

Einführung in die Theoretische Informatik

Johannes Köbler



Institut für Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

WS 2013/14

Definition

- Sei A eine nichtleere Menge, R ist eine k -stellige Relation auf A , wenn $R \subseteq A^k = \underbrace{A \times \dots \times A}_{k\text{-mal}}$ ist.
- Für $i = 1, \dots, n$ sei R_i eine k_i -stellige Relation auf A . Dann heißt $(A; R_1, \dots, R_n)$ **Relationalstruktur**.
- Die Menge A heißt der **Individuenbereich**, die **Trägermenge** oder die **Grundmenge** der Relationalstruktur.

Bemerkung

- Wir werden hier hauptsächlich den Fall $n = 1$, $k_1 = 2$, also (A, R) mit $R \subseteq A \times A$ betrachten.
- Man nennt dann R eine **(binäre) Relation** auf A .
- Oft wird für $(a, b) \in R$ auch die **Infix-Schreibweise** aRb benutzt.

Beispiel

- (F, M) mit $F = \{f \mid f \text{ ist Fluss in Europa}\}$ und
 $M = \{(f, g) \in F \times F \mid f \text{ mündet in } g\}$,
- (U, B) mit $U = \{x \mid x \text{ ist Berliner}\}$ und
 $B = \{(x, y) \in U \times U \mid x \text{ ist Bruder von } y\}$,
- $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$, wobei M eine beliebige Menge und \subseteq die Inklusionsrelation auf den Teilmengen von M ist,
- (A, Id_A) mit $Id_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$ (die **Identität auf A**),
- (\mathbb{R}, \leq) ,
- $(\mathbb{Z}, |)$, wobei $|$ die "teilt"-Relation bezeichnet (d.h. $a|b$, falls ein $c \in \mathbb{Z}$ mit $b = ac$ existiert).

Mengentheoretische Operationen auf Relationen

- Da Relationen Mengen sind, können wir den **Schnitt**, die **Vereinigung**, die **Differenz** und das **Komplement** von Relationen bilden:

$$R \cap S = \{(x, y) \in A \times A \mid xRy \wedge xSy\},$$

$$R \cup S = \{(x, y) \in A \times A \mid xRy \vee xSy\},$$

$$R - S = \{(x, y) \in A \times A \mid xRy \wedge \neg xSy\},$$

$$\overline{R} = (A \times A) - R.$$

- Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(A \times A)$ eine beliebige Menge von Relationen auf A . Dann sind der **Schnitt über \mathcal{M}** und die **Vereinigung über \mathcal{M}** folgende Relationen:

$$\bigcap \mathcal{M} = \bigcap_{R \in \mathcal{M}} R = \{(x, y) \mid \forall R \in \mathcal{M} : xRy\},$$

$$\bigcup \mathcal{M} = \bigcup_{R \in \mathcal{M}} R = \{(x, y) \mid \exists R \in \mathcal{M} : xRy\}.$$

Definition

- Die **transponierte (konverse) Relation** zu R ist

$$R^T = \{(y, x) \mid xRy\}.$$

- R^T wird oft auch mit R^{-1} bezeichnet.
- Zum Beispiel ist $(\mathbb{R}, \leq^T) = (\mathbb{R}, \geq)$.
- Das **Produkt** (oder die **Komposition**) zweier Relationen R und S ist

$$R \circ S = \{(x, z) \in A \times A \mid \exists y \in A : xRy \wedge ySz\}.$$

Beispiel

Ist B die Relation "ist Bruder von", V "ist Vater von", M "ist Mutter von" und $E = V \cup M$ "ist Elternteil von", so ist $B \circ E$ die Onkel-Relation. \triangleleft

Notation

- Für $R \circ S$ wird auch $R ; S$, $R \cdot S$ oder einfach RS geschrieben.
- Für $\underbrace{R \circ \dots \circ R}_{n\text{-mal}}$ schreiben wir auch R^n . Dabei ist $R^0 = Id$.

Vorsicht!

Das Relationenprodukt R^n sollte nicht mit dem kartesischen Produkt

$$\underbrace{R \times \dots \times R}_{n\text{-mal}}$$

verwechselt werden.

Vereinbarung

Wir vereinbaren, dass R^n das n -fache Relationenprodukt bezeichnen soll, falls R eine Relation ist.

Eigenschaften von Relationen

Definition

Sei R eine Relation auf A . Dann heißt R

reflexiv, falls $\forall x \in A : xRx$ (also $Id_A \subseteq R$)

irreflexiv, falls $\forall x \in A : \neg xRx$ (also $Id_A \subseteq \bar{R}$)

symmetrisch, falls $\forall x, y \in A : xRy \Rightarrow yRx$ (also $R \subseteq R^T$)

asymmetrisch, falls $\forall x, y \in A : xRy \Rightarrow \neg yRx$ (also $R \subseteq \overline{R^T}$)

antisymmetrisch, falls $\forall x, y \in A : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$ (also $R \cap R^T \subseteq Id$)

konnex, falls $\forall x, y \in A : xRy \vee yRx$ (also $A \times A \subseteq R \cup R^T$)

semikonnex, falls $\forall x, y \in A : x \neq y \Rightarrow xRy \vee yRx$ (also $\overline{Id} \subseteq R \cup R^T$)

transitiv, falls $\forall x, y, z \in A : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ (also $R^2 \subseteq R$)

gilt.

Äquivalenz- und Ordnungsrelationen

| | refl. | sym. | trans. | antisym. | asym. | konnex | semikon. |
|--------------------|-------|------|--------|----------|-------|--------|----------|
| Äquivalenzrelation | ✓ | ✓ | ✓ | | | | |
| (Halb-)Ordnung | ✓ | | ✓ | ✓ | | | |
| Striktordnung | | | ✓ | | | ✓ | |
| lineare Ordnung | | | ✓ | ✓ | | | ✓ |
| lin. Striktord. | | | ✓ | | | ✓ | ✓ |
| Quasiordnung | ✓ | | ✓ | | | | |

Bemerkung

In der Tabelle sind nur die definierenden Eigenschaften durch ein "✓" gekennzeichnet. Das schließt nicht aus, dass noch weitere Eigenschaften vorliegen.

Beispiel

- Die Relation "ist Schwester von" ist zwar in einer reinen Damengesellschaft symmetrisch, i.a. jedoch weder symmetrisch noch asymmetrisch noch antisymmetrisch.
- Die Relation "ist Geschwister von" ist zwar symmetrisch, aber weder reflexiv noch transitiv und somit keine Äquivalenzrelation.
- $(\mathbb{R}, <)$ ist irreflexiv, asymmetrisch, transitiv und semikonnex und somit eine lineare Striktordnung.
- (\mathbb{R}, \leq) und $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ sind reflexiv, antisymmetrisch und transitiv und somit Ordnungen.
- (\mathbb{R}, \leq) ist auch konnex und somit eine lineare Ordnung.
- $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ ist zwar im Fall $\|M\| \leq 1$ konnex, aber im Fall $\|M\| \geq 2$ weder semikonnex noch konnex.

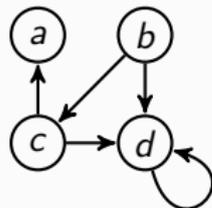


Darstellung von endlichen Relationen

Graphische Darstellung

$$A = \{a, b, c, d\}$$

$$R = \{(b, c), (b, d), (c, a), (c, d), (d, d)\}$$



- Eine Relation R auf einer (endlichen) Menge A kann durch einen **gerichteten Graphen** (kurz **Digraphen**) $G = (A, R)$ mit **Knotenmenge** A und **Kantenmenge** R veranschaulicht werden.
- Hierzu stellen wir jedes Element $x \in A$ als einen Knoten dar und verbinden jedes Knotenpaar $(x, y) \in R$ durch eine gerichtete Kante (Pfeil).
- Zwei durch eine Kante verbundene Knoten heißen **adjazent** oder **benachbart**.

Darstellung von endlichen Relationen

Definition

Sei R eine binäre Relation auf A .

- Die **Menge der Nachfolger** bzw. **Vorgänger** von x ist

$$R[x] = \{y \in A \mid xRy\} \text{ bzw. } R^{-1}[x] = \{y \in A \mid yRx\}.$$

- Der **Ausgangsgrad** eines Knotens x ist $\deg^+(x) = \|R[x]\|$.
- Der **Eingangsgrad** von x ist $\deg^-(x) = \|R^{-1}[x]\|$.
- Ist R symmetrisch, so können wir die Pfeilspitzen auch weglassen.
- In diesem Fall heißt $\deg(x) = \deg^-(x) = \deg^+(x)$ der **Grad** von x und $R[x] = R^{-1}[x]$ die **Nachbarschaft** von x in G .
- G ist **schleifenfrei**, falls R irreflexiv ist.
- Ist R irreflexiv und symmetrisch, so nennen wir $G = (A, R)$ einen **(ungerichteten) Graphen**.

Darstellung von endlichen Relationen

Matrixdarstellung (Adjazenzmatrix)

Eine Relation R auf $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ lässt sich auch durch die boolesche $(n \times n)$ -Matrix $M_R = (m_{ij})$ darstellen mit

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & a_i R a_j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel

Die Relation $R = \{(b, c), (b, d), (c, a), (c, d), (d, d)\}$ auf $A = \{a, b, c, d\}$ hat beispielsweise die Matrixdarstellung

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Tabellendarstellung (Adjazenzliste)

R lässt sich auch durch eine Tabelle darzustellen, die jedem Element $x \in A$ seine Nachfolger in Form einer Liste zuordnet.

Beispiel

Die Relation $R = \{(b, c), (b, d), (c, a), (c, d), (d, d)\}$ auf $A = \{a, b, c, d\}$ hat beispielsweise die Tabellendarstellung

| x | $R[x]$ |
|-----|--------|
| a | - |
| b | c, d |
| c | a, d |
| d | d |



Berechnung von $R \circ S$

- Sind $M_R = (r_{ij})$ und $M_S = (s_{ij})$ boolesche $n \times n$ -Matrizen für R und S , so erhalten wir für $T = R \circ S$ die Matrix $M_T = (t_{ij})$ mit

$$t_{ij} = \bigvee_{k=1, \dots, n} (r_{ik} \wedge s_{kj}).$$

- Die Nachfolgermenge $T[x]$ von x bzgl. der Relation $T = R \circ S$ berechnet sich zu

$$T[x] = \bigcup_{y \in R[x]} S[y].$$

Beispiel

Betrachte die Relationen $R = \{(a, a), (a, c), (c, b), (c, d)\}$ und $S = \{(a, b), (d, a), (d, c)\}$ auf der Menge $A = \{a, b, c, d\}$.

| Relation | R | S | $R \circ S$ | $S \circ R$ |
|----------------|--|--|--|--|
| Digraph | | | | |
| Adjazenzmatrix | $\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$ | $\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$ |
| Adjazenzliste | $\begin{matrix} a : a, c \\ b : - \\ c : b, d \\ d : - \end{matrix}$ | $\begin{matrix} a : b \\ b : - \\ c : - \\ d : a, c \end{matrix}$ | $\begin{matrix} a : b \\ b : - \\ c : a, c \\ d : - \end{matrix}$ | $\begin{matrix} a : - \\ b : - \\ c : - \\ d : a, b, c, d \end{matrix}$ |

Beobachtung

Das Relationsprodukt ist nicht kommutativ, d.h. i.a. gilt nicht $R \circ S = S \circ R$.

Relationenalgebra

Als nächstes zeigen wir, dass die Menge $\mathcal{R} = \mathcal{P}(A \times A)$ aller binären Relationen auf A mit dem Relationsprodukt \circ als binärer Operation ein **Monoid** (also eine Halbgruppe mit neutralem Element) bildet.

Satz

Seien Q, R, S Relationen auf A . Dann gilt

- 1 $(Q \circ R) \circ S = Q \circ (R \circ S)$, d.h. \circ ist assoziativ,
- 2 $Id \circ R = R \circ Id = R$, d.h. Id ist neutrales Element.

Satz

Seien Q, R, S Relationen auf A . Dann gilt

- ① $(Q \circ R) \circ S = Q \circ (R \circ S)$, d.h. \circ ist assoziativ,
- ② $Id \circ R = R \circ Id = R$, d.h. Id ist neutrales Element.

Beweis.

- ①

$$\begin{aligned}
 x (Q \circ R) \circ S y &\Leftrightarrow \exists u : x (Q \circ R) u \wedge u S y \\
 &\Leftrightarrow \exists u : (\exists v : x Q v R u) \wedge u S y \\
 &\Leftrightarrow \exists u, v : x Q v R u S y \\
 &\Leftrightarrow \exists v : x Q v \wedge (\exists u : v R u \wedge u S y) \\
 &\Leftrightarrow \exists v : x Q v (R \circ S) y \\
 &\Leftrightarrow x Q \circ (R \circ S) y
 \end{aligned}$$
- ② Wegen $x Id \circ R y \Leftrightarrow \exists z : x = z \wedge z R y \Leftrightarrow x R y$ folgt $Id \circ R = R$.
Die Gleichheit $R \circ Id = R$ folgt analog. □

Frage

Wieviele Paare muss man zu einer Relation R mindestens hinzufügen, damit sie transitiv wird?

Antwort

- Es ist leicht zu sehen, dass der Schnitt von transitiven Relationen wieder transitiv ist.
- Die **transitive Hülle** von R ist

$$R^+ = \bigcap \{S \subseteq A \times A \mid S \text{ ist transitiv und } R \subseteq S\}.$$

- R^+ ist also eine transitive Relation, die R enthält.
- Da R^+ zudem in jeder Relation mit diesen Eigenschaften enthalten ist, gibt es keine transitive Relation mit weniger Paaren, die R enthält.
- Da auch die Reflexivität und die Symmetrie bei der Schnittbildung erhalten bleiben, lassen sich nach demselben Muster weitere Hüllenoperatoren definieren.

Weitere Hüllenoperatoren

Definition

Sei R eine Relation auf A .

- Die **reflexive Hülle** von R ist

$$h_{\text{refl}}(R) = \bigcap \{S \subseteq A \times A \mid S \text{ ist reflexiv und } R \subseteq S\}.$$

- Die **symmetrische Hülle** von R ist

$$h_{\text{sym}}(R) = \bigcap \{S \subseteq A \times A \mid S \text{ ist symmetrisch und } R \subseteq S\}.$$

- Die **reflexiv-transitive Hülle** von R ist

$$R^* = \bigcap \{S \subseteq A \times A \mid S \text{ ist reflexiv, transitiv und } R \subseteq S\}.$$

- Die **Äquivalenzhülle** von R ist

$$h_{\text{äq}}(R) = \bigcap \{E \subseteq A \times A \mid E \text{ ist eine Äquivalenzrelation mit } R \subseteq E\}.$$

Satz

$$h_{\text{refl}}(R) = R \cup \text{Id}_A, \quad h_{\text{sym}}(R) = R \cup R^T, \quad R^+ = \bigcup_{n \geq 1} R^n, \quad R^* = \bigcup_{n \geq 0} R^n.$$

Beweis

Siehe Übungen. □

Bemerkung

- Ein Paar (a, b) ist also genau dann in der reflexiv-transitiven Hülle R^* von R enthalten, wenn es ein $n \geq 0$ gibt mit $aR^n b$.
- Dies bedeutet, dass es Elemente $x_0, \dots, x_n \in A$ gibt mit

$$x_0 = a, \quad x_n = b \quad \text{und} \quad x_0 R x_1 R x_2 \dots x_{n-1} R x_n.$$

- x_0, \dots, x_n heißt **Weg** der Länge n von a nach b .

Definition

(A, R) heißt **Ordnung** (auch **Halbordnung** oder **partielle Ordnung**), wenn R eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation auf A ist.

Beispiel

- $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$, (\mathbb{Z}, \leq) , (\mathbb{R}, \leq) , $(\mathbb{N}, |)$, sind Ordnungen. $(\mathbb{Z}, |)$ ist keine Ordnung, aber eine Quasiordnung.
- Ist R eine Relation auf A und $B \subseteq A$, so ist $R_B = R \cap (B \times B)$ die **Einschränkung** von R auf B .
- Einschränkungen von (linearen) Ordnungen sind ebenfalls (lineare) Ordnungen.
- Beispielsweise ist (\mathbb{Q}, \leq) die Einschränkung von (\mathbb{R}, \leq) auf \mathbb{Q} und $(\mathbb{N}, |)$ die Einschränkung von $(\mathbb{Z}, |)$ auf \mathbb{N} . ◀

- Sei \leq eine Ordnung auf A und sei $<$ die Relation $\leq \setminus Id_A$, d.h.

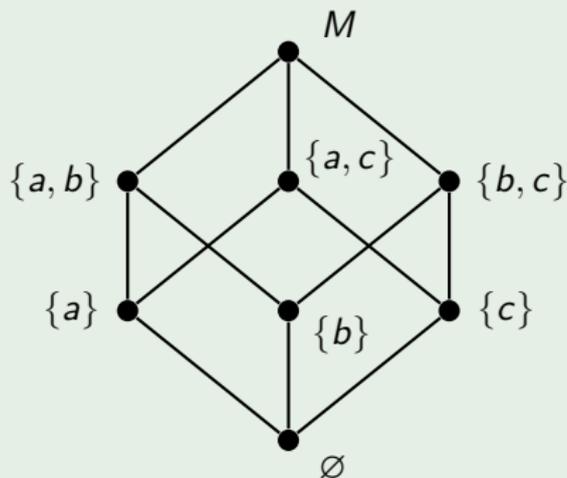
$$x < y \Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$$

- Ein Element $x \in A$ heißt **unterer Nachbar** von y (kurz: $x \triangleleft y$), falls $x < y$ gilt und kein $z \in A$ existiert mit $x < z < y$.
- \triangleleft ist also die Relation $< \setminus <^2$.
- Um die Ordnung (A, \leq) in einem **Hasse-Diagramm** darzustellen, wird nur der Digraph der Relation (A, \triangleleft) gezeichnet.
- Weiterhin wird im Fall $x \triangleleft y$ der Knoten y oberhalb vom Knoten x gezeichnet, so dass auf die Pfeilspitzen verzichtet werden kann.

Das Hasse-Diagramm für $(\mathcal{P}(M); \subseteq)$

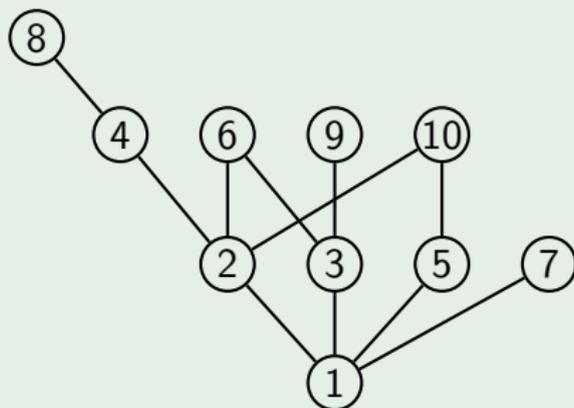
Beispiel

Die Inklusion \subseteq auf $\mathcal{P}(M)$ mit $M = \{a, b, c\}$ lässt sich durch folgendes Hasse-Diagramm darstellen:



Beispiel

Die Einschränkung der "teilt"-Relation auf die Menge $\{1, 2, \dots, 10\}$ ist durch folgendes Hasse-Diagramm darstellbar:



Maximale, minimale, größte und kleinste Elemente

Definition

Sei \leq eine Ordnung auf A und sei b ein Element in einer Teilmenge $B \subseteq A$.

- b heißt **kleinstes Element** oder **Minimum** von B , falls gilt:

$$\forall b' \in B : b \leq b'.$$

- b heißt **größtes Element** oder **Maximum** von B , falls gilt:

$$\forall b' \in B : b' \leq b.$$

- b heißt **minimal** in B , falls es in B kein kleineres Element gibt:

$$\forall b' \in B : b' \leq b \Rightarrow b' = b.$$

- b heißt **maximal** in B , falls es in B kein größeres Element gibt:

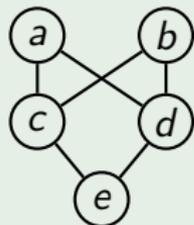
$$\forall b' \in B : b \leq b' \Rightarrow b = b'.$$

Bemerkung

Wegen der Antisymmetrie kann es in B höchstens ein kleinstes und höchstens ein größtes Element geben.

Beispiel

Betrachte folgende Ordnung.



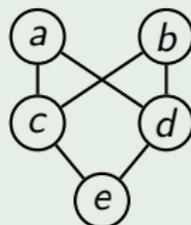
| B | minimal in B | maximal in B | Minimum von B | Maximum von B |
|------------------|-------------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| $\{a, b\}$ | a, b | a, b | - | - |
| $\{c, d\}$ | c, d | c, d | - | - |
| $\{a, b, c\}$ | c | a, b | c | - |
| $\{a, b, c, e\}$ | e | a, b | e | - |
| $\{a, c, d, e\}$ | e | a | e | a |

Definition

Sei \leq eine Ordnung auf A und sei $B \subseteq A$.

- Ein Element $u \in A$ mit $u \leq b$ für alle $b \in B$ heißt **untere Schranke von B** .
- Ein Element $o \in A$ mit $b \leq o$ für alle $b \in B$ heißt **obere Schranke von B** .
- B heißt **nach oben beschränkt**, wenn B eine obere Schranke hat.
- B heißt **nach unten beschränkt**, wenn B eine untere Schranke hat.
- B heißt **beschränkt**, wenn B nach oben und nach unten beschränkt ist.

Beispiel (Fortsetzung)



| B | minimal | maximal | min | max | untere Schranken | obere Schranken |
|------------------|---------|---------|-----|-----|------------------|-----------------|
| $\{a, b\}$ | a, b | a, b | - | - | c, d, e | - |
| $\{c, d\}$ | c, d | c, d | - | - | e | a, b |
| $\{a, b, c\}$ | c | a, b | c | - | c, e | - |
| $\{a, b, c, e\}$ | e | a, b | e | - | e | - |
| $\{a, c, d, e\}$ | e | a | e | a | e | a |

Definition

Sei \leq eine Ordnung auf A und sei $B \subseteq A$.

- Besitzt B eine größte untere Schranke i , d.h. besitzt die Menge U aller unteren Schranken von B ein größtes Element i , so heißt i das **Infimum von B** ($i = \inf B$):

$$(\forall b \in B : b \geq i) \wedge [\forall u \in A : (\forall b \in B : b \geq u) \Rightarrow u \leq i].$$

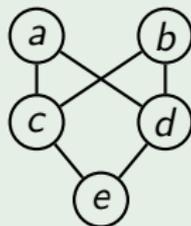
- Besitzt B eine kleinste obere Schranke s , d.h. besitzt die Menge O aller oberen Schranken von B ein kleinstes Element s , so heißt s das **Supremum von B** ($s = \sup B$):

$$(\forall b \in B : b \leq s) \wedge [\forall o \in A : (\forall b \in B : b \leq o) \Rightarrow s \leq o]$$

Bemerkung

B kann nicht mehr als ein Supremum und ein Infimum haben.

Beispiel (Schluss)



| B | minimal | maximal | min | max | untere obere Schranken | | inf | sup |
|------------------|---------|---------|-----|-----|---------------------------|--------|-----|-----|
| $\{a, b\}$ | a, b | a, b | - | - | c, d, e | - | - | - |
| $\{c, d\}$ | c, d | c, d | - | - | e | a, b | e | - |
| $\{a, b, c\}$ | c | a, b | c | - | c, e | - | c | - |
| $\{a, b, c, e\}$ | e | a, b | e | - | e | - | e | - |
| $\{a, c, d, e\}$ | e | a | e | a | e | a | e | a |

Bemerkung

- Auch in linearen Ordnungen muss nicht jede beschränkte Teilmenge ein Supremum oder Infimum besitzen.
- So hat in der linear geordneten Menge (\mathbb{Q}, \leq) die Teilmenge

$$B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$$

weder ein Supremum noch ein Infimum.

- Dagegen hat in (\mathbb{R}, \leq) jede beschränkte Teilmenge B ein Supremum und ein Infimum (aber möglicherweise kein Maximum oder Minimum).

Definition

(A, R) heißt **Äquivalenzrelation**, wenn R eine reflexive, symmetrische und transitive Relation auf A ist.

Beispiel

- Auf der Menge aller Geraden im \mathbb{R}^2 die Parallelität.
- Auf der Menge aller Menschen "im gleichen Jahr geboren wie".
- Auf \mathbb{Z} die Relation "gleicher Rest bei Division durch m ".



Äquivalenzrelationen

- Ist E eine Äquivalenzrelation, so nennt man die Nachbarschaft $E[x]$ die **von x repräsentierte Äquivalenzklasse** und bezeichnet sie auch mit $[x]_E$ (oder einfach mit $[x]$, falls E aus dem Kontext ersichtlich ist):

$$[x]_E = [x] = E[x] = \{y \mid xEy\}.$$

- Wie wir sehen werden, bilden die Äquivalenzklassen eine **Zerlegung (Partition)** von A , d.h. je zwei Äquivalenzklassen sind entweder disjunkt oder gleich und ihre Vereinigung ergibt A .
- Die Zerlegung von A in Äquivalenzklassen wird **Quotienten- oder Faktormenge** von A bzgl. E genannt und mit A/E bezeichnet:

$$A/E = \{[x]_E \mid x \in A\}.$$

- Die Anzahl $\|A/E\|$ der Äquivalenzklassen von E wird auch als der **Index von E** bezeichnet.
- Eine Menge $S \subseteq A$ heißt **Repräsentantensystem**, falls sie genau ein Element aus jeder Äquivalenzklasse enthält.

Beispiel

Für die weiter oben betrachteten Äquivalenzrelationen erhalten wir folgende Klasseneinteilungen:

- Für die Parallelität auf der Menge aller Geraden im \mathbb{R}^2 : alle Geraden mit derselben Richtung (oder Steigung) bilden jeweils eine Äquivalenzklasse.
- Ein Repräsentantensystem wird beispielsweise durch die Menge aller Ursprungsgeraden gebildet.
- Für die Relation "im gleichen Jahr geboren wie" auf der Menge aller Menschen: jeder Jahrgang bildet eine Äquivalenzklasse.
- Für die Relation "gleicher Rest bei Division durch m " auf \mathbb{Z} : jede der m Restklassen $[0], [1], \dots, [m-1]$ mit

$$[r] = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \bmod m = r\}$$

bildet eine Äquivalenzklasse.

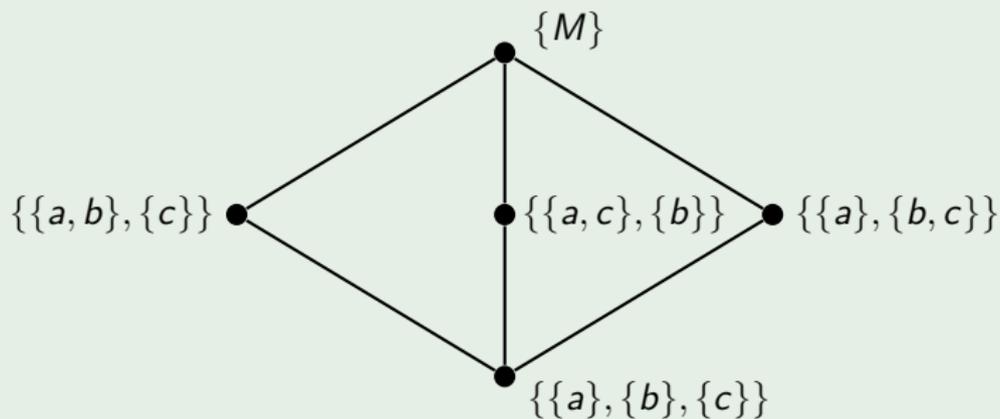
- Repräsentantensystem: $\{0, 1, \dots, m-1\}$.

Bemerkungen

- Die kleinste Äquivalenzrelation auf A ist die Identität Id_A , die größte ist die Allrelation $A \times A$.
- Die Äquivalenzklassen der Identität enthalten jeweils nur ein Element, d.h. $A/Id_A = \{\{x\} \mid x \in A\}$.
- Die Allrelation erzeugt nur eine Äquivalenzklasse, nämlich A , d.h. $A/(A \times A) = \{A\}$.
- Für zwei Äquivalenzrelationen $E \subseteq E'$ sind auch die Äquivalenzklassen $[x]_E$ von E in den Klassen $[x]_{E'}$ von E' enthalten.
- Folglich ist jede Äquivalenzklasse von E' die Vereinigung von (evtl. mehreren) Äquivalenzklassen von E .
- Im Fall $E \subseteq E'$ sagt man auch, E bewirkt eine **feinere** Zerlegung von A als E' .
- Demnach ist die Identität die **feinste** und die Allrelation die **größte** Äquivalenzrelation.

Beispiel

Die "feiner als" Relation auf der Menge aller Partitionen von $M = \{a, b, c\}$ ist durch folgendes Hasse-Diagramm darstellbar:



Partition einer Menge

Definition

Eine Familie $\{B_i \mid i \in I\}$ von nichtleeren Teilmengen $B_i \subseteq A$ heißt **Partition** der Menge A , falls gilt:

- die Mengen B_i **überdecken** A , d.h. $A = \bigcup_{i \in I} B_i$ und
- die Mengen B_i sind **paarweise disjunkt**, d.h. für je zwei verschiedene Mengen $B_i \neq B_j$ gilt $B_i \cap B_j = \emptyset$.

Satz

Sei E eine Relation auf A . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1 E ist eine Äquivalenzrelation auf A ,
- 2 Für alle $x, y \in A$ gilt $xEy \Leftrightarrow E[x] = E[y]$,
- 3 Es gibt eine Partition $\{B_i \mid i \in I\}$ von A mit $xEy \Leftrightarrow \exists i \in I : x, y \in B_i$.

Äquivalenzrelationen und Partitionen

Satz

Sei E eine Relation auf A . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- ① E ist eine Äquivalenzrelation auf A ,
- ② Für alle $x, y \in A$ gilt $xEy \Leftrightarrow E[x] = E[y]$,
- ③ Es gibt eine Partition $\{B_i \mid i \in I\}$ von A mit $xEy \Leftrightarrow \exists i \in I : x, y \in B_i$.

Beweis.

- ① impliziert ②: Sei E eine Äquivalenzrelation auf A .

Da E transitiv ist, impliziert xEy die Inklusion $E[y] \subseteq E[x]$:

$$z \in E[y] \Rightarrow yEz \stackrel{xEy}{\Rightarrow} xEz \Rightarrow z \in E[x].$$

Da E symmetrisch ist, folgt aus xEy aber auch $E[x] \subseteq E[y]$.

Umgekehrt folgt aus $E[x] = E[y]$ wegen der Reflexivität von E , dass $y \in E[y] = E[x]$ enthalten ist, und somit xEy .

Äquivalenzrelationen und Partitionen

Satz

Sei E eine Relation auf A . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1 E ist eine Äquivalenzrelation auf A ,
- 2 Für alle $x, y \in A$ gilt $xEy \Leftrightarrow E[x] = E[y]$,
- 3 Es gibt eine Partition $\{B_i \mid i \in I\}$ von A mit $xEy \Leftrightarrow \exists i \in I : x, y \in B_i$.

Beweis.

2 **impliziert** 3: Wir zeigen, dass $\{E[x] \mid x \in A\}$ eine Partition von A bildet, falls E die Bedingung $xEy \Leftrightarrow E[x] = E[y]$ erfüllt.

- Wegen $E[x] = E[x]$ folgt xEx und somit $x \in E[x]$.
- Folglich überdecken die Mengen $E[x]$ die Menge A .
- Ist $E[x] \cap E[y] \neq \emptyset$ und z ein Element in $E[x] \cap E[y]$, so gilt xEz und yEz und daher folgt $E[x] = E[z] = E[y]$.

Satz

Sei E eine Relation auf A . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1 E ist eine Äquivalenzrelation auf A ,
- 2 Für alle $x, y \in A$ gilt $xEy \Leftrightarrow E[x] = E[y]$,
- 3 Es gibt eine Partition $\{B_i \mid i \in I\}$ von A mit $xEy \Leftrightarrow \exists i \in I : x, y \in B_i$.

Beweis.

3 **impliziert** 1: Existiert schließlich eine Partition $\{B_i \mid i \in I\}$ von A mit $xEy \Leftrightarrow \exists i \in I : x, y \in B_i$, so ist E

- reflexiv, da zu jedem $x \in A$ eine Menge B_i mit $x \in B_i$ existiert,
- symmetrisch, da aus $x, y \in B_i$ auch $y, x \in B_i$ folgt, und
- transitiv, da aus $x, y \in B_i$ und $y, z \in B_j$ wegen $y \in B_i \cap B_j$ die Gleichheit $B_i = B_j$ und somit $x, z \in B_i$ folgt. □

Definition

Sei R eine binäre Relation auf einer Menge M .

- R heißt **rechtseindeutig**, falls für alle $x, y, z \in M$ gilt:

$$xRy \wedge xRz \Rightarrow y = z.$$

- R heißt **linkseindeutig**, falls für alle $x, y, z \in M$ gilt:

$$xRz \wedge yRz \Rightarrow x = y.$$

- Der **Nachbereich** $N(R)$ und der **Vorbereich** $V(R)$ von R sind

$$N(R) = \bigcup_{x \in M} R[x] \quad \text{und} \quad V(R) = \bigcup_{x \in M} R^T[x].$$

Abbildungen ordnen jedem Element ihres Definitionsbereichs genau ein Element zu.

Definition

Eine rechtseindeutige Relation R mit $V(R) = A$ und $N(R) \subseteq B$ heißt **Abbildung** oder **Funktion von A nach B** (kurz $R : A \rightarrow B$).

Bemerkung

- Wie üblich werden wir Abbildungen meist mit kleinen Buchstaben f, g, h, \dots bezeichnen und für $(x, y) \in f$ nicht xfy sondern $f(x) = y$ oder $f : x \mapsto y$ schreiben.
- Ist $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung, so wird der Vorbereich $V(f) = A$ der **Definitionsbereich** und die Menge B der **Wertebereich** oder **Wertevorrat** von f genannt.
- Der Nachbereich $N(f)$ wird als **Bild** von f bezeichnet.

Definition

Sei $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung.

- Im Fall $N(f) = B$ heißt f **surjektiv**.
- Ist f linkseindeutig, so heißt f **injektiv**.
- In diesem Fall impliziert $f(x) = f(y)$ die Gleichheit $x = y$.
- Eine injektive und surjektive Abbildung heißt **bijektiv**.
- Ist f injektiv, so ist auch $f^{-1} : N(f) \rightarrow A$ eine Abbildung, die als die zu f **inverse Abbildung** bezeichnet wird.

Bemerkung

Man beachte, dass der Definitionsbereich $V(f^{-1}) = N(f)$ von f^{-1} nur dann gleich B ist, wenn f auch surjektiv, also eine Bijektion ist.

Definition

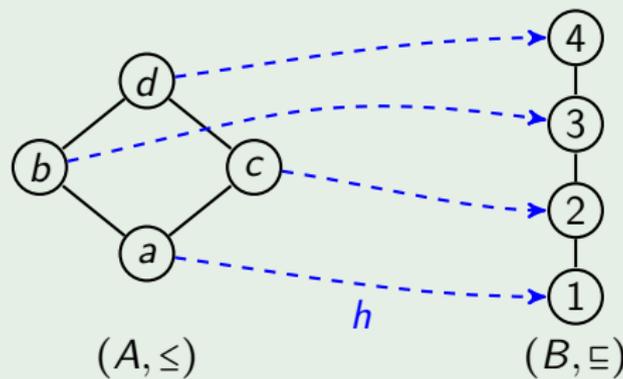
Seien (A_1, R_1) und (A_2, R_2) Relationalstrukturen.

- Eine Abbildung $h: A_1 \rightarrow A_2$ heißt **Homomorphismus**, falls für alle $a, b \in A_1$ gilt:

$$aR_1b \Rightarrow h(a)R_2h(b).$$

- Sind (A_1, R_1) und (A_2, R_2) Ordnungen, so spricht man auch von **Ordnungshomomorphismen** oder einfach von **monotonen** Abbildungen.
- Injektive Ordnungshomomorphismen werden auch **streng monotone** Abbildungen genannt.

Beispiel



- Die Abbildung $h: A \rightarrow B$ ist ein bijektiver Ordnungshomomorphismus.
- Die Umkehrabbildung h^{-1} ist jedoch kein Homomorphismus, da h^{-1} nicht monoton ist.
- Es gilt nämlich $2 \subseteq 3$, aber $h^{-1}(2) = b \not\subseteq c = h^{-1}(3)$.

Definition

- Seien (A_1, R_1) und (A_2, R_2) Relationalstrukturen.
- Ein bijektiver Homomorphismus $h: A_1 \rightarrow A_2$, bei dem auch h^{-1} ein Homomorphismus ist, d.h. es gilt für alle $a, b \in A_1$,

$$aR_1b \Leftrightarrow h(a)R_2h(b).$$

heißt **Isomorphismus**.

- In diesem Fall heißen die Strukturen (A_1, R_1) und (A_2, R_2) **isomorph** (kurz: $(A_1, R_1) \cong (A_2, R_2)$).

Sind (A_1, R_1) und (A_2, R_2) isomorph, so bedeutet dies, dass sich die beiden Strukturen nur in der Benennung ihrer Elemente unterscheiden.

Beispiel

- Die Bijektion $h: x \mapsto e^x$ ist ein Ordnungsisomorphismus zwischen (\mathbb{R}, \leq) und (\mathbb{R}^+, \leq) .
- Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$T_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ teilt } n\}$$

und

$$P_n = \{p \in T_n \mid p \text{ ist prim}\}.$$

Dann ist die Abbildung

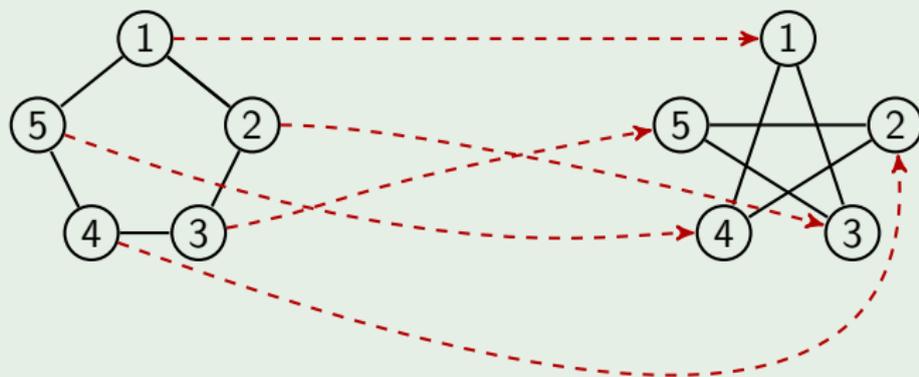
$$h: k \mapsto P_k$$

ein Ordnungshomomorphismus von $(T_n, |)$ auf $(\mathcal{P}(P_n), \subseteq)$.

h ist sogar ein Isomorphismus, falls n **quadratifrei** ist (d.h. es gibt keine Primzahl p , so dass p^2 die Zahl n teilt).



Beispiel

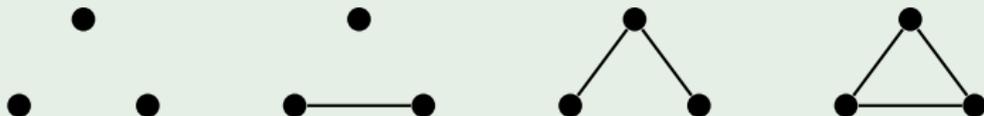


| | | | | | | | | |
|--------------|--|-----|-----------|----------|-----------|----------|-----------|----------------|
| $G = (V, E)$ | <table style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 10px;">v</td> <td style="padding: 0 10px;">1 2 3 4 5</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 10px; color: red;">$h_1(v)$</td> <td style="padding: 0 10px; color: red;">1 3 5 2 4</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 10px; color: blue;">$h_2(v)$</td> <td style="padding: 0 10px; color: blue;">1 4 2 5 3</td> </tr> </table> | v | 1 2 3 4 5 | $h_1(v)$ | 1 3 5 2 4 | $h_2(v)$ | 1 4 2 5 3 | $G' = (V, E')$ |
| v | 1 2 3 4 5 | | | | | | | |
| $h_1(v)$ | 1 3 5 2 4 | | | | | | | |
| $h_2(v)$ | 1 4 2 5 3 | | | | | | | |

- Die beiden Graphen G und G' sind isomorph.
- Zwei Isomorphismen sind beispielsweise h_1 und h_2 .

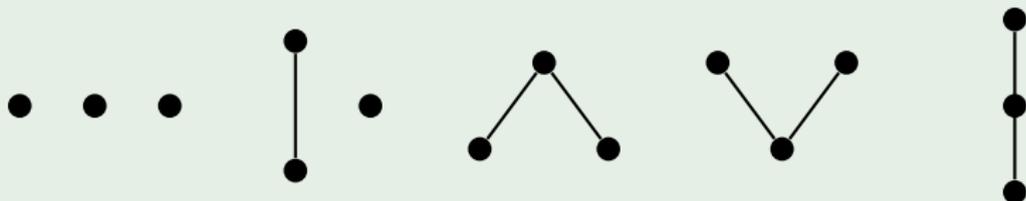
Beispiel

- Während auf der Knotenmenge $V = \{1, 2, 3\}$ insgesamt $2^{\binom{3}{2}} = 2^3 = 8$ verschiedene Graphen existieren, gibt es auf dieser Menge nur 4 verschiedene nichtisomorphe Graphen:



Beispiel

- Es existieren genau 5 nichtisomorphe Ordnungen mit 3 Elementen:



- Anders ausgedrückt: Die Klasse aller dreielementigen Ordnungen zerfällt unter der Isomorphierelation \cong in fünf Äquivalenzklassen, die durch obige fünf Hasse-Diagramme repräsentiert werden.

