

Übungsblatt 7

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 2.–5. 12. 2008
Abgabe der schriftlichen Lösungen bis zum 9. 12. 2008

Aufgabe 48

10 Punkte

Eine *Permutation* w eines Wortes v entsteht durch beliebige Umordnung der Buchstaben von v . Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ sei

$$\text{perm}(L) = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ ist eine Permutation eines Wortes } v \in L\}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass REG nicht unter dem *perm*-Operator abgeschlossen ist. (mündlich)
- (b) Sei A eine kontextfreie und B sei eine reguläre Sprache. Zeigen Sie, dass dann $A \cap B$ kontextfrei ist. Müssen dann auch die Sprachen $A \setminus B$ und $A \Delta B$ kontextfrei sein? (7 Punkte)
- (c) Zeigen Sie, dass auch CFL nicht unter dem *perm*-Operator abgeschlossen ist. (3 Punkte)

Aufgabe 49

10 Punkte

Welche der folgenden Sprachen sind kontextfrei? Begründen Sie.

- (a) $L_1 = \{a^l b^m a^n \mid m \leq \max(l, n)\}$, (mündlich)
- (b) $L_2 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \#_a(w) < \#_b(w) < \#_c(w)\}$, (mündlich)
- (c) $L_3 = \{a^n b^m \mid 0 \leq n \leq m \leq 2n\}$, (5 Punkte)
- (d) $L_4 = \{baba^2 ba^3 b \cdots ba^{n-1} ba^n b \mid n \geq 1\}$. (5 Punkte)

Aufgabe 50

mündlich

Die Funktion $l_{\text{reg}} (l_{\text{kfr}})$ weise einer Sprache L , die die Konklusion des Pumping-Lemmas für reguläre (kontextfreie) Sprachen erfüllt, ihre Pumpingzahl und allen anderen Sprachen den Wert ∞ zu. Eine Sprache $T \subseteq \Sigma^*$ über einem unären Alphabet $\Sigma = \{a\}$ heißt *tally*. Zeigen Sie:

- (a) Für jede Sprache L gilt $l_{\text{kfr}}(L) \leq l_{\text{reg}}(L)$.
- (b) Für jede tally Sprache T gilt $l_{\text{kfr}}(T) = l_{\text{reg}}(T)$.
- (c) Für jede tally Sprache $T \subseteq \{a\}^*$ mit $l = l_{\text{reg}}(T) < \infty$ gilt: Falls a^n , $n \geq l$, zu T gehört, so enthält T auch alle Wörter $a^{n+i!}$, $i \geq 1$.
- (d) Eine tally Sprache T ist genau dann regulär, wenn $l_{\text{reg}}(T) < \infty$ ist.
- (e) Es gibt keine tally Sprache in CFL – REG.

Aufgabe 51

5 Punkte

$$L = \{a^i b^j c^k d^l \mid i = 0 \text{ oder } j = k = l\},$$

dass die Umkehrung des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen im Allgemeinen falsch ist.

Aufgabe 52

mündlich

Welche Sprachen können von PDAs erkannt werden, die Überföhrungsfunktionen der Form $\delta: Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow \mathcal{P}(Z \times \Gamma^*)$ haben?

Aufgabe 53

mündlich

Ein EPDA (extended PDA) ist ein 6-Tupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$. Dabei haben Z, Σ, Γ und q_0 die gleiche Funktion wie bei einem PDA und $E \subseteq Z$ ist eine Menge von Endzuständen. Die Überföhrungsfunktion hat die Form

$$\delta: Z \times \Sigma^* \times \Gamma^* \rightarrow \mathcal{P}_e(Z \times \Gamma^*),$$

wobei $\{(q, w, \alpha) \mid \delta(q, w, \alpha) \neq \emptyset\}$ endlich ist. Analog zum PDA überföhrt eine Anweisung $qu\alpha \rightarrow p\gamma$ die Konfiguration $(q, uv, \alpha\beta)$ in die Folgekonfiguration $(p, v, \gamma\beta)$ (in Zeichen: $(q, uv, \alpha\beta) \vdash (p, v, \gamma\beta)$). Das Kelleranfangszeichen entfällt. Die von M akzeptierte Sprache ist

$$L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists p \in E : (q_0, x, \varepsilon) \vdash^* (p, \varepsilon, \varepsilon)\}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass $\{L(M) \mid M \text{ ist ein EPDA}\} = \text{CFL}$ ist.
- (b) Zeigen Sie, dass ohne die Bedingung „ $\{(q, w, \alpha) \mid \delta(q, w, \alpha) \neq \emptyset\}$ ist endlich“ jede Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ von einem EPDA erkannt wird.

Aufgabe 54

mündlich

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \leq \#_b(w)\}.$$

- (a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G für L an.
- (b) Wandeln Sie G in eine CNF-Grammatik G' für die Sprache $L(G) \setminus \{\varepsilon\}$ um.
- (c) Testen Sie mit dem CYK-Algorithmus, ob das Wort *abbab* von Ihrer Grammatik G' erzeugt wird.

Aufgabe 55

5 Punkte

Gegeben sei die Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, L, R\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und den Regeln

$$P: S \rightarrow LR, SS, a; L \rightarrow a; R \rightarrow SR, b.$$

- (a) Geben Sie eine explizite Beschreibung für $L(G)$ an.
- (b) Wenden Sie den CYK-Algorithmus an, um die Zugehörigkeit von $aaaabb = a^4 b^2$ zu $L(G)$ zu testen.