$  und  $K(a, b]$  sind analog definiert.

Die Kanten jeder Brücke  $B$  von  $K$  in  $M - e_0$  verlaufen in  $H'$  entweder alle innerhalb oder alle außerhalb von  $K$ . Im ersten Fall nennen wir  $B$  eine **innere Brücke** und im zweiten eine **äußere Brücke**.

Es ist klar, dass  $K$  in  $H'$  mindestens eine innere und mindestens eine äußere Brücke haben muss. Zudem muss jede äußere Brücke  $B$  aus einer Kante  $\{u, v\}$  bestehen, die zwei Knoten  $u \in K(a_0, b_0)$  und  $v \in K(b_0, a_0)$  verbindet. Andernfalls hätte  $B$  nämlich mindestens 2 Kontaktpunkte auf  $K[a_0, b_0]$  oder auf  $K[b_0, a_0]$ . Daher könnte  $K$  zu einem Kreis  $K'$  erweitert werden, der in  $H'$  mehr Gebiete einschließt (bzw. ausschließt) als  $K$ , was der Wahl von  $K$  und  $H'$  widerspricht.

$K$  hat in  $M$  außer den Brücken in  $M - e_0$  noch zusätzlich die Brücke  $e_0$ . Wir wählen nun eine innere Brücke  $B$ , die sowohl zu  $e_0$  als auch zu mindestens einer äußeren Brücke  $e_1 = \{a_1, b_1\}$  inkompatibel ist. Eine solche Brücke muss es geben, da wir sonst alle mit  $e_0$  inkompatiblen inneren Brücken nach außen klappen und  $e_0$  als innere Brücke hinzunehmen könnten, ohne die Planarität zu verletzen.

Wir benutzen  $K$  und die drei Brücken  $e_0, e_1$  und  $B$ , um eine Unterteilung des  $K_{3,3}$  oder des  $K_5$  in  $M$  zu finden. Hierzu geben wir entweder zwei disjunkte Mengen  $A_1, A_2 \subseteq V'$  mit jeweils 3 Knoten an, so dass

9 knotendisjunkte Pfade zwischen allen Knoten  $a \in A_1$  und  $b \in A_2$  existieren. Oder wir geben eine Menge  $A \subseteq V'$  mit fünf Knoten an, so dass 10 knotendisjunkte Pfade zwischen je zwei Knoten  $a, b \in A$  existieren. Da  $e_0$  und  $e_1$  inkompatibel sind, können wir annehmen, dass die vier Knoten  $a_0, a_1, b_0, b_1$  in dieser Reihenfolge auf  $K$  liegen.

**Fall 1:**  $B$  hat einen Kontaktpunkt  $k_1 \notin \{a_0, a_1, b_0, b_1\}$ . Aus Symmetriegründen können wir  $k_1 \in K(a_0, a_1)$  annehmen. Da  $B$  weder zu  $e_0$  noch zu  $e_1$  kompatibel ist, hat  $B$  weitere Kontaktpunkte  $k_2 \in K(b_0, a_0)$  und  $k_3 \in K(a_1, b_1)$ , wobei  $k_2 = k_3$  sein kann.

**Fall 1a:** Ein Knoten  $k_i \in \{k_2, k_3\}$  liegt auf dem Bogen  $K(b_0, b_1)$ . In diesem Fall existieren 9 knotendisjunkte Pfade zwischen  $\{a_0, a_1, k_i\}$  und  $\{b_0, b_1, k_1\}$ .

**Fall 1b:**  $K(b_0, b_1) \cap \{k_2, k_3\} = \emptyset$ . In diesem Fall ist  $k_2 \in K[b_1, a_0]$  und  $k_3 \in K(a_1, b_0]$ . Dann gibt es in  $B$  einen Knoten  $u$ , von dem aus 3 knotendisjunkte Pfade zu  $\{k_1, k_2, k_3\}$  existieren. Folglich gibt es 9 knotendisjunkte Pfade zwischen  $\{a_0, a_1, u\}$  und  $\{k_1, k_2, k_3\}$ .

**Fall 2:** Alle Kontaktpunkte von  $B$  liegen in der Menge  $\{a_0, a_1, b_0, b_1\}$ . Da  $B$  inkompatibel zu  $e_0$  und  $e_1$  ist, müssen in diesem Fall alle vier Punkte zu  $B$  gehören. Sei  $P_0$  ein  $a_0$ - $b_0$ -Pfad in  $B$  und sei  $P_1$  ein  $a_1$ - $b_1$ -Pfad in  $B$ . Sei  $u$  der erste Knoten auf  $P_0$ , der auch auf  $P_1$  liegt und sei  $v$  der letzte solche Knoten.

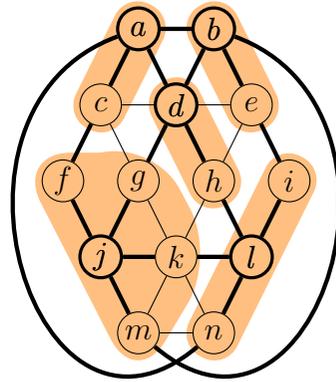
**Fall 2a:**  $u = v$ . Dann gibt es in  $B$  vier knotendisjunkte Pfade von  $u$  zu  $\{a_0, a_1, b_0, b_1\}$  und somit existieren in  $M$  10 knotendisjunkte Pfade zwischen den Knoten  $u, a_0, a_1, b_0, b_1$ .

**Fall 2b:**  $u \neq v$ . Durch  $u$  und  $v$  wird der Pfad  $P_1$  in drei Teilpfade  $P_{xu}, P_{uv}$  und  $P_{vy}$  unterteilt, wobei die Indizes die Endpunkte bezeichnen und  $\{x, y\} = \{a_1, b_1\}$  ist.

Somit gibt es in  $B$  drei Pfade zwischen  $u$  und jedem Knoten in  $\{a_0, v, x\}$  und zwei Pfade zwischen  $v$  und jedem Knoten in  $\{b_0, y\}$ , die alle 5 knotendisjunkt sind. Folglich gibt es in  $M$  9 knotendisjunkte Pfade zwischen  $\{a_0, v, x\}$  und  $\{b_0, y, u\}$ . ■

**Beispiel 2.21.** Der nebenstehende Graph ist nicht planar, da wir den  $K_5$  durch Kontraktion der farblich unterlegten Teilgraphen als Minor von  $G$  erhalten.

Alternativ lässt sich der  $K_5$  auch als ein topologischer Minor von  $G$  erhalten, indem wir die dünnen Kanten entfernen und in dem resultierenden Teilgraphen alle Knoten vom Grad 2 überbrücken.  $\triangleleft$



Eine unmittelbare Folgerung aus dem Satz von Kuratowski ist folgende Charakterisierung der Klasse der planaren Graphen.

**Korollar 2.22** (Wagner 1937). *Ein Graph ist genau dann planar, wenn er  $\{K_{3,3}, K_5\}$ -frei ist.*

**Satz 2.23** (Satz von Robertson und Seymour, 1983-2004). *Sei  $\mathcal{K}$  eine Graphklasse, die unter Minorenbildung abgeschlossen ist. Dann gibt es eine endliche Menge  $\mathcal{H}$  von Graphen mit*

$$\mathcal{K} = \{G \mid G \text{ ist } \mathcal{H}\text{-frei}\}.$$

*Die Graphen in  $\mathcal{H}$  sind bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt und heißen **verbotene Minoren** für die Klasse  $\mathcal{K}$ .*

Eine interessante Folgerung aus diesem Satz ist, dass jede unendliche Graphklasse zwei Graphen  $G$  und  $H$  enthält, so dass  $H$  ein Minor von  $G$  ist. Das Problem, für zwei gegebene Graphen  $G$  und  $H$  zu entscheiden, ob  $H$  ein Minor von  $G$  ist, ist zwar NP-vollständig (da sich das Hamiltonkreisproblem darauf reduzieren lässt). Für einen festen Graphen  $H$  ist das Problem dagegen effizient entscheidbar.

**Satz 2.24** (Robertson und Seymour, 1995). *Für jeden Graphen  $H$  gibt es einen  $O(n^3)$ -zeitbeschränkten Algorithmus, der für einen gegebenen Graphen  $G$  entscheidet, ob er  $H$ -frei ist.*

**Korollar 2.25.** *Die Zugehörigkeit zu jeder unter Minorenbildung abgeschlossenen Graphklasse  $\mathcal{K}$  ist in  $\mathbf{P}$  entscheidbar.*

Der Entscheidungsalgorithmus für  $\mathcal{K}$  lässt sich allerdings nur angeben, wenn wir die verbotenen Minoren für  $\mathcal{K}$  kennen. Leider ist der Beweis von Theorem 2.23 in dieser Hinsicht nicht konstruktiv, so dass der Nachweis, dass  $\mathcal{K}$  unter Minorenbildung abgeschlossen ist, nicht automatisch zu einem effizienten Erkennungsalgorithmus für  $\mathcal{K}$  führt.

## 2.2 Färben von chordalen Graphen

Chordalen Graphen treten in vielen Anwendungen auf, z.B. sind alle Intervall- und alle Komparabilitätsgraphen (auch transitiv orientierbare Graphen genannt) chordal. Wir werden sehen, dass sich für chordale Graphen effizient eine optimale Knotenfärbung berechnen lässt.

**Definition 2.26.** *Ein Graph  $G = (V, E)$  heißt **chordal** oder **trianguliert**, wenn jeder Kreis  $K = (u_1, \dots, u_l, u_1)$  der Länge  $l \geq 4$  in  $G$  mindestens eine Sehne hat.*

$G$  ist also genau dann chordal, wenn er keinen induzierten Kreis der Länge  $l \geq 4$  enthält (ein induzierter Kreis ist ein induzierter Teilgraph  $G[V']$ ,  $V' \subseteq V$ , der ein Kreis ist). Dies zeigt, dass die Klasse der chordalen Graphen unter induzierter Teilgraphbildung abgeschlossen ist (aber nicht unter Teilgraphbildung). Jede solche Graphklasse  $\mathcal{G}$  ist durch eine Familie von minimalen **verbotenen induzierten Teilgraphen**  $H_i$  charakterisiert, die bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt sind. Die Graphen  $H_i$  gehören also nicht zu  $\mathcal{G}$ , aber sobald wir einen Knoten daraus entfernen, erhalten wir einen Graphen in  $\mathcal{G}$ . Die Klasse der chordalen Graphen hat die Familie der Kreise  $C_n$  der Länge  $n \geq 4$  als verbotene induzierte Teilgraphen.

**Lemma 2.27.** *Für einen Graphen  $G$  sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (i)  $G$  ist chordal.

- (ii) Jeder inklusionsminimale  $x$ - $y$ -Separator  $S$  in  $G$  ist eine Clique.
- (iii) Jedes Paar von nicht adjazenten Knoten  $x$  und  $y$  in  $G$  hat einen  $x$ - $y$ -Separator  $S$ , der eine Clique ist.

*Beweis.* Um zu zeigen, dass die zweite Aussage aus der ersten folgt, nehmen wir an, dass  $G$  einen minimalen  $x$ - $y$ -Separator  $S$  hat (d.h.  $S \setminus \{s\}$  ist für jedes  $s \in S$  kein  $x$ - $y$ -Separator), der zwei nicht adjazente Knoten  $u$  und  $v$  enthält. Seien  $G[V_1]$  und  $G[V_2]$  die beiden Komponenten in  $G - S$  mit  $x \in V_1$  und  $y \in V_2$ . Da  $S$  minimal ist, haben die beiden Knoten  $u$  und  $v$  sowohl einen Nachbarn in  $V_1$  als auch in  $V_2$ . Betrachte die beiden Teilgraphen  $G_i = G[V_i \cup \{u, v\}]$  ( $i = 1, 2$ ) und wähle jeweils einen kürzesten  $u$ - $v$ -Pfad  $P_i$  in  $G_i$ . Da deren Länge  $\geq 2$  ist, ist  $K = P_1 \cup P_2$  ein Kreis der Länge  $\geq 4$ . Aufgrund der Konstruktion ist zudem klar, dass  $K$  keine Sehnen in  $G$  hat.

Dass die zweite Aussage die dritte impliziert, ist klar, da jedes Paar von nicht adjazenten Knoten  $x$  und  $y$  einen  $x$ - $y$ -Separator  $S$  hat, und  $S$  eine Clique sein muss, wenn wir  $S$  inklusionsminimal wählen.

Um zu zeigen, dass die erste Aussage aus der dritten folgt, nehmen wir an, dass  $G$  nicht chordal ist. Dann gibt es in  $G$  einen induzierten Kreis  $K$  der Länge  $\geq 4$ . Seien  $x$  und  $y$  zwei beliebige nicht adjazente Knoten auf  $K$  und sei  $S$  ein  $x$ - $y$ -Separator in  $G$ . Dann muss  $S$  mindestens zwei nicht adjazente Knoten aus  $K$  enthalten. ■

**Definition 2.28.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und sei  $k \geq 0$ . Ein Knoten  $u \in V$  vom Grad  $k$  heißt  **$k$ -simplicial**, wenn alle Nachbarn von  $u$  paarweise adjazent sind. Jeder  $k$ -simpliciale Knoten wird auch als **simplicial** bezeichnet.

Zusammenhängende chordale Graphen können als eine Verallgemeinerung von Bäumen aufgefasst werden. Ein Graph  $G$  ist ein Baum, wenn er aus  $K_1$  durch sukzessives Hinzufügen von 1-simplicialen Knoten erzeugt werden kann. Entsprechend heißt  $G$   **$k$ -Baum**, wenn  $G$  aus  $K_k$  durch sukzessives Hinzufügen von  $k$ -simplicialen Knoten erzeugt

werden kann. Wir werden sehen, dass ein zusammenhängender Graph  $G$  genau dann chordal ist, wenn er aus einem isolierten Knoten (also aus einer 1-Clique) durch sukzessives Hinzufügen von simplicialen Knoten erzeugt werden kann. Äquivalent hierzu ist, dass  $G$  durch sukzessives Entfernen von simplicialen Knoten auf einen isolierten Knoten reduziert werden kann.

**Definition 2.29.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Eine lineare Ordnung  $(u_1, \dots, u_n)$  auf  $V$  heißt **perfekte Eliminationsordnung (PEO)** von  $G$ , wenn  $u_i$  simplicial in  $G[u_1, \dots, u_i]$  für  $i = 2, \dots, n$  ist.

Es ist klar dass alle Knoten eines vollständigen Graphen simplicial sind. Das folgende Lemma verallgemeinert die bekannte Tatsache, dass jeder nicht vollständige Baum  $T$  (also  $T \notin \{K_1, K_2\}$ ) mindestens zwei nicht adjazente Blätter hat.

**Lemma 2.30.** Jeder nicht vollständige chordale Graph  $G$  besitzt mindestens zwei simpliciale Knoten, die nicht adjazent sind.

*Beweis.* Wir führen Induktion über  $n$ . Für  $n \leq 2$  ist die Behauptung klar. Sei  $G = (V, E)$  ein Graph mit  $n \geq 3$  Knoten. Da  $G$  nicht vollständig ist, enthält  $G$  zwei nichtadjazente Knoten  $x_1$  und  $x_2$ . Sei  $S$  ein minimaler  $x_1$ - $x_2$ -Separator der Größe  $k \geq 0$ . Im Fall  $k > 0$  ist  $S$  nach Lemma 2.27 eine Clique in  $G$ . Seien  $G[V_1]$  und  $G[V_2]$  die beiden Komponenten von  $G - S$  mit  $x_i \in V_i$ . Wir zeigen die Existenz zweier simplicialer Knoten  $s_i \in V_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Betrachte die Teilgraphen  $G_i = G[V_i \cup S]$ . Da  $G_i$  chordal ist und weniger als  $n$  Knoten hat, ist  $G_i$  nach IV entweder eine Clique oder  $G_i$  enthält mindestens zwei nicht adjazente simpliciale Knoten  $y_i, z_i$ . Falls  $G_i$  eine Clique ist, ist  $s_i = x_i$  simplicial in  $G_i$ , und da  $x_i$  keine Nachbarn außerhalb von  $V_i \cup S$  hat, ist  $s_i$  dann auch simplicial in  $G$ . Ist  $G_i$  keine Clique, kann höchstens einer der beiden Knoten  $y_i, z_i$  zu  $S$  gehören (da  $S$  im Fall  $S \neq \emptyset$  eine Clique und  $\{y_i, z_i\} \notin E$  ist). O.B.d.A. sei  $y_i \in V_i$ . Dann hat  $s_i = y_i$  keine Nachbarn außerhalb von  $V_i \cup S$  und somit ist  $s_i$  auch simplicial in  $G$ . ■

**Satz 2.31.** Ein Graph ist genau dann chordal, wenn er eine PEO hat.

*Beweis.* Falls  $G$  chordal ist, lässt sich eine PEO gemäß Lemma 2.30 bestimmen, indem wir für  $i = n, \dots, 2$  sukzessive einen simplizialen Knoten  $u_i$  in  $G - \{u_{i+1}, \dots, u_n\}$  wählen.

Für die umgekehrte Richtung sei  $(u_1, \dots, u_n)$  eine PEO von  $G$ . Wir zeigen induktiv, dass  $G_i = G[u_1, \dots, u_i]$  chordal ist. Da  $u_{i+1}$  simplizial in  $G_{i+1}$  ist, enthält jeder Kreis  $K$  der Länge  $\geq 4$  in  $G_{i+1}$ , auf dem  $u_{i+1}$  liegt, eine Sehne zwischen den beiden Kreisnachbarn von  $u_{i+1}$ . Daher ist mit  $G_i$  auch  $G_{i+1}$  chordal. ■

**Korollar 2.32.** Es gibt einen Polynomialzeitalgorithmus  $A$ , der für einen gegebenen Graphen  $G$  eine PEO berechnet, falls  $G$  chordal ist, und andernfalls einen induzierten Kreis der Länge  $\geq 4$  ausgibt.

*Beweis.*  $A$  versucht wie im Beweis von Theorem 2.31 beschrieben, eine PEO zu bestimmen. Stellt sich heraus, dass  $G_i = G - \{u_{i+1}, \dots, u_n\}$  keinen simplizialen Knoten  $u_i$  hat, so ist  $G_i$  wegen Lemma 2.30 nicht chordal. Daher gibt es in  $G_i$  nach Lemma 2.27 (iii) ein Knotenpaar  $x, y$ , so dass kein  $x$ - $y$ -Separator eine Clique ist. Berechnen wir für dieses Paar einen beliebigen minimalen  $x$ - $y$ -Separator  $S$ , so ist  $S$  keine Clique und wir können wie im Beweis von (i)  $\implies$  (ii) einen induzierten Kreis  $K$  der Länge  $\geq 4$  in  $G_i$  konstruieren. Da  $G_i$  ein induzierter Teilgraph von  $G$  ist, ist  $K$  auch ein induzierter Kreis in  $G$ . ■

Eine PEO kann verwendet werden, um einen chordalen Graphen zu färben:

---

#### Algorithmus chordal-color( $V, E$ )

---

- 1 berechne eine PEO  $(u_1, \dots, u_n)$  für  $G = (V, E)$
  - 2 starte greedy-color mit der Knotenfolge  $(u_1, \dots, u_n)$
- 

**Satz 2.33.** Für einen gegebenen chordalen Graphen  $G = (V, E)$  berechnet der Algorithmus **chordal-color** eine  $k$ -Färbung  $c$  von  $G$  mit  $k = \chi(G) = \omega(G)$ .

*Beweis.* Sei  $u_i$  ein beliebiger Knoten mit  $c(u_i) = k$ . Da  $(u_1, \dots, u_n)$  eine PEO von  $G$  ist, ist  $u_i$  simplizial in  $G[u_1, \dots, u_i]$ . Somit bilden die Nachbarn  $u_j$  von  $u_i$  mit  $j < i$  eine Clique und wegen  $c(u_i) = k$  bilden sie zusammen mit  $u_i$  eine  $k$ -Clique. Daher gilt  $\chi(G) \leq k \leq \omega(G)$ , woraus wegen  $\omega(G) \leq \chi(G)$  die Behauptung folgt. ■

Um **chordal-color** in Linearzeit zu implementieren, benötigen wir einen Linearzeit-Algorithmus zur Bestimmung einer PEO. Rose, Tarjan und Lueker haben 1976 einen solchen Algorithmus angegeben, der auf *lexikographischer Breitensuche* (kurz LexBFS oder LBFS, engl. *lexicographic breadth-first search*) basiert. Bevor wir diese Variante der Breitensuche vorstellen, gehen wir kurz auf verschiedene Ansätze zum Durchsuchen von Graphen ein.

Der folgende Algorithmus **GraphSearch( $V, E$ )** startet eine Suche in einem beliebigen Knoten  $u$  und findet zunächst alle von  $u$  aus erreichbaren Knoten. Danach wird solange von einem noch nicht erreichten Knoten eine neue Suche gestartet, bis alle Knoten erreicht wurden. Die Menge der aktuellen Knoten wird dabei in einer Datenstruktur  $A$  gespeichert. Genauer enthält  $A$  alle bereits entdeckten Knoten, die noch nicht abgearbeitet sind.

---

#### Algorithmus GraphSearch( $V, E$ )

---

- 1  $R := \emptyset$  // Menge der erreichten Knoten
- 2  $L := ()$  // Ausgabeliste
- 3 **repeat**
- 4     wähle  $u \in V \setminus R$  //  $u$  wurde neu entdeckt
- 5     append( $L, u$ )
- 6     parent( $u$ ) :=  $\perp$
- 7      $A := \{u\}$  // Menge der aktuellen Knoten
- 8      $R := R \cup \{u\}$

```

9  while A ≠ ∅ do
10  wähle u aus A
11  if ∃v ∈ N(u) \ R then
12    A := A ∪ {v} // v wurde neu entdeckt
13    R := R ∪ {v}
14    append(L, v)
15    parent(v) := u
16  else entferne u aus A // u wurde abgearbeitet
17 until R = V
18 return(L)

```

---

Der Algorithmus **GraphSearch**( $V, E$ ) findet in jedem Durchlauf der repeat-Schleife eine neue Komponente des Eingabegraphen  $G = (V, E)$ . Dies bedeutet, dass alle Knoten, die zu einer Komponente gehören, konsekutiv in der Ausgabeliste  $L = (u_1, \dots, u_n)$  auftreten, wobei abgesehen vom ersten Knoten jeder Komponente jeder Knoten  $u_k$  einen Nachbarn  $u_i$  mit  $i < k$  hat.

Die folgende Definition fasst diese Eigenschaften der Ausgabeliste zusammen.

**Definition 2.34.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Eine lineare Ordnung  $(u_1, \dots, u_n)$  auf  $V$  heißt **Suchordnung (SO)** von  $G$ , wenn für jedes Tripel  $j < k < l$  gilt:

$$u_j \in N(u_l) \setminus N(u_k) \Rightarrow \exists i < k : i \neq j \wedge u_i \in N(u_k).$$

**Satz 2.35.** Für jeden Graphen  $G = (V, E)$  gibt der Algorithmus **GraphSearch**( $V, E$ ) eine SO von  $G$  aus.

*Beweis.* Ein Knoten  $u_k$  erhält nur dann den Wert  $\text{parent}(u_k) = \perp$ , wenn alle Knoten  $u_j$  mit  $j < k$  bereits abgearbeitet sind und diese nur Nachbarn  $u_l$  mit  $l < k$  hatten. Falls also ein Vorgänger  $u_j$  von  $u_k$  mit einem Nachfolger  $u_l$  von  $u_k$  verbunden ist, liefert die **parent**-Funktion einen Nachbarn  $u_i = \text{parent}(u_k)$  von  $u_k$  mit  $i < k$ . Da  $u_j \notin N(u_k)$  ist, gilt zusätzlich  $i \neq j$ . ■

Die **parent**-Funktion induziert einen gerichteten Wald  $W = (V, E_{\text{parent}})$ , dessen Kantenmenge aus allen Kanten der Form  $(\text{parent}(v), v)$  mit  $\text{parent}(v) \neq \perp$  besteht. Die Kanten von  $W$  werden auch als **Baumkanten** (kurz **B-Kanten**) und  $W$  wird auch als **Suchwald** von  $G = (V, E)$  bezeichnet. Für jeden Knoten  $v \in V$  gibt es genau eine Wurzel  $w$  in  $W$ , von der aus  $v$  in  $W$  erreichbar ist. Der eindeutig bestimmte  $w$ - $v$ -Pfad  $P = (u_0, \dots, u_l)$  in  $W$  mit  $u_0 = w$  und  $u_l = v$  lässt sich ausgehend von  $u_l = v$  unter Verwendung der **parent**-Funktion mittels  $u_{i-1} = \text{parent}(u_i)$  für  $i = l, \dots, 1$  berechnen.  $P$  wird auch als **parent-Pfad** von  $v$  bezeichnet. Es ist klar, dass 2 Knoten  $v$  und  $v'$  genau dann in einer Komponente von  $G$  liegen, wenn sie die gleiche Wurzel haben.

Realisieren wir die Menge der aktuellen Knoten als einen Keller  $S$ , so erhalten wir eine Suchstrategie, die als **Tiefensuche** (kurz **DFS**, engl. *depth first search*) bezeichnet wird. Die Benutzung eines Kellers bewirkt, dass nach der Entdeckung eines neuen Knotens  $v$  unter den Nachbarn des aktuellen Knotens  $u$  die Suche zuerst bei den Nachbarn von  $v$  fortgesetzt wird, bevor die anderen Nachbarn von  $u$  getestet werden.

**Algorithmus DFS**( $V, E$ )

---

```

1  R := ∅ // Menge der erreichten Knoten
2  L := () // Ausgabeliste
3  repeat
4    wähle u ∈ V \ R // u wurde neu entdeckt
5    R := R ∪ {u}
6    append(L, u)
7    parent(u) := ⊥
8    S := (u) // Keller der aktuellen Knoten
9    while S ≠ () do
10     u := top(S)
11     if ∃v ∈ N(u) \ R then
12       push(S, v) // v wurde neu entdeckt

```

```

13   R := R ∪ {v}
14   append(L, v)
15   parent(v) := u
16   else pop(S) // u wurde abgearbeitet
17   until R = V
18   return(L)

```

---

**Definition 2.36.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Eine lineare Ordnung  $(u_1, \dots, u_n)$  auf  $V$  heißt **DFS-Ordnung (DO)** von  $G$ , wenn für jedes Tripel  $j < k < l$  gilt:

$$u_j \in N(u_l) \setminus N(u_k) \Rightarrow \exists i : j < i < k \wedge u_i \in N(u_k).$$

**Satz 2.37.** Für jeden Graphen  $G = (V, E)$  gibt der Algorithmus **DFS(V, E)** eine DO von  $G$  aus.

*Beweis.* Siehe Übungen. ■

Realisieren wir die Menge der abzuarbeitenden Knoten als eine Warteschlange  $Q$ , so findet der resultierende Algorithmus **BFS(V, E)** einen kürzesten Weg vom Startknoten  $u$  zu allen von  $u$  aus erreichbaren Knoten. Diese Suchstrategie wird als **Breitensuche** (kurz *BFS*, engl. *breadth first search*) bezeichnet. Die Benutzung einer Warteschlange  $Q$  zur Speicherung der noch abzuarbeitenden Knoten bewirkt, dass alle Nachbarknoten  $v$  des aktuellen Knotens  $u$  vor den bisher noch nicht erreichten Nachbarn von  $v$  ausgegeben werden.

**Algorithmus BFS(V, E)**

---

```

1   R := ∅ // Menge der erreichten Knoten
2   L := () // Ausgabeliste
3   repeat
4     wähle u ∈ V \ R // u wurde neu entdeckt
5     R := R ∪ {u}
6     parent(u) := ⊥

```

```

7   Q := (u) // Warteschlange der aktuellen Knoten
8   while Q ≠ () do
9     u := dequeue(Q) // u wird komplett abgearbeitet
10    append(L, u)
11    for all v ∈ N(u) \ R do
12      enqueue(Q, v) // v wurde neu entdeckt
13      parent(v) := u
14    R := R ∪ N(u)
15  until R = V
16  return(L)

```

---

**Definition 2.38.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Eine lineare Ordnung  $(u_1, \dots, u_n)$  auf  $V$  heißt **BFS-Ordnung (BO)** von  $G$ , wenn für jedes Tripel  $j < k < l$  gilt:

$$u_j \in N(u_l) \setminus N(u_k) \Rightarrow \exists i < j : u_i \in N(u_k).$$

**Satz 2.39.** Für jeden Graphen  $G = (V, E)$  gibt der Algorithmus **BFS(V, E)** eine BO von  $G$  aus.

*Beweis.* Existiert im Fall  $k < l$  eine Position  $j < k$  mit  $u_j \in N(u_l) \setminus N(u_k)$ , so muss es einen Knoten  $u_i \in N(u_k)$  mit  $i < j$  geben, der dafür gesorgt hat, dass der Knoten  $u_k$  vor dem Knoten  $u_l$  in die Warteschlange aufgenommen wurde. ■

BFS-Ordnungen lassen sich anschaulich anhand der Adjazenzmatrix charakterisieren. Sei  $(u_1, \dots, u_n)$  eine BO für  $G = (V, E)$  und sei  $A = (a_{ij})$  die Adjazenzmatrix von  $G$  mit  $a_{ij} = 1 \Leftrightarrow \{u_i, u_j\} \in E$ . Weiter seien  $z_i = a_{i1} \dots a_{i,i-1}$  die Präfixe der Zeilen von  $A$ , die unterhalb der Diagonale verlaufen. Sind nun die ersten  $j$  Einträge  $a_{k1} \dots a_{kj}$  einer Zeile  $s_k$  Null, so muss dies auch für jede Zeile  $s_l$  mit  $l > k$  so sein, da im Fall  $a_{lj} = 1$  der Knoten  $u_j \in N(u_l) \setminus N(u_k)$  wäre und somit ein  $i < j$  mit  $a_{ki} = 1$  existieren müsste. Dies bedeutet, dass  $s_l$  mindestens so viele Nullen als Präfix hat wie  $z_k$ . Es ist aber möglich, dass  $z_k$  bspw. mit 00010... beginnt und  $z_l$  mit 00011....

Alternativ können wir  $Q$  auch als eine Warteschlange von Knotenmengen realisieren (siehe Algorithmus **BFS'**), um einen Überblick über alle möglichen Fortsetzungen der aktuellen Liste  $L$  zu einer BO zu erhalten. Die Prozedur **Dequeue**( $Q$ ) liefert ein beliebiges Element aus der ersten Menge in  $Q$  zurück und entfernt dieses aus  $Q$ .

---

**Algorithmus BFS' ( $V, E$ )**


---

```

1  $R := \emptyset$  // Menge der erreichten Knoten
2  $L := ()$  // Ausgabeliste
3 repeat
4   wähle  $u \in V \setminus R$ 
5    $R := R \cup \{u\}$ 
6    $Q := (\{u\})$  // Warteschlange von Knotenmengen
7   while  $Q \neq ()$  do
8      $u := \text{Dequeue}(Q)$  //  $u$  wird komplett abgearbeitet
9     append( $L, u$ )
10    if  $N(u) \not\subseteq R$  then enqueue( $Q, N(u) \setminus R$ )
11     $R := R \cup N(u)$ 
12 until  $R = V$ 
13 return( $L$ )
```

---



---

**Prozedur Dequeue( $Q$ )**


---

```

1 entferne  $u$  aus  $\text{first}(Q)$ 
2 if  $\text{first}(Q) = \emptyset$  then dequeue( $Q$ )
3 return( $u$ )
```

---

Fassen wir die Menge  $V \setminus R$  der noch nicht erreichten Knoten als Nachfolgemenge der letzten Menge in  $Q$  auf, so wird von dieser Restmenge in jedem Durchlauf der **while**-Schleife von **BFS'** die Teilmenge  $N(u) \setminus R$  abgetrennt und im Fall  $N(u) \setminus R \neq \emptyset$  der Schlange  $Q$  hinzugefügt.

Der Unterschied von LexBFS zur normalen Breitensuche besteht darin, dass die zulässigen Ausgabefolgen gegenüber der BFS weiter

eingeschränkt werden. Der Name von LexBFS rührt daher, dass die Knoten in einer Reihenfolge ausgegeben werden, die eine lexikographische Sortierung der Zeilenpräfixe  $z_i$  bewirkt, sofern man sie durch Anhängen von Einsen auf die gleiche Länge bringt. Eine solche Sortierung kann auch bei einer gewöhnlichen Breitensuche auftreten, ist bei dieser aber nicht garantiert. Bei einer Breitensuche werden die noch nicht besuchten Nachbarn des aktuellen Knotens in beliebiger Reihenfolge zur Warteschlange hinzugefügt und auch wieder in dieser Reihenfolge entfernt. Dagegen werden bei einer LexBFS die Knoten in der Warteschlange nachträglich umsortiert, falls dies notwendig ist, um eine LexBFS-Ordnung der Knoten zu erhalten (siehe Definition 2.40). Ähnlich wie bei **BFS'** wird hierzu die Menge der noch nicht abgearbeiteten Knoten in eine Folge von Knotenmengen zerlegt. Im Gegensatz zu **BFS'** kann **LexBFS** aber nicht nur die letzte Menge  $V \setminus R$  splitten, sondern alle Mengen der Folge.

---

**Algorithmus LexBFS ( $V, E, u$ )**


---

```

1  $L := ()$  // Ausgabeliste
2  $Q := (V)$  // Warteschlange von Knotenmengen
3 while  $Q \neq ()$  do
4    $u := \text{Dequeue}(Q)$  //  $u$  wird komplett abgearbeitet
5   append( $L, u$ )
6   Splitqueue( $Q, N(u)$ )
7 return( $L$ )
```

---



---

**Prozedur Splitqueue( $Q, S$ )**


---

```

1 for  $T$  in  $Q$  with  $T \cap S \notin \{\emptyset, T\}$  do
2   ersetze die Teilfolge ( $T$ ) in  $Q$  durch  $(T \cap S, T \setminus S)$ 
```

---

Für eine effiziente Implementierung sollte die Schlange  $Q = (S_1, \dots, S_k)$  von Knotenmengen  $S_i \subseteq V$  als doppelt verkettete Liste realisiert werden und für jeden Knoten  $u$  in der Adjazenzliste ein Zeiger auf die Menge  $S_i$ , die  $u$  enthält und auf seinen Eintrag in

$S_i$  gespeichert werden. Zudem sollte die for-Schleife in der Prozedur **Splitqueue** durch eine Schleife über die Knoten in  $S = N(u)$  ersetzt werden.

**Definition 2.40.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Eine lineare Ordnung  $(u_1, \dots, u_n)$  auf  $V$  heißt **LexBFS-Ordnung (LBO)** von  $G$ , wenn für jedes Tripel  $j < k < l$  gilt:

$$u_j \in N(u_l) \setminus N(u_k) \Rightarrow \exists i < j : u_i \in N(u_k) \setminus N(u_l).$$

Ob eine Ordnung  $(u_1, \dots, u_n)$  eine LBO ist, lässt sich wie folgt an der gemäß  $(u_1, \dots, u_n)$  geordneten Adjazenzmatrix  $A$  ablesen: die verkürzten Zeilen  $z_1, \dots, z_n$  unter der Diagonalen müssen wie folgt sortiert sein: entweder ist  $z_i$  ein Präfix von  $z_{i+1}$  oder  $z_i$  hat an der ersten Position, wo sich die beiden Strings unterscheiden, eine Eins. Bringen wir also die verkürzten Zeilen durch Anhängen von Einsen auf dieselbe Länge, so sind sie lexikographisch sortiert. In den Übungen wird gezeigt, dass man sogar eine lexikographische Ordnung auf den *kompletten* Zeilen von  $A$  erhält, falls man die Diagonale auf 1 setzt und die Knoten in jeder Menge von  $Q$  nach absteigendem Knotengrad in  $G$  sortiert.

**Satz 2.41.** Für jeden Graphen  $G = (V, E)$  gibt der Algorithmus **LexBFS**( $V, E$ ) eine LBO  $(u_1, \dots, u_n)$  von  $G$  aus.

*Beweis.* Sei  $A = (a_{ij})$  die Adjazenzmatrix von  $G$  mit  $a_{ij} = 1 \Leftrightarrow \{u_i, u_j\} \in E$ . Wir zeigen, dass die Strings  $z_i = a_{i1}, \dots, a_{i,i-1}$  lexikalisch sortiert sind. Existiert nämlich im Fall  $k < l$  eine Position  $j < k$  mit  $a_{kj} = 0$  und  $a_{lj} = 1$ , so muss es eine Position  $i < j$  mit  $a_{ki} = 1$  und  $a_{li} = 0$  geben. Ansonsten wäre der Knoten  $u_l$  spätestens beim Abarbeiten von  $u_j$  in eine Menge vor dem Knoten  $u_k$  sortiert worden und könnte daher nicht nach dem Knoten  $u_k$  ausgegeben werden. ■

**Satz 2.42.** Jede LBO für einen chordalen Graphen  $G$  ist eine PEO für  $G$ .

*Beweis.* Sei  $(u_1, \dots, u_n)$  eine LBO für  $G = (V, E)$  und sei  $A = (a_{ij})$  die Adjazenzmatrix von  $G$  mit  $a_{ij} = 1 \Leftrightarrow \{u_i, u_j\} \in E$ , wobei wir für  $a_{ij}$  auch  $A[i, j]$  schreiben. Wir zeigen, dass  $G$  nicht chordal ist, wenn  $u_i$  nicht simplizial in  $G_i = G[u_1, \dots, u_i]$  ist.

Falls  $u_i$  nicht simplizial in  $G_i$  ist, müssen Indizes  $i_2 < i_1 < i =: i_0$  mit  $A[i_0, i_1] = A[i_0, i_2] = 1$  und  $A[i_1, i_2] = 0$  existieren. Wegen  $A[i_1, i_2] = 0$  und  $A[i_0, i_2] = 1$  muss es einen Index  $i_3 < i_2$  geben mit  $A[i_1, i_3] = 1$  und  $A[i_0, i_3] = 0$ , wobei wir  $i_3$  möglichst klein wählen.

Falls nun  $A[i_2, i_3] = 1$  ist, haben wir einen induzierten Kreis  $G[u_{i_0}, u_{i_1}, u_{i_2}, u_{i_3}] = (u_{i_0}, u_{i_1}, u_{i_3}, u_{i_2})$  der Länge 4 in  $G$  gefunden. Andernfalls muss es wegen  $A[i_2, i_3] = 0$  und  $A[i_1, i_3] = 1$  einen Index  $i_4 < i_3$  geben mit  $A[i_2, i_4] = 1$  und  $A[i_1, i_4] = 0$ , wobei wir  $i_4$  wieder möglichst klein wählen. Da spätestens für  $i_k = 1$  kein Index  $i_{k+1} < i_k$  existiert, also  $A[i_{k-1}, i_k] = 1$  sein muss, erhalten wir eine Indexfolge  $1 \leq i_k < \dots < i_1 < i_0$  mit

- (a)  $A[i_0, i_1] = A[i_j, i_{j+2}] = A[i_{k-1}, i_k] = 1$  für  $j = 0, \dots, k-2$  und
- (b)  $A[i_0, i_3] = A[i_j, i_{j+1}] = A[i_j, i_{j+3}] = A[i_{k-2}, i_{k-1}] = 0$  für  $j = 1, \dots, k-3$  und
- (c)  $A[i_j, l] = A[i_{j-1}, l]$  für  $j = 1, \dots, k-3$  und  $l < i_{j+2}$ .

Die Eigenschaften (a) und (b) ergeben sich direkt aus der Konstruktion der Folge. Eigenschaft (c) folgt aus der minimalen Wahl der Indizes  $i_3, \dots, i_k$  und impliziert für  $r = 3, \dots, k$  die Gleichungen  $A[i_0, i_r] = A[i_1, i_r] = \dots = A[i_{r-3}, i_r]$ , indem wir  $j = 1, \dots, r-3$  und  $l = i_r$  setzen. Da zudem  $A[i_{r-3}, i_r]$  gemäß Eigenschaft (b) für  $r = 3, \dots, k$  den Wert 0 hat, folgt für alle Paare  $0 \leq j < r \leq k$  die Äquivalenz

$$A[i_j, i_r] = 1 \Leftrightarrow r = j + 2 \text{ oder } j = 0 \wedge r = 1 \text{ oder } j = k - 1 \wedge r = k.$$

Folglich ist  $G[u_{i_0}, \dots, u_{i_k}]$  ein Kreis der Länge  $k + 1 \geq 4$ . ■

Damit haben wir einen Linearzeitalgorithmus, der für chordale Graphen eine PEO berechnet. Da auch **greedy-color** linear zeitbe-

schränkt ist, können wir den Algorithmus `chordal-color` in Linearzeit implementieren. Diesen Algorithmus können wir leicht noch so modifizieren, dass er zusammen mit der gefundenen  $k$ -Färbung entweder eine Clique  $C$  der Größe  $k$  (als Zertifikat, dass  $\chi(G) = k = \omega(G)$  ist) oder einen induzierten Kreis der Länge  $\geq 4$  (als Zertifikat, dass  $G$  nicht chordal ist) ausgibt.

## 2.3 Der Satz von Brooks

**Satz 2.43** (Brooks 1941). *Für einen zusammenhängenden Graphen  $G$  gilt  $\chi(G) = \Delta(G) + 1$  genau dann, wenn  $G = K_n$  für ein  $n \geq 1$  oder  $G = C_n$  für ein ungerades  $n \geq 3$  ist.*

*Beweis.* Es ist klar, dass die Graphen  $G = K_n$  für  $n \geq 1$  und  $G = C_n$  für ungerades  $n \geq 3$  die chromatische Zahl  $\Delta(G) + 1$  haben. Für  $\Delta(G) \leq 2$  ist leicht zu sehen, dass dies auch die einzigen zusammenhängenden Graphen mit dieser Eigenschaft sind.

Für zusammenhängende Graphen  $G \neq K_n$  mit  $\Delta(G) \geq 3$  zeigen wir induktiv über  $n = n(G)$ , dass  $\chi(G) \leq \Delta(G)$  ist. Für  $n \leq 4$  (IA) ist dies klar, da wir den  $K_4$  ausgeschlossen haben. Für den IS sei also  $G \neq K_n$  ein zusammenhängender Graph mit  $n \geq 5$  Knoten und sei  $d := \Delta(G) \geq 3$ .

Falls  $\delta(G) < d$  ist, hat  $G' = G - u$  eine  $d$ -Färbung  $c'$ , wobei  $u$  ein Knoten vom Grad  $\deg(u) < d$  ist (man beachte, dass  $\delta(G') < d$  und somit  $G'$  nicht  $d$ -regulär ist, was nach IV  $\chi(G) \leq d$  impliziert). Da  $\deg(u) < d$  ist, lässt sich  $c'$  zu einer  $d$ -Färbung  $c$  von  $G$  erweitern.

Falls  $\kappa(G) \leq 1$  ist, hat  $G$   $k \geq 2$  Blöcke  $B_1, \dots, B_k$ , die nicht  $d$ -regulär und somit  $d$ -färbbar sind. Dies impliziert  $\chi(G) \leq d$ , da wir die  $d$ -Färbungen der Blöcke ausgehend von einem beliebigen Wurzelblock des BC-Baums hin zu den Blattblöcken in eine  $d$ -Färbung für  $G$  transformieren können.

Es bleibt also der Fall, dass  $G$   $d$ -regulär und  $\kappa(G) \geq 2$  ist.

**Behauptung 2.44.** *In  $G$  gibt es einen Knoten  $u_1$ , der zwei Nachbarn  $a$  und  $b$  mit  $\{a, b\} \notin E$  hat, so dass  $G - \{a, b\}$  zusammenhängend ist.*

Da  $G \neq K_n$  ist, gibt es einen Knoten  $x$ , der zwei Nachbarn  $y, z \in N(x)$  mit  $\{y, z\} \notin E$  hat.

- Falls  $G - y$  2-zusammenhängend ist, ist  $G - \{y, z\}$  zusammenhängend und die Behauptung folgt für  $u_1 = x$ .
- Ist  $G - y$  nicht 2-zusammenhängend, d.h.  $G - y$  hat mindestens zwei Blöcke, dann hat der BC-Baum  $T$  von  $G - y$  mindestens zwei Blätter. Da  $\kappa(G) \geq 2$  ist, ist  $y$  in  $G$  zu mindestens einem Knoten in jedem Blatt von  $T$  benachbart, der kein Schnittknoten ist. Wählen wir für  $a$  und  $b$  zwei dieser Knoten in verschiedenen Blättern, so ist  $G - \{a, b\}$  zusammenhängend und somit die Behauptung für  $u_1 = y$  bewiesen.

Sei also  $u_1$  ein Knoten, der zwei Nachbarn  $a$  und  $b$  mit  $\{a, b\} \notin E$  hat, so dass  $G - \{a, b\}$  zusammenhängend ist. Durchsuchen wir den Graphen  $G - \{a, b\}$  ausgehend vom Startknoten  $u_1$ , so erhalten wir eine Suchordnung  $(u_1, \dots, u_{n-2})$ . Starten wir nun `greedy-color` mit der Reihenfolge  $(a, b, u_{n-2}, \dots, u_1)$ , so erhalten wir eine  $d$ -Färbung  $c$  für  $G$  mit  $c(a) = c(b) = 1$ . Zudem hat Knoten  $u_i$ ,  $i > 1$ , einen Nachbarn  $u_j$  mit  $j < i$ , weshalb  $c(u_i) \leq \deg(u_i) \leq d$  ist. Zuletzt erhält auch  $u_1$  eine Farbe  $c(u_1) \leq d$ , da die Nachbarn  $a$  und  $b$  von  $u_1$  dieselbe Farbe haben. ■

In den Übungen wird folgende Folgerung aus dem Beweis des Satzes von Brooks gezeigt.

**Korollar 2.45.** *Es gibt einen Linearzeitalgorithmus, der für jeden Graphen  $G$  mit  $\Delta(G) \leq 3$  eine  $\chi(G)$ -Färbung berechnet.*

## 2.4 Kantenfärbungen

Neben der Frage, mit wievielen Farben die Knoten eines Graphen gefärbt werden können, muss bei vielen Anwendungen auch eine Kantenfärbung mit möglichst wenigen Farben gefunden werden.

**Definition 2.46.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und sei  $k \in \mathbb{N}$ .

- Eine Abbildung  $c: E \rightarrow \mathbb{N}$  heißt **Kantenfärbung** von  $G$ , wenn  $c(e) \neq c(e')$  für alle  $e \neq e' \in E$  mit  $e \cap e' \neq \emptyset$  gilt.
- $G$  heißt  **$k$ -kantenfärbbar**, falls eine Kantenfärbung  $c: E \rightarrow \{1, \dots, k\}$  existiert.
- Die **kantenchromatische Zahl** oder der **chromatische Index** von  $G$  ist

$$\chi'(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ ist } k\text{-kantenfärbbar}\}.$$

Eine  $k$ -Kantenfärbung  $c: E \rightarrow \mathbb{N}$  muss also zwei Kanten, die einen Knoten gemeinsam haben, verschiedene Farben zuweisen. Daher bildet jede **Farbklasse**  $E_i = \{e \in E \mid f(e) = i\}$  ein Matching von  $G$ , d.h.  $c$  zerlegt  $E$  in  $k$  disjunkte Matchings. Umgekehrt liefert jede Zerlegung von  $E$  in  $k$  disjunkte Matchings eine  $k$ -Kantenfärbung von  $G$ .

Neben Graphen treten in manchen Anwendungen auch **Multigraphen**  $G = (V, E)$  auf. Diese können mehr als eine Kante zwischen zwei Knoten haben, d.h.  $E$  ist eine Multimenge auf  $\binom{V}{2}$ .

Eine **Multimenge**  $A$  auf einer Grundmenge  $M$  lässt sich durch eine Funktion  $v_A: M \rightarrow \mathbb{N}$  beschreiben, wobei  $v_A(a)$  die Anzahl der Vorkommen des Elements  $a$  in  $A$  angibt. Die Mächtigkeit von  $A$  ist  $|A| = \sum_{a \in A} v_A(a)$ .

Wie bei Graphen gehen wir davon aus, dass jede Kante  $e = \{u, v\}$  eines Multigraphen  $G = (V, E)$  zwei verschiedene Endpunkte  $u \neq v$  hat, d.h.  $G$  ist schlingenfrei. In  $G$  gibt es genau  $v_E(e) = v_E(u, v)$  Kanten zwischen den beiden Knoten  $u$  und  $v$ . Die Zahl  $v_E(e)$  wird auch als **(Kanten-)Vielfachheit** von  $e$  bezeichnet. Ein wichtiger

Parameter von Multigraphen ist die maximale Kantenvielfachheit

$$v(G) = \max_{e \in E} v_E(e),$$

die auch als **(Graph-)Vielfachheit** von  $G$  bezeichnet wird. Der **Grad** eines Knotens  $u \in V$  ist  $\deg_G(u) = \sum_{v \in N(u)} v_E(u, v)$  und der **Maximalgrad** von  $G$  ist wie üblich  $\Delta(G) = \max_{u \in V} \deg_G(u)$ .

Eine  $k$ -Kantenfärbung für einen Multigraphen  $G = (V, E)$  lässt sich durch eine Funktion  $c$  beschreiben, die jeder Kante  $e \in \binom{V}{2}$  eine Menge  $c(e) \subseteq \{1, \dots, k\}$  von  $|c(e)| = v_E(e)$  Farben zuordnet, so dass  $c(e) \cap c(e') = \emptyset$  für alle  $e \neq e' \in \binom{V}{2}$  mit  $e \cap e' \neq \emptyset$  gilt.

**Beispiel 2.47.**

$$\chi'(C_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ gerade,} \\ 3, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\chi'(K_n) = 2 \lceil n/2 \rceil - 1 = \begin{cases} n-1, & n \text{ gerade,} \\ n, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Kantenfärbungsproblem für einen Graphen  $G$  lässt sich leicht auf das Knotenfärbungsproblem für einen Graphen  $G'$  reduzieren.

**Definition 2.48.** Sei  $G' = (V, E')$  ein Graph mit  $m \geq 1$  Kanten. Dann heißt der Graph  $G = L(G') = (E', E)$  mit

$$E = \left\{ \{e, e'\} \in \binom{E'}{2} \mid e \cap e' \neq \emptyset \right\}$$

der **Kantengraph** oder **Line-Graph** von  $G'$ .

Ist  $G'$  ein Multigraph, so verwenden wir als Knotenmenge von  $L(G')$  eine Menge  $V_{E'}$  mit der Mächtigkeit  $|V_{E'}| = |E'|$ , die  $v_{E'}(e)$  verschiedene Kopien  $e^1, \dots, e^{v_E(e)}$  jeder Kante  $e \in E'$  enthält. Die folgenden Beziehungen zwischen einem (Multi-)Graphen  $G'$  und dem zugehörigen Line-Graphen lassen sich leicht verifizieren.

**Proposition 2.49.** Für den Line-Graphen  $G = L(G')$  eines Multigraphen  $G'$  gilt:

- (i)  $n(G) = m(G')$ ,
- (ii)  $\chi(G) = \chi'(G')$ ,
- (iii)  $\alpha(G) = \mu(G')$ ,
- (iv)  $\omega(G) \geq \Delta(G')$ ,
- (v)  $\Delta(G) = \max_{e \in E'} \deg_{G'}(u) + \deg_{G'}(v) - v_{E'}(e) - 1 \leq 2\Delta(G') - 2$ ,  
wobei  $u$  und  $v$  die Endpunkte der Kante  $e = \{u, v\}$  sind.

Damit erhalten wir aus den Abschätzungen  $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$  und  $n/\alpha(G) \leq \chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$  die folgenden Abschätzungen für  $\chi'(G')$ .

**Lemma 2.50.** Für jeden Multigraphen mit  $m \geq 1$  Kanten gilt  $\Delta \leq \chi' \leq 2\Delta - 1$  und  $m/\mu \leq \chi' \leq m - \mu + 1$ .

**Korollar 2.51.** Für jeden regulären Multigraphen mit einer ungeraden Knotenzahl und  $m \geq 1$  Kanten gilt  $\chi' \geq \Delta + 1 \geq 3$ .

*Beweis.* Wegen  $\mu \leq (n - 1)/2$  und  $m = n\Delta/2$  folgt  $\chi' \geq m/\mu \geq n\Delta/(n - 1) > \Delta$ . Da  $n$  ungerade und  $m \geq 1$  ist, folgt  $\Delta \geq 2$ . ■

Als nächstes geben wir einen effizienten Algorithmus an, der für jeden Graphen eine  $(\Delta + 1)$ -Kantenfärbung berechnet. Hierfür benötigen wir folgende Begriffe.

**Definition 2.52.** Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und sei  $c: E \rightarrow \{1, \dots, k\}$  eine  $k$ -Kantenfärbung von  $G$ . Weiter sei  $F \subseteq \{1, \dots, k\}$  und es gelte  $1 \leq i \neq j \leq k$ .

- a) Ein Nachbar  $v$  von  $u$  heißt **F-Nachbar** von  $u$ , wenn  $c(u, v) \in F$  ist. Im Fall  $F = \{i\}$  nennen wir  $v$  auch den **i-Nachbarn** von  $u$ .
- b) Die Farbe  $i$  ist **frei** an einem Knoten  $u$  (kurz  $i \in \text{free}(u)$ ), falls  $u$  keinen  $i$ -Nachbarn hat.

c) Der Graph  $G_{ij} = (V, E_{ij})$  mit  $E_{ij} = \{e \in E \mid c(e) \in \{i, j\}\}$  heißt **(i, j)-Subgraph** von  $G$ .

d) Jede Komponente  $G'$  von  $G_{ij}$  heißt **(i, j)-Komponente** von  $G$ . Je nachdem ob  $G'$  ein Pfad oder ein Kreis ist, nennen wir  $G'$  auch einen **(i, j)-Pfad** bzw. **(i, j)-Kreis** in  $G$  (bzgl. c).

Man sieht leicht, dass jede  $(i, j)$ -Komponente  $G'$  von  $G$  entweder ein Pfad der Länge  $l \geq 0$  oder ein Kreis gerader Länge ist. Zudem können wir aus  $c$  eine weitere  $k$ -Kantenfärbung  $c'$  von  $G$  gewinnen, indem wir die beiden Farben  $i$  und  $j$  entlang der Kanten von  $G'$  vertauschen.

**Satz 2.53** (Vizing 1964). Für jeden Graphen  $G$  gilt  $\chi'(G) \leq \min_{e \in E} \Delta(G - e) + 1 \leq \Delta(G) + 1$ .

*Beweis.* Wir führen Induktion über  $m$ . Der IA  $m = 0$  ist klar. Für den IS sei  $G' = (V, E')$  ein Graph mit  $m + 1$  Kanten und sei  $k = \min_{e \in E'} \Delta(G' - e) + 1$ . Wir wählen eine beliebige Kante  $e_1 = \{y_0, y_1\} \in E'$ , so dass der Graph  $G = G' - e_1$  den Maximalgrad  $\Delta(G) = k - 1$  hat. Dann hat  $G$  nach IV eine  $k$ -Kantenfärbung  $c: E \rightarrow \{1, \dots, k\}$ . Da zudem unter  $c$  an jedem Knoten  $u$  mindestens  $k - \deg_G(u) \geq 1$  Farben frei sind, folgt  $\text{free}(u) \neq \emptyset$  für alle  $u \in V$ . Betrachte nun folgende Prozeduren.

**Prozedur**  $\text{expand}(G, c, y_0, y_1)$

- 
- 1  $\ell := 1$
  - 2 wähle  $\alpha_1 \in \text{free}(y_1)$
  - 3 **while**  $\alpha_\ell \notin \text{free}(y_0) \cup \{\alpha_1, \dots, \alpha_{\ell-1}\}$  **do**
  - 4     sei  $y_{\ell+1}$  der  $\alpha_\ell$ -Nachbar von  $y_0$
  - 5     wähle  $\alpha_{\ell+1} \in \text{free}(y_{\ell+1})$
  - 6      $\ell := \ell + 1$
  - 7 wähle  $0 \leq i < \ell$  minimal mit  $\alpha_\ell \in \text{free}(y_0) \cup \{\alpha_1, \dots, \alpha_i\}$
  - 8 **if**  $i = 0$  **then** //  $\alpha_\ell \in \text{free}(y_0)$
  - 9     **recolor**( $\ell, \alpha_\ell$ )
  - 10 **else** //  $\alpha_\ell = \alpha_i$

```

11 wähle eine Farbe  $\alpha_0 \in \text{free}(y_0)$ 
12 berechne den  $(\alpha_0, \alpha_i)$ -Pfad  $P$  mit Startknoten  $y_\ell$  und
13 vertausche dabei die Farben  $\alpha_0$  und  $\alpha_i$  entlang  $P$ 
14 sei  $z$  der Endknoten von  $P$  //  $z = y_\ell$  ist möglich
15 case
16    $z = y_0$ :  $\text{recolor}(i, \alpha_i)$ 
17    $z = y_i$ :  $\text{recolor}(i, \alpha_0)$ 
18 else  $\text{recolor}(\ell, \alpha_0)$ 
19 return  $c$ 

```

---

**Prozedur**  $\text{recolor}(i, \alpha)$ 


---

```

1 for  $j := 1$  to  $i - 1$  do  $c(y_0, y_j) := \alpha_j$ 
2  $c(y_0, y_i) := \alpha$ 

```

---

Wir verifizieren, dass die Abbildung  $c$  eine Kantenfärbung von  $G'$  ist.

**Fall 1**  $\alpha_\ell \in \text{free}(y_0)$ : Da die Farbe  $\alpha_\ell$  an  $y_0$  und für  $j = 1, \dots, \ell$  die Farbe  $\alpha_j$  an  $y_j$  frei ist, können wir  $\{y_0, y_j\}$  mit  $\alpha_j$  färben.

**Fall 2**  $z = y_0$ : In diesem Fall erreicht  $P$  den Knoten  $z = y_0$  über die Kante  $\{y_0, y_{i+1}\}$ . Nach dem Vertauschen von  $\alpha_0$  und  $\alpha_i$  entlang  $P$  hat diese Kante dann die Farbe  $\alpha_0$ , weshalb wir die Kanten  $\{y_0, y_j\}$  für  $j = 1, \dots, i$  mit  $\alpha_j$  färben können.

**Fall 3**  $z = y_i$ : Da  $\alpha_i \in \text{free}(y_i) \cap \text{free}(y_\ell)$  ist, müssen die Endkanten von  $P$  mit  $\alpha_0$  gefärbt sein. Nach Vertauschen von  $\alpha_0$  und  $\alpha_i$  entlang  $P$  ist daher die Farbe  $\alpha_0$  an  $y_0$  und  $y_i$  frei, weshalb wir die Kante  $\{y_0, y_i\}$  mit  $\alpha_0$  und die Kanten  $\{y_0, y_j\}$  für  $j = 1, \dots, i - 1$  mit  $\alpha_j$  färben können.

**Fall 4** In allen anderen Fällen (d.h.  $z \notin \{y_0, y_i\}$ ) ist die Farbe  $\alpha_0$  nach Vertauschen von  $\alpha_0$  und  $\alpha_i$  entlang  $P$  neben  $y_0$  auch an  $y_\ell$  frei, weshalb wir die Kante  $\{y_0, y_\ell\}$  mit  $\alpha_0$  färben können. Zudem bleibt die Farbe  $\alpha_j$  für  $j = 1, \dots, \ell - 1$  an  $y_j$  frei (wegen  $\alpha_j \notin \{\alpha_0, \alpha_i\}$  gilt dies auch im Fall  $y_j = z$ ). Daher können wir die Kanten  $\{y_0, y_j\}$  für  $j = 1, \dots, \ell - 1$  mit  $\alpha_j$  färben. ■

Da die Prozedur **expand** mit Hilfe geeigneter Datenstrukturen so implementiert werden kann, dass jeder Aufruf Zeit  $\mathcal{O}(n)$  erfordert, und diese Prozedur  $m$ -mal aufgerufen wird, um alle  $m$  Kanten eines gegebenen Graphen  $G$  zu färben, ergibt sich eine Gesamtlaufzeit von  $\mathcal{O}(nm)$ .

Für einen Graphen  $G$  kann  $\chi'(G)$  nur einen der beiden Werte  $\Delta(G)$  oder  $\Delta(G) + 1$  annehmen. Graphen  $G$  mit  $\chi'(G) = \Delta(G)$  heißen **Klasse 1** und Graphen  $G$  mit  $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$  heißen **Klasse 2**.

Neben allen bipartiten Graphen sind auch die vollständigen Graphen  $K_n$  für gerades  $n$  Klasse 1. Zudem sind alle planaren Graphen  $G$  mit  $\Delta(G) \geq 7$  Klasse 1. Für  $2 \leq d \leq 5$  existieren planare Graphen  $G$  mit  $\Delta(G) = d$ , die Klasse 2 sind. Für  $d = 6$  ist dies offen.

Das Problem, für einen gegebenen Graphen  $G$  zu entscheiden, ob er Klasse 1 ist (also  $\chi'(G) \leq \Delta(G)$  gilt), ist NP-vollständig.

Der Satz von Vizing lässt sich wie folgt auf Multigraphen verallgemeinern.

**Satz 2.54** (Vizing 1964). *Für jeden Multigraphen  $G = (V, E)$  gilt  $\chi'(G) \leq \max_{u,v \in V} (\deg(u) + v_E(u, v)) \leq \Delta(G) + v(G)$ .*

In den Übungen leiten wir noch die folgenden oberen Schranken her.

**Korollar 2.55.** *Für jeden Multigraphen  $G = (V, E)$  gilt:*

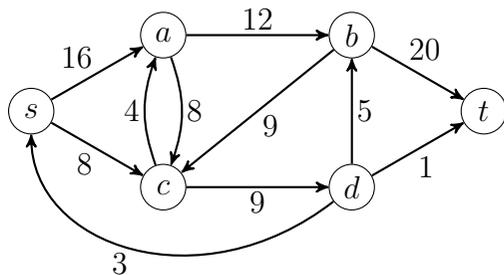
(i)  $\chi'(G) \leq 3\Delta(G)/2$ ,

(ii) falls  $G$  bipartit (d.h.  $\chi(G) \leq 2$ ) ist, dann ist  $\chi'(G) = \Delta(G)$ .

### 3 Flüsse in Netzwerken

**Definition 3.1.** Ein **Netzwerk**  $N = (V, E, s, t, c)$  besteht aus einem gerichteten Graphen  $G = (V, E)$  mit einer **Quelle**  $s \in V$  und einer **Senke**  $t \in V$  sowie einer **Kapazitätsfunktion**  $c : V \times V \rightarrow \mathbb{N}$ . Zudem muss jede Kante  $(u, v) \in E$  positive Kapazität  $c(u, v) > 0$  und jede Nichtkante  $(u, v) \notin E$  muss die Kapazität  $c(u, v) = 0$  haben.

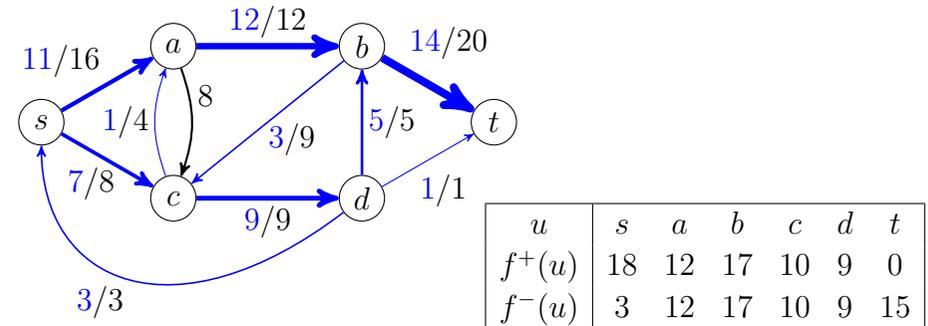
Die folgende Abbildung zeigt ein Netzwerk  $N$ .



**Definition 3.2.**

- Ein **Fluss in N** ist eine Funktion  $f : V \times V \rightarrow \mathbb{Z}$  mit
  - $f(u, v) \leq c(u, v)$ , (Kapazitätsbedingung)
  - $f(u, v) = -f(v, u)$ , (Antisymmetrie)
  - $\sum_{v \in V} f(u, v) = 0$  für alle  $u \in V \setminus \{s, t\}$  (Kontinuität)
- Der **Fluss in den Knoten u** ist  $f^-(u) = \sum_{v \in V} \max\{0, f(v, u)\}$ .
- Der **Fluss aus u** ist  $f^+(u) = \sum_{v \in V} \max\{0, f(u, v)\}$ .
- Die **Größe von f** ist  $|f| = f^+(s) - f^-(s) = \sum_{v \in V} f(s, v)$ .

Die Antisymmetrie impliziert, dass  $f(u, u) = 0$  für alle  $u \in V$  ist, d.h. wir können annehmen, dass  $G$  schlingenfrei ist. Die folgende Abbildung zeigt einen Fluss  $f$  in  $N$ .



#### 3.1 Der Ford-Fulkerson-Algorithmus

Wie kann man für einen Fluss  $f$  in einem Netzwerk  $N$  entscheiden, ob er vergrößert werden kann? Diese Frage ist leicht zu beantworten, falls  $f$  auf  $V \times V$  den Wert 0 hat: In diesem Fall genügt es, in  $G = (V, E)$  einen Pfad von  $s$  nach  $t$  zu finden. Andernfalls können wir zu  $N$  und  $f$  ein Netzwerk  $N_f$  konstruieren, so dass  $f$  genau dann vergrößert werden kann, wenn sich in  $N_f$  der Nullfluss vergrößern lässt.

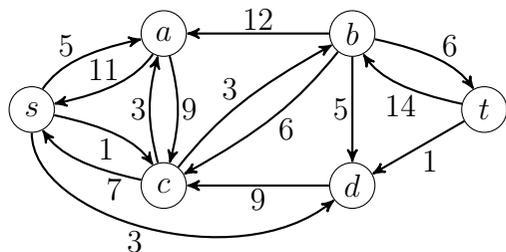
**Definition 3.3.** Sei  $N = (V, E, s, t, c)$  ein Netzwerk und sei  $f$  ein Fluss in  $N$ . Das zugeordnete **Restnetzwerk** ist  $N_f = (V, E_f, s, t, c_f)$  mit der Kapazität

$$c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$$

und der Kantenmenge

$$E_f = \{(u, v) \in V \times V \mid c_f(u, v) > 0\}.$$

Zum Beispiel führt obiger Fluss auf das folgende Restnetzwerk  $N_f$ :



**Definition 3.4.** Sei  $N_f = (V, E_f, s, t, c_f)$  ein Restnetzwerk. Dann heißt jeder  $s$ - $t$ -Pfad  $P$  in  $(V, E_f)$  **Zunahmepfad** in  $N_f$ . Die **Kapazität von  $P$  in  $N_f$**  ist

$$c_f(P) = \min\{c_f(u, v) \mid (u, v) \text{ liegt auf } P\}$$

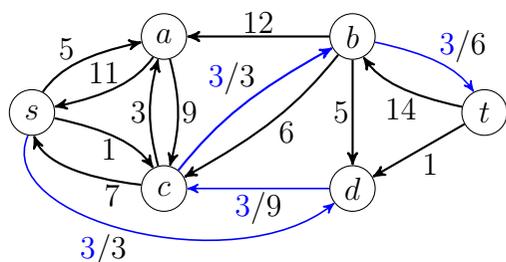
und der **zu  $P$  gehörige Fluss in  $N_f$**  ist

$$f_P(u, v) = \begin{cases} c_f(P), & (u, v) \text{ liegt auf } P, \\ -c_f(P), & (v, u) \text{ liegt auf } P, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$P = (u_0, \dots, u_k)$  ist also genau dann ein Zunahmepfad in  $N_f$ , falls

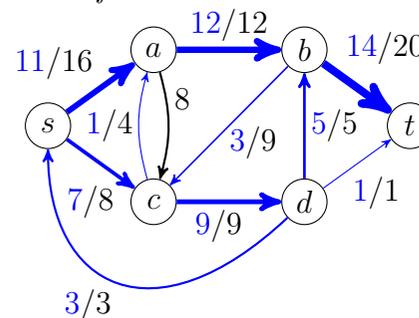
- $u_0 = s$  und  $u_k = t$  ist,
- die Knoten  $u_0, \dots, u_k$  paarweise verschieden sind
- und  $c_f(u_i, u_{i+1}) > 0$  für  $i = 0, \dots, k - 1$  ist.

Die folgende Abbildung zeigt den zum Zunahmepfad  $P = s, c, b, t$  gehörigen Fluss  $f_P$  in  $N_f$ . Die Kapazität von  $P$  ist  $c_f(P) = 4$ .

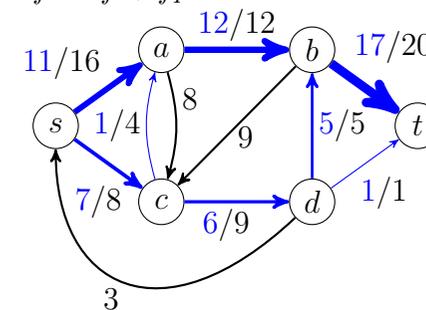


Es ist leicht zu sehen, dass  $f_P$  tatsächlich ein Fluss in  $N_f$  ist. Durch Addition der beiden Flüsse  $f$  und  $f_P$  erhalten wir einen Fluss  $f' = f + f_P$  in  $N$  der Größe  $|f'| = |f| + |f_P| = |f| + c_f(P) > |f|$ .

Fluss  $f$ :



Fluss  $f' = f + f_P$ :

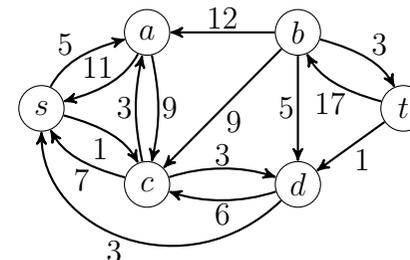


Nun können wir den **Ford-Fulkerson-Algorithmus** angeben.

**Algorithmus Ford-Fulkerson**( $V, E, s, t, c$ )

- 
- 1 **for all**  $(u, v) \in E \cup E^R$  **do**
  - 2      $f(u, v) := 0$
  - 3 **while** es gibt einen Zunahmepfad  $P$  in  $N_f$  **do**
  - 4      $f := f + f_P$
- 

**Beispiel 3.5.** Für den neuen Fluss erhalten wir nun folgendes Restnetzwerk:



In diesem existiert kein Zunahmepfad mehr. ◀

Um zu beweisen, dass der Algorithmus von Ford-Fulkerson tatsächlich einen Maximalfluss berechnet, zeigen wir, dass es nur dann im Restnetzwerk  $N_f$  keinen Zunahmepfad mehr gibt, wenn der Fluss  $f$  maximal ist. Hierzu benötigen wir den Begriff des Schnitts.

**Definition 3.6.** Sei  $N = (V, E, s, t, c)$  ein Netzwerk und sei  $\emptyset \subsetneq S \subsetneq V$ . Dann heißt die Menge  $E(S) = \{(u, v) \in E \mid u \in S, v \notin S\}$  **Kantenschnitt** (oder einfach **Schnitt**; oft wird auch einfach  $S$  als Schnitt bezeichnet). Die **Kapazität eines Schnittes  $S$**  ist

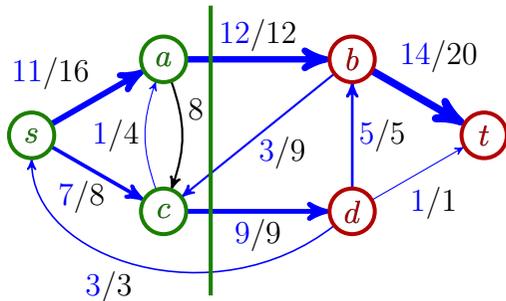
$$c(S) = \sum_{u \in S, v \notin S} c(u, v).$$

Ist  $f$  ein Fluss in  $N$ , so heißt

$$f(S) = \sum_{u \in S, v \notin S} f(u, v)$$

der **Nettofluss** (oder einfach **Fluss**) durch den Schnitt  $S$ . Ist  $u \in S$  und  $v \notin S$ , so heißt  $S$  auch  **$u$ - $v$ -Schnitt**.

**Beispiel 3.7.** Betrachte folgenden Schnitt  $S = \{s, a, c\}$  in  $N$ :



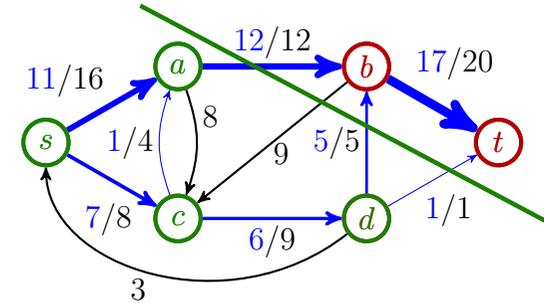
Dieser Schnitt hat die Kapazität

$$c(S) = c(a, b) + c(c, d) = 12 + 9 = 21$$

und der Fluss  $f$  durch ihn ist

$$\begin{aligned} f(S) &= f(a, b) + f(c, b) + f(c, d) + f(s, d) \\ &= 12 - 3 + 9 - 3 \\ &= 15. \end{aligned}$$

Dagegen hat der Schnitt  $S' = \{s, a, c, d\}$



die Kapazität

$$\begin{aligned} c(S') &= c(a, b) + c(d, b) + c(d, t) = 12 + 5 + 1 = 18 \\ &= f'(a, b) + f'(d, b) + f'(d, t) = f'(S'), \end{aligned}$$

die mit dem Fluss  $f'$  durch  $S'$  übereinstimmt. ◀

**Lemma 3.8.** Für jeden  $s$ - $t$ -Schnitt  $S$  und jeden Fluss  $f$  gilt

$$|f| = f(S) \leq c(S).$$

*Beweis.* Wir zeigen zuerst die Ungleichung  $f(S) \leq c(S)$ . Wegen  $f(u, v) \leq c(u, v)$  für alle  $(u, v) \in V \times V$  folgt

$$f(S) = \sum_{u \in S, v \notin S} f(u, v) \leq \sum_{u \in S, v \notin S} c(u, v) = c(S).$$

Die Gleichheit  $|f| = f(S)$  zeigen wir durch Induktion über  $k = |S|$ .

$k = 1$ : In diesem Fall ist  $S = \{s\}$  und somit

$$|f| = \sum_v f(s, v) = \sum_{v \neq s} f(s, v) = f(S).$$

$k - 1 \rightsquigarrow k$ : Sei  $S$  ein Schnitt mit  $|S| = k > 1$  und sei  $w \in S - \{s\}$ . Betrachte den Schnitt  $S' = S - \{w\}$ . Dann gilt

$$f(S) = \sum_{u \in S, v \notin S} f(u, v) = \sum_{u \in S', v \notin S} f(u, v) + \sum_{v \notin S} f(w, v)$$

und

$$f(S') = \sum_{u \in S', v \notin S'} f(u, v) = \sum_{u \in S', v \notin S} f(u, v) + \sum_{u \in S'} f(u, w).$$

Daher folgt

$$f(S) - f(S') = \sum_{v \notin S} f(w, v) - \sum_{u \in S'} f(u, w) = \sum_{v \neq w} f(w, v) = 0.$$

Nach Induktionsvoraussetzung folgt somit  $f(S) = f(S') = |f|$ . ■

**Satz 3.9** (Min-Cut-Max-Flow-Theorem). Sei  $f$  ein Fluss in einem Netzwerk  $N = (V, E, s, t, c)$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $f$  ist maximal, d.h. für jeden Fluss  $f'$  in  $N$  gilt  $|f'| \leq |f|$ .
2. In  $N_f$  existiert kein Zunahmepfad.
3. Es gibt einen  $s$ - $t$ -Schnitt  $S$  in  $N$  mit  $c(S) = |f|$ .

*Beweis.* Die Implikation „1  $\Rightarrow$  2“ ist klar, da die Existenz eines Zunahmepfads in  $N_f$  zu einer Vergrößerung von  $f$  führen würde.

Für die Implikation „2  $\Rightarrow$  3“ betrachten wir den Schnitt

$$S = \{u \in V \mid u \text{ ist in } N_f \text{ von } s \text{ aus erreichbar}\}.$$

Da in  $N_f$  kein Zunahmepfad existiert, gilt dann

- $s \in S, t \notin S$  und
- $c_f(u, v) = 0$  für alle  $u \in S$  und  $v \notin S$ .

Wegen  $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$  folgt somit

$$|f| = f(S) = \sum_{u \in S, v \notin S} f(u, v) = \sum_{u \in S, v \notin S} c(u, v) = c(S).$$

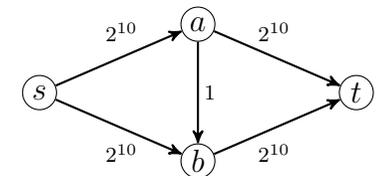
Die Implikation „3  $\Rightarrow$  1“ ergibt sich aus der Tatsache, dass im Fall  $c(S) = |f|$  für jeden Fluss  $f'$  die Abschätzung  $|f'| = f'(S) \leq c(S) = |f|$  gilt. ■

Der obige Satz gilt auch für Netzwerke mit Kapazitäten in  $\mathbb{R}^+$ .

Sei  $c_0 = c(S)$  die Kapazität des Schnittes  $S = \{s\}$ . Dann durchläuft der Ford-Fulkerson-Algorithmus die while-Schleife höchstens  $c_0$ -mal. Bei jedem Durchlauf ist zuerst das Restnetzwerk  $N_f$  und danach ein Zunahmepfad in  $N_f$  zu berechnen.

Die Berechnung des Zunahmepfads  $P$  kann durch Breitensuche in Zeit  $\mathcal{O}(n + m)$  erfolgen. Da sich das Restnetzwerk nur entlang von  $P$  ändert, kann es in Zeit  $\mathcal{O}(n)$  aktualisiert werden. Jeder Durchlauf benötigt also Zeit  $\mathcal{O}(n + m)$ , was auf eine Gesamtlaufzeit von  $\mathcal{O}(c_0(n + m))$  führt. Da der Wert von  $c_0$  jedoch exponentiell in der Länge der Eingabe (also der Beschreibung des Netzwerkes  $N$ ) sein kann, ergibt dies keine polynomielle Zeitschranke. Bei Netzwerken mit Kapazitäten in  $\mathbb{R}^+$  kann der Ford-Fulkerson-Algorithmus sogar unendlich lange laufen (siehe Übungen).

Bei nebenstehendem Netzwerk benötigt Ford-Fulkerson zur Bestimmung des Maximalflusses abhängig von der Wahl der Zunahmepfade zwischen 2 und  $2^{11}$  Schleifendurchläufe.



Im günstigsten Fall wird nämlich ausgehend vom Nullfluss  $f_1$  zuerst der Zunahmepfad  $P_1 = (s, a, t)$  mit der Kapazität  $2^{10}$  und dann im Restnetzwerk  $N_{f_1}$  der Pfad  $P_2 = (s, b, t)$  mit der Kapazität  $2^{10}$  gewählt.

Im ungünstigsten Fall werden abwechselnd die beiden Zunahmepfade  $P_1 = (s, a, b, t)$  und  $P_2 = (s, b, a, t)$  (also  $P_i = P_1$  für ungerades  $i$  und

$P_i = P_2$  für gerades  $i$ ) mit der Kapazität 1 gewählt. Dies führt auf insgesamt  $2^{11}$  Schleifendurchläufe (siehe nebenstehende Tabelle).

Nicht nur in diesem Beispiel lässt sich die exponentielle Laufzeit wie folgt vermeiden:

- Man betrachtet nur Zunahmepfade mit einer geeignet gewählten Mindestkapazität. Dies führt auf eine Laufzeit, die polynomiell in  $n$ ,  $m$  und  $\log c_0$  ist (siehe Übungen).
- Man bestimmt in jeder Iteration einen kürzesten Zunahmepfad im Restnetzwerk mittels Breitensuche in Zeit  $\mathcal{O}(n + m)$ . Diese Vorgehensweise führt auf den *Edmonds-Karp-Algorithmus*, der eine Laufzeit von  $\mathcal{O}(nm^2)$  hat (unabhängig von der Kapazitätsfunktion).
- Man bestimmt in jeder Iteration einen Fluss  $g$  im Restnetzwerk  $N_f$ , der nur Kanten benutzt, die auf einem kürzesten  $s$ - $t$ -Pfad in  $N_f$  liegen. Zudem hat  $g$  die Eigenschaft, dass  $g$  auf jedem kürzesten  $s$ - $t$ -Pfad  $P$  mindestens eine Kante  $e \in P$  *sättigt* (d.h. der Fluss  $g(e)$  durch  $e$  schöpft die Restkapazität  $c_f(e)$  von  $e$  vollkommen aus), weshalb diese Kante in der nächsten Iteration fehlt. Dies führt auf den *Algorithmus von Diniz*. Da die Länge der kürzesten  $s$ - $t$ -Pfade im Restnetzwerk in jeder Iteration um mindestens 1 zunimmt, liegt nach spätestens  $n - 1$  Iterationen ein maximaler Fluss vor. Diniz hat gezeigt, dass der Fluss  $g$  in Zeit  $\mathcal{O}(nm)$  bestimmt werden kann. Folglich hat der Algorithmus von Diniz eine Laufzeit von  $\mathcal{O}(n^2m)$ . Malhotra, Kumar und Maheswari fanden später einen  $\mathcal{O}(n^2)$ -Algorithmus zur Bestimmung von  $g$ . Damit lässt sich die Gesamtlaufzeit auf  $\mathcal{O}(n^3)$  verbessern.

### 3.2 Der Edmonds-Karp-Algorithmus

Der Edmonds-Karp-Algorithmus ist eine spezielle Form von Ford-Fulkerson, die nur Zunahmepfade mit möglichst wenigen Kanten benutzt, welche mittels Breitensuche bestimmt werden.

$i$	Fluss $f_{P_i}$ in $N_{f_i}$	neuer Fluss $f_{i+1}$ in $N$
1		
2		
⋮		
$2j - 1,$ $1 < j \leq 2^{10}$		
$2j,$ $1 < j < 2^{10}$		
⋮		
$2^{11}$		

**Algorithmus Edmonds-Karp**( $V, E, s, t, c$ )

---

```

1  for all  $(u, v) \in E \cup E^R$  do
2     $f(u, v) := 0$ 
3  repeat
4     $P := \text{zunahmepfad}(f)$ 
5    if  $P \neq \perp$  then  $\text{addierepfad}(f, P)$ 
6  until  $P = \perp$ 

```

---

**Prozedur zunahmepfad**( $f$ )

---

```

1  for all  $v \in V \setminus \{s\}$  do
2     $\text{parent}(v) := \perp$ 
3   $\text{parent}(s) := s$ 
4   $Q := (s)$ 
5  while  $Q \neq () \wedge \text{parent}(t) = \perp$  do
6     $u := \text{dequeue}(Q)$ 
7    for all  $e = (u, v) \in E \cup E^R$  do
8      if  $c(e) - f(e) > 0 \wedge \text{parent}(v) = \perp$  then
9         $c'(e) := c(e) - f(e)$ 
10        $\text{parent}(v) := u$ 
11        $\text{enqueue}(Q, v)$ 
12  if  $\text{parent}(t) = \perp$  then
13     $P := \perp$ 
14  else
15     $P := \text{parent-Pfad von } s \text{ nach } t$ 
16     $c_f(P) := \min\{c'(e) \mid e \in P\}$ 
17  return  $P$ 

```

---

**Prozedur addierepfad**( $f, P$ )

---

```

1  for all  $e \in P$  do
2     $f(e) := f(e) + c_f(P)$ 
3     $f(e^R) := f(e^R) - c_f(P)$ 

```

---

Die Prozedur  $\text{zunahmepfad}(f)$  berechnet im Restnetzwerk  $N_f$  einen (gerichteten)  $s$ - $t$ -Pfad  $P$ , sofern ein solcher existiert. Dies ist genau dann der Fall, wenn die while-Schleife mit  $\text{parent}(t) \neq \perp$  abbricht. Der Pfad  $P$  lässt sich dann mittels  $\text{parent}$  wie folgt zurückverfolgen. Sei

$$u_i = \begin{cases} t, & i = 0, \\ \text{parent}(u_{i-1}), & i > 0 \text{ und } u_{i-1} \neq s \end{cases}$$

und sei  $\ell = \min\{i \geq 0 \mid u_i = s\}$ . Dann ist  $u_\ell = s$  und  $P = (u_\ell, \dots, u_0)$  ein  $s$ - $t$ -Pfad, den wir als den **parent-Pfad** von  $s$  nach  $t$  bezeichnen.

**Satz 3.10.** *Der Edmonds-Karp-Algorithmus durchläuft die repeat-Schleife höchstens  $(nm/2)$ -mal und hat somit eine Laufzeit von  $O(nm^2)$ .*

*Beweis.* Sei  $f_1$  der triviale Nullfluss und seien  $P_1, \dots, P_k$  die Zunahmepfade, die der Edmonds-Karp-Algorithmus der Reihe nach berechnet, d.h.  $f_{i+1} = f_i + f_{P_i}$ . Eine Kante  $e$  in  $P_i$  heißt **kritisch** für  $P_i$ , falls der Fluss  $f_{P_i}$  im Restnetzwerk  $N_{f_i}$  die Kante  $e$  **sättigt**, d.h.  $c_{f_i}(e) = f_{P_i}(e) = c_{f_i}(P_i)$ . Man beachte, dass eine kritische Kante  $e$  in  $P_i$  wegen  $c_{f_{i+1}}(e) = c_{f_i}(e) - f_{P_i}(e) = 0$  nicht in  $N_{f_{i+1}}$  enthalten ist, wohl aber die Kante  $e^R$ .