

Einführung in die Theoretische Informatik

Johannes Köbler



Institut für Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

WS 2011/12

Zeitkomplexität von Turingmaschinen

Die Laufzeit einer NTM M bei Eingabe x ist die maximale Anzahl an Rechenschritten, die $M(x)$ ausführt.

Definition

- Die **Laufzeit** einer NTM M bei Eingabe x ist definiert als

$$\text{time}_M(x) = \max\{t \geq 0 \mid \exists K : K_x \vdash^t K\},$$

wobei $\max \mathbb{N} = \infty$ ist.

- Sei $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine monoton wachsende Funktion.
- Dann ist M **$t(n)$ -zeitbeschränkt**, falls für alle Eingaben x gilt:

$$\text{time}_M(x) \leq t(|x|).$$

Die Zeitschranke $t(n)$ beschränkt also die Laufzeit bei allen Eingaben der Länge n (worst-case Komplexität).

Zeitkomplexitätsklassen

Wir fassen alle Sprachen und Funktionen, die in einer vorgegebenen Zeitschranke $t(n)$ entscheidbar bzw. berechenbar sind, in folgenden **Komplexitätsklassen** zusammen.

Definition

- Die in deterministischer Zeit $t(n)$ entscheidbaren Sprachen bilden die Sprachklasse

$$\text{DTIME}(t(n)) = \{L(M) \mid M \text{ ist eine } t(n)\text{-zeitbeschränkte DTM}\}.$$

- Die in nichtdeterministischer Zeit $t(n)$ entscheidbaren Sprachen bilden die Sprachklasse

$$\text{NTIME}(t(n)) = \{L(M) \mid M \text{ ist eine } t(n)\text{-zeitbeschränkte NTM}\}.$$

- Die in deterministischer Zeit $t(n)$ berechenbaren Funktionen bilden die Funktionenklasse

$$\text{FTIME}(t(n)) = \left\{ f \mid \begin{array}{l} \text{es gibt eine } t(n)\text{-zeitbeschränkte} \\ \text{DTM } M, \text{ die } f \text{ berechnet} \end{array} \right\}.$$

Die wichtigsten Zeitkomplexitätsklassen

- Die wichtigsten deterministischen Zeitkomplexitätsklassen sind

$$\text{LINTIME} = \bigcup_{c \geq 1} \text{DTIME}(cn + c) \quad \text{„Linearzeit“}$$

$$\text{P} = \bigcup_{c \geq 1} \text{DTIME}(n^c + c) \quad \text{„Polynomialzeit“}$$

$$\text{E} = \bigcup_{c \geq 1} \text{DTIME}(2^{cn+c}) \quad \text{„Lineare Exponentialzeit“}$$

$$\text{EXP} = \bigcup_{c \geq 1} \text{DTIME}(2^{n^c+c}) \quad \text{„Exponentialzeit“}$$

- Die nichtdeterministischen Klassen **NLINTIME**, **NP**, **NE**, **NEXP** und die Funktionenklassen **FP**, **FE**, **FEXP** sind analog definiert.
- Für eine Klasse \mathcal{F} von Funktionen sei $\text{DTIME}(\mathcal{F}) = \bigcup_{t \in \mathcal{F}} \text{DTIME}(t(n))$ (die Klassen **NTIME**(\mathcal{F}) und **FTIME**(\mathcal{F}) sind analog definiert).

Asymptotische Laufzeit und Landau-Notation

Definition

Seien f und g Funktionen von \mathbb{N} nach $\mathbb{R}^+ \cup \{0\} = [0, \infty)$.

- Wir schreiben $f(n) = O(g(n))$, falls es Zahlen n_0 und c gibt mit

$$\forall n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n).$$

Bedeutung: „ f wächst **nicht wesentlich schneller** als g .“

- Formal bezeichnet der Term $O(g(n))$ die Klasse aller Funktionen f , die obige Bedingung erfüllen.
- Die Gleichung $f(n) = O(g(n))$ drückt also in Wahrheit eine **Element-Beziehung** $f \in O(g(n))$ aus.
- O -Terme können auch auf der linken Seite vorkommen.
- In diesem Fall wird eine **Inklusionsbeziehung** ausgedrückt.
- So steht $n^2 + O(n) = O(n^2)$ für die Aussage

$$\{n^2 + f \mid f \in O(n)\} \subseteq O(n^2).$$

Asymptotische Laufzeit und Landau-Notation

Beispiel

- $7 \log(n) + n^3 = O(n^3)$ ist **richtig**.
- $7 \log(n)n^3 = O(n^3)$ ist **falsch**.
- $2^{n+O(1)} = O(2^n)$ ist **richtig**.
- $2^{O(n)} = O(2^n)$ ist **falsch** (siehe Übungen).

Mit der O -Notation lassen sich die wichtigsten deterministischen Zeitkomplexitätsklassen wie folgt charakterisieren:

LINTIME = DTIME($O(n)$) „Linearzeit“

P = DTIME($n^{O(1)}$) „Polynomialzeit“

E = DTIME($2^{O(n)}$) „Lineare Exponentialzeit“

EXP = DTIME($2^{n^{O(1)}}$) „Exponentialzeit“

- Wie wir gesehen haben, sind NTMs nicht mächtiger als DTMs, d.h. jede NTM kann von einer DTM simuliert werden.
- Die Frage, wieviel Zeit eine DTM zur Simulation einer NTM benötigt, ist eines der wichtigsten offenen Probleme der Informatik.
- Wegen $\text{NTIME}(t) \subseteq \text{DTIME}(2^{O(t)})$ erhöht sich die Laufzeit im schlimmsten Fall exponentiell.
- Insbesondere die Klasse NP enthält viele für die Praxis überaus wichtige Probleme, für die kein Polynomialzeitalgorithmus bekannt ist.
- Da jedoch nur Probleme in P als effizient lösbar angesehen werden, hat das so genannte **P-NP-Problem**, also die Frage, ob alle NP-Probleme effizient lösbar sind, eine immense praktische Bedeutung.

Die Polynomialzeitreduktion

Definition

- Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ ist auf $B \subseteq \Gamma^*$ **in Polynomialzeit reduzierbar** ($A \leq^P B$), falls eine Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ in FP existiert mit

$$\forall x \in \Sigma^* : x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

- Eine Sprache A heißt **\leq^P -hart** für eine Sprachklasse \mathcal{C} (kurz: **\mathcal{C} -hart** oder **\mathcal{C} -schwer**), falls gilt:

$$\forall L \in \mathcal{C} : L \leq^P A.$$

- Eine \mathcal{C} -harte Sprache A , die zu \mathcal{C} gehört, heißt **\mathcal{C} -vollständig**.
- **NPC** bezeichnet die Klasse aller NP-vollständigen Sprachen.

Lemma

- Aus $A \leq^P B$ folgt $A \leq B$.
- Die Reduktionsrelation \leq^P ist reflexiv und transitiv (s. Übungen).

Die Polynomialzeitreduktion

Satz

Die Klassen P und NP sind unter \leq^P abgeschlossen.

Beweis

- Sei $B \in P$ und gelte $A \leq^P B$ mittels einer Funktion $f \in FP$.
- Seien M und T DTMs mit $L(M) = B$ und $T(x) = f(x)$.
- Weiter seien p und q polynomielle Zeitschranken für M und T .
- Betrachte die DTM M' , die bei Eingabe x zuerst T simuliert, um $f(x)$ zu berechnen, und danach M bei Eingabe $f(x)$ simuliert.
- Dann gilt

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B \Leftrightarrow f(x) \in L(M) \Leftrightarrow x \in L(M').$$

- Also ist $L(M') = A$ und wegen

$$\text{time}_{M'}(x) \leq \text{time}_T(x) + \text{time}_M(f(x)) \leq q(|x|) + p(q(|x|))$$

ist M' polynomiell zeitbeschränkt und somit A in P. □

NP-Vollständigkeit

Satz

- 1 $A \leq^P B$ und A ist NP-hart $\Rightarrow B$ ist NP-hart.
- 2 $A \leq^P B$, A ist NP-hart und $B \in \text{NP}$ $\Rightarrow B \in \text{NPC}$.
- 3 $\text{NPC} \cap \text{P} \neq \emptyset \Rightarrow \text{P} = \text{NP}$.

Beweis

- 1 Da A NP-hart ist, ist jede NP-Sprache L auf A reduzierbar. Da zudem $A \leq^P B$ gilt und \leq^P transitiv ist, folgt $L \leq^P B$.
- 2 Klar, da B mit (1) NP-hart und nach Voraussetzung in NP ist.
- 3 Sei B eine NP-vollständige Sprache in P. Dann ist jede NP-Sprache A auf B reduzierbar und da P unter \leq^P abgeschlossen ist, folgt $A \in \text{P}$. \square

NP-Vollständigkeit

Satz

Folgende Sprache ist NP-vollständig:

$$L = \left\{ w\#x\#0^m \mid \begin{array}{l} w, x \in \{0, 1\}^* \text{ und } M_w \text{ ist eine NTM,} \\ \text{die } x \text{ in } \leq m \text{ Schritten akzeptiert} \end{array} \right\}$$

Beweis

- Zunächst ist klar, dass $L \in \text{NP}$ mittels folgender NTM M ist:
 M simuliert bei Eingabe $w\#x\#0^m$ die NTM M_w bei Eingabe x für höchstens m Schritte. Falls M_w in dieser Zeit akzeptiert, akzeptiert M ebenfalls, andernfalls verwirft M .
- Sei nun A eine beliebige NP-Sprache. Dann ist A in Polynomialzeit auf eine Sprache $B \subseteq \{0, 1\}^*$ in NP reduzierbar (siehe Übungen).
- Sei M_w eine durch ein Polynom p zeitbeschränkte NTM für B .
- Dann reduziert folgende FP-Funktion f die Sprache B auf L :

$$f : x \mapsto w\#x\#0^{p(|x|)}.$$

Platzkomplexität von Turingmaschinen

- Als nächstes definieren wir den Platzverbrauch von NTMs.
- Intuitiv ist dies die Anzahl aller während einer Rechnung benutzten Bandfelder.
- Wollen wir auch sublinearen Platz sinnvoll definieren, so dürfen wir hierbei das Eingabeband offensichtlich nicht berücksichtigen.
- Um sicherzustellen, dass eine NTM M das Eingabeband nicht als Speicher benutzt, verlangen wir, dass
 - M die Felder auf dem Eingabeband nicht verändert und
 - sich nicht mehr als ein Feld von der Eingabe entfernt.

Definition

Eine NTM M heißt **offline-NTM** (oder NTM mit **Eingabeband**), falls für jede von M bei Eingabe x erreichbare Konfiguration

$$K = (q, u_1, a_1, v_1, \dots, u_k, a_k, v_k)$$

gilt, dass $u_1 a_1 v_1$ ein Teilwort von $\sqcup x \sqcup$ ist.

Platzkomplexität von Turingmaschinen

Definition

- Der **Platzverbrauch** einer offline-NTM M bei Eingabe x ist definiert als

$$space_M(x) = \max \left\{ s \geq 1 \left| \begin{array}{l} \exists K = (q, u_1, a_1, v_1, \dots, u_k, a_k, v_k) \\ \text{mit } K_x \vdash^* K \text{ und } s = \sum_{i=2}^k |u_i a_i v_i| \end{array} \right. \right\}.$$

- Sei $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine monoton wachsende Funktion.
- M heißt **$s(n)$ -platzbeschränkt**, falls für alle Eingaben x gilt:

$$space_M(x) \leq s(|x|).$$

Platzkomplexitätsklassen

Wir fassen alle Sprachen, die in einer vorgegebenen Platzschranke $s(n)$ entscheidbar sind, in folgenden **Platzkomplexitätsklassen** zusammen.

Definition

- Die auf deterministischem Platz $s(n)$ entscheidbaren Sprachen bilden die Klasse

$$\text{DSPACE}(s(n)) = \{L(M) \mid M \text{ ist eine } s(n)\text{-platzb. offline-DTM}\}.$$

- Die auf nichtdeterministischem Platz $s(n)$ entscheidbaren Sprachen bilden die Klasse

$$\text{NSPACE}(s(n)) = \{L(M) \mid M \text{ ist eine } s(n)\text{-platzb. offline-NTM}\}.$$

Die wichtigsten Platzkomplexitätsklassen

- Die wichtigsten deterministischen Platzkomplexitätsklassen sind

$L = \text{DSPACE}(O(\log n))$ „Logarithmischer Platz“

$\text{LINSPACE} = \text{DSPACE}(O(n))$ „Linearer Platz“

$\text{PSPACE} = \text{DSPACE}(n^{O(1)})$ „Polynomieller Platz“

- Die nichtdeterministischen Klassen NL , NLINSPACE und NPSPACE sind analog definiert.
- Der Satz von Savitch besagt, dass

$$\text{NSPACE}(s(n)) \subseteq \text{DSPACE}(s^2(n))$$

ist (dies wird in der VL Komplexitätstheorie gezeigt).

Daher fallen die Klassen NPSPACE und PSPACE zusammen.

Elementare Beziehungen zwischen Komplexitätsklassen

Frage

Welche elementaren Beziehungen gelten zwischen den verschiedenen Zeit- und Platzklassen?

Satz

- Für jede Funktion $s(n) \geq \log n$ gilt

$$\text{DSPACE}(s) \subseteq \text{NSPACE}(s) \subseteq \text{DTIME}(2^{O(s)}).$$

- Für jede Funktion $t(n) \geq n + 2$ gilt

$$\text{DTIME}(t) \subseteq \text{NTIME}(t) \subseteq \text{DSPACE}(O(t)).$$

Korollar

Es gilt $L \subseteq NL \subseteq P \subseteq NP \subseteq PSPACE \subseteq EXP \subseteq EXPSPACE$.

Komplexität der Stufen der Chomsky-Hierarchie

$\text{REG} = \text{DSPACE}(O(1)) = \text{NSPACE}(O(1)) \not\subseteq L,$

$\text{DCFL} \not\subseteq \text{LINTIME},$

$\text{CFL} \not\subseteq \text{NLINTIME} \cap \text{DTIME}(O(n^3)) \not\subseteq P,$

$\text{DCSL} = \text{LINSPACE} \subseteq \text{CSL},$

$\text{CSL} = \text{NLINSPACE} \subseteq \text{PSPACE} \cap E,$

$\text{REC} = \bigcup_f \text{DSPACE}(f(n))$

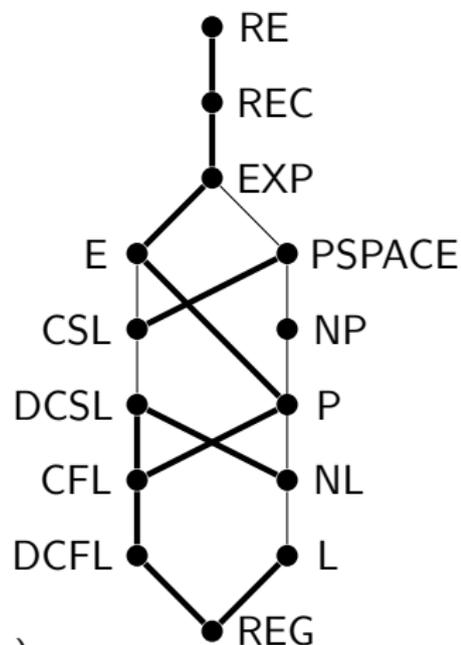
$= \bigcup_f \text{NSPACE}(f(n))$

$= \bigcup_f \text{DTIME}(f(n))$

$= \bigcup_f \text{NTIME}(f(n)),$

wobei f alle (oder äquivalent: alle berechenbaren)

Funktionen $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ durchläuft.



Aussagenlogische Formeln

- Die Menge der **booleschen** (oder **aussagenlogischen**) **Formeln** über den Variablen x_1, \dots, x_n , $n \geq 0$, ist induktiv wie folgt definiert:
 - Die Konstanten 0 und 1 sind boolesche Formeln.
 - Jede Variable x_i ist eine boolesche Formel.
 - Mit G und H sind auch die **Negation** $\neg G$, die **Konjunktion** $(G \wedge H)$ und die **Disjunktion** $(G \vee H)$ von G und H Formeln.
- Eine **Belegung** von x_1, \dots, x_n ist ein Wort $a = a_1 \dots a_n \in \{0, 1\}^n$.
- Der **Wert** $F(a)$ von F unter a ist induktiv wie folgt definiert:

F	0	1	x_i	$\neg G$	$(G \wedge H)$	$(G \vee H)$
$F(a)$	0	1	a_i	$1 - G(a)$	$G(a)H(a)$	$G(a) + H(a) - G(a)H(a)$

- Durch die Formel F wird also eine **n -stellige boolesche Funktion** $F : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ definiert, die wir ebenfalls mit F bezeichnen.

Aussagenlogische Formeln

Definition

- Zwei Formeln F und G heißen **logisch äquivalent**, wenn sie dieselbe boolesche Funktion berechnen.
- Eine Formel F heißt **erfüllbar**, falls es eine Belegung a mit $F(a) = 1$ gibt.
- Gilt dagegen für alle Belegungen a , dass $F(a) = 1$ ist, so heißt F **Tautologie**.

Aussagenlogische Formeln

Notation

Wir benutzen die **Implikation** $G \rightarrow H$ als Abkürzung für die Formel $\neg G \vee H$.

Beispiel (Erfüllbarkeitstest mittels Wahrheitstabelle)

Die Formel $((\neg x_1 \vee \neg x_2) \rightarrow (x_2 \wedge x_3))$ ist erfüllbar:

a	$(\neg x_1 \vee \neg x_2)$	$(x_2 \wedge x_3)$	$((\neg x_1 \vee \neg x_2) \rightarrow (x_2 \wedge x_3))$
000	1	0	0
001	1	0	0
010	1	0	0
011	1	1	1
100	1	0	0
101	1	0	0
110	0	0	1
111	0	1	1

Aussagenlogische Formeln

Präzedenzregeln zur Klammerersparnis

- Der Junktor \wedge bindet stärker als der Junktor \vee und dieser wiederum stärker als der Junktor \rightarrow .
- Formeln der Form $(x_1 \circ (x_2 \circ (x_3 \circ \dots \circ x_n) \dots))$, $\circ \in \{\wedge, \vee\}$ kürzen wir durch $(x_1 \circ \dots \circ x_n)$ ab.

Beispiel (Formel für die mehrstellige Entweder-Oder Funktion)

- Folgende Formel nimmt unter einer Belegung $a = a_1 \dots a_n$ genau dann den Wert 1 an, wenn $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ ist:

$$G(x_1, \dots, x_n) = (x_1 \vee \dots \vee x_n) \wedge \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(x_i \wedge x_j)$$

- D.h. es gilt genau dann $G(a) = 1$, wenn genau eine Variable x_i mit dem Wert $a_i = 1$ belegt ist.
- Diese Formel wird im Beweis des nächsten Satzes benötigt. ◀

Das aussagenlogische Erfüllbarkeitsproblem

Erfüllbarkeitsproblem für boolesche Formeln (*satisfiability*, SAT):

Gegeben: Eine boolesche Formel F .

Gefragt: Ist F erfüllbar?

Satz (Cook, Karp, Levin)

SAT ist NP-vollständig.

SAT ist NP-vollständig

Beweis von $\text{SAT} \in \text{NP}$

Es ist leicht zu sehen, dass $\text{SAT} \in \text{NP}$ ist:

Eine NTM kann bei Eingabe einer booleschen Formel F zunächst eine Belegung a nichtdeterministisch raten und dann in Polynomialzeit testen, ob $F(a) = 1$ ist (*guess and verify* Strategie). □

Beweis von SAT ist NP-hart

- Sei L eine beliebige NP-Sprache und sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0)$ eine durch ein Polynom p zeitbeschränkte k -NTM mit $L(M) = L$.
- Da sich eine $t(n)$ -zeitbeschränkte k -NTM in Zeit $t^2(n)$ durch eine 1-NTM simulieren lässt, können wir $k = 1$ annehmen.
- Unsere Aufgabe besteht nun darin, in Polynomialzeit zu einer gegebenen Eingabe $w = w_1 \dots w_n$ eine Formel F_w zu konstruieren, die genau dann erfüllbar ist, wenn $w \in L$ ist.
- O.B.d.A. sei $Z = \{q_0, \dots, q_m\}$, $E = \{q_m\}$ und $\Gamma = \{a_1, \dots, a_l\}$.
- Zudem sei $\delta(q_m, a) := \{(q_m, a, N)\}$ für alle $a \in \Gamma$.

Beweis von SAT ist NP-hart

Idee:

Konstruiere F_w so, dass F_w unter einer Belegung a genau dann wahr wird, wenn a eine akzeptierende Rechnung von $M(w)$ beschreibt.

- Wir bilden F_w über den Variablen

$$x_{t,q}, \quad \text{für } 0 \leq t \leq p(n), q \in Z,$$

$$y_{t,i}, \quad \text{für } 0 \leq t \leq p(n), -p(n) \leq i \leq p(n),$$

$$z_{t,i,a}, \quad \text{für } 0 \leq t \leq p(n), -p(n) \leq i \leq p(n), a \in \Gamma.$$

- Diese Variablen stehen für folgende Aussagen:

$x_{t,q}$: zum Zeitpunkt t befindet sich M im Zustand q ,

$y_{t,i}$: zur Zeit t besucht M das Feld mit der Nummer i ,

$z_{t,i,a}$: zur Zeit t steht das Zeichen a auf dem i -ten Feld.

- Konkret sei $F_w = R \wedge S_w \wedge \dot{U}_1 \wedge \dot{U}_2 \wedge E$.

Beweis von SAT ist NP-hart

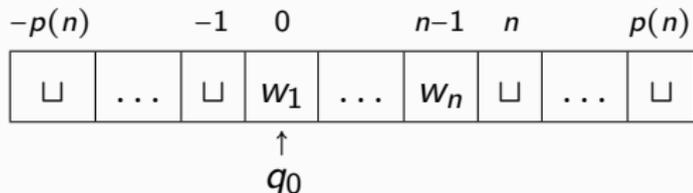
- Konkret sei $F_w = R \wedge S_w \wedge \ddot{U}_1 \wedge \ddot{U}_2 \wedge E$.
- Dabei stellt die Formel $R = \bigwedge_{t=0}^{p(n)} R_t$ (Randbedingungen) sicher, dass wir jeder erfüllenden Belegung eindeutig eine Folge von Konfigurationen $K_0, \dots, K_{p(n)}$ zuordnen können:

$$R_t = G(x_{t,q_0}, \dots, x_{t,q_m}) \wedge G(y_{t,-p(n)}, \dots, y_{t,p(n)}) \\ \wedge \bigwedge_{i=-p(n)}^{p(n)} G(z_{t,i,a_1}, \dots, z_{t,i,a_l}).$$

- Die Teilformel R_t sorgt also dafür, dass zum Zeitpunkt t
 - genau ein Zustand $q \in \{q_0, \dots, q_m\}$ eingenommen wird,
 - genau ein Bandfeld $i \in \{-p(n), \dots, p(n)\}$ besucht wird und
 - auf jedem Feld i genau ein Zeichen $a \in \Gamma$ steht.

Beweis von SAT ist NP-hart

- Die Formel S_w (wie Startbedingung) stellt sicher, dass zum Zeitpunkt 0 tatsächlich die Startkonfiguration vorliegt:



$$S_w = x_{0,q_0} \wedge y_{0,0} \wedge \bigwedge_{i=-p(n)}^{-1} z_{0,i,\sqcup} \wedge \bigwedge_{i=0}^{n-1} z_{0,i,w_{i+1}} \wedge \bigwedge_{i=n}^{p(n)} z_{0,i,\sqcup}$$

- Die Formel \ddot{U}_1 sorgt dafür, dass der Inhalt von nicht besuchten Feldern beim Übergang von K_t zu K_{t+1} unverändert bleibt:

$$\ddot{U}_1 = \bigwedge_{t=0}^{p(n)-1} \bigwedge_{i=-p(n)}^{p(n)} \bigwedge_{a \in \Gamma} (\neg y_{t,i} \wedge z_{t,i,a} \rightarrow z_{t+1,i,a})$$

Beweis von SAT ist NP-hart

- \ddot{U}_2 achtet darauf, dass sich bei jedem Übergang der Zustand, die Kopfposition und das gerade gelesene Zeichen gemäß einer Anweisung in δ verändern:

$$\ddot{U}_2 = \bigwedge_{t=0}^{p(n)-1} \bigwedge_{i=-p(n)}^{p(n)} \bigwedge_{a \in \Gamma} \bigwedge_{p \in Z} (x_{t,p} \wedge y_{t,i} \wedge z_{t,i,a} \rightarrow \bigvee_{(q,b,D) \in \delta(p,a)} x_{t+1,q} \wedge y_{t+1,i+D} \wedge z_{t+1,i,b}),$$

wobei

$$i + D = \begin{cases} i - 1, & D = L \\ i, & D = N \\ i + 1, & D = R \end{cases}$$

- Schließlich überprüft E , ob M zur Zeit $p(n)$ den Endzustand q_m erreicht hat:

$$E = x_{p(n),q_m}$$

Beweis von SAT ist NP-hart

- Da der Aufbau der Formel $f(w) = F_w$ einem einfachen Bildungsgesetz folgt und ihre Länge polynomiell in n ist, folgt $f \in \text{FP}$.
- Es ist klar, dass F_w im Fall $w \in L(M)$ erfüllbar ist, indem wir die Variablen von F_w gemäß einer akz. Rechnung von $M(w)$ belegen.
- Umgekehrt führt eine Belegung a mit $F_w(a) = 1$ wegen $R(a) = 1$ eindeutig auf eine Konfigurationenfolge $K_0, \dots, K_{p(n)}$, so dass gilt:
 - K_0 ist Startkonfiguration von $M(w)$ (wegen $S_w(a) = 1$),
 - $K_i \vdash K_{i+1}$ für $i = 0, \dots, p(n) - 1$ (wegen $\ddot{U}_1(a) = \ddot{U}_2(a) = 1$),
 - M nimmt spätestens bei Erreichen der Konfiguration $K_{p(n)}$ den Endzustand q_m an (wegen $E(a) = 1$).
- Also gilt für alle $w \in \Sigma^*$ die Äquivalenz

$$w \in L(M) \Leftrightarrow F_w \in \text{SAT},$$

d.h. die FP-Funktion $f : w \mapsto F_w$ reduziert $L(M)$ auf SAT. □

Boolesche Schaltkreise

Als nächstes betrachten wir das Erfüllbarkeitsproblem für boolesche Schaltkreise.

Definition

- Ein **boolescher Schaltkreis** über den Variablen x_1, \dots, x_n ist eine Folge $s = (g_1, \dots, g_m)$ von **Gattern**

$$g_l \in \{0, 1, x_1, \dots, x_n, (\neg, j), (\wedge, j, k), (\vee, j, k)\} \text{ mit } 1 \leq j, k < l.$$

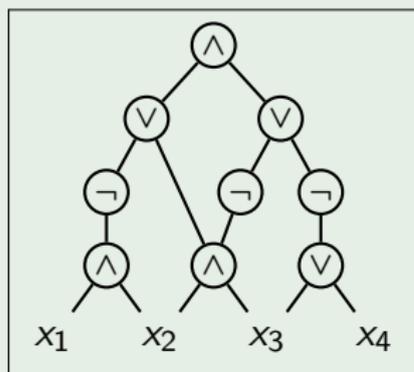
- Die am Gatter g_l berechnete n -stellige boolesche Funktion ist induktiv wie folgt definiert:

g_l		0	1	x_i	(\neg, j)	(\wedge, j, k)	(\vee, j, k)
$g_l(a)$		0	1	a_i	$1 - g_j(a)$	$g_j(a)g_k(a)$	$g_j(a) + g_k(a) - g_j(a)g_k(a)$

- s berechnet die boolesche Funktion $s(a) = g_m(a)$.
- s heißt **erfüllbar**, wenn eine Eingabe $a \in \{0, 1\}^n$ mit $s(a) = 1$ ex.

Boolesche Schaltkreise

Beispiel



Graphische Darstellung
des Schaltkreises

$s = (x_1, x_2, x_3, x_4, (\wedge, 1, 2),$
 $(\wedge, 2, 3), (v, 3, 4), (\neg, 5),$
 $(\neg, 6), (\neg, 7), (v, 6, 8),$
 $(v, 9, 10), (\wedge, 11, 12)).$

Bemerkung

- Die Anzahl der Eingänge eines Gatters g wird als **Fanin** von g bezeichnet,
- die Anzahl der Ausgänge von g (also die Anzahl der Gatter, die g als Eingabe benutzen) als **Fanout**.
- Boolesche Formeln entsprechen also den booleschen Schaltkreisen mit (maximalem) Fanout 1 und umgekehrt.
- Eine boolesche Formel F kann somit leicht in einen äquivalenten Schaltkreis s mit $s(a) = F(a)$ für alle Belegungen a transformiert werden.

Das Erfüllbarkeitsproblem für boolesche Schaltkreise

Erfüllbarkeitsproblem für boolesche Schaltkreise (CIRSAT):

Gegeben: Ein boolescher Schaltkreis s .

Gefragt: Ist s erfüllbar?

Satz

CIRSAT ist NP-vollständig.

Beweis

Klar, da $SAT \leq^P CIRSAT$ und $CIRSAT \in NP$ gilt. □

Bemerkung

- Da SAT NP-vollständig ist, ist CIRSAT auf SAT reduzierbar.
- Dies bedeutet jedoch nicht, dass sich jeder Schaltkreis in Polynomialzeit in eine logisch äquivalente Formel überführen lässt, sondern nur in eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel.
- CIRSAT ist sogar auf eine spezielle SAT-Variante reduzierbar.

Formeln in konjunktiver Normalform (KNF)

- Ein **Literal** ist eine Variable x_i oder eine negierte Variable $\neg x_i$, die wir auch kurz mit \bar{x}_i bezeichnen.
- Eine **Klausel** ist eine Disjunktion $C = \bigvee_{j=1}^k l_j$ von Literalen l_1, \dots, l_k .
- Hierbei ist auch $k = 0$ zulässig, d.h. die **leere Klausel** repräsentiert die Konstante 0 und wird üblicherweise mit \square bezeichnet.
- Eine boolesche Formel F ist in **konjunktiver Normalform** (kurz **KNF**), falls $F = \bigwedge_{j=1}^m C_j$ eine Konjunktion von Klauseln C_1, \dots, C_m ist.
- Auch hier ist $m = 0$ zulässig, wobei die **leere Konjunktion** die Konstante 1 repräsentiert.
- Enthält jede Klausel höchstens k Literale, so heißt F in **k -KNF**.
- Klauseln werden oft als Menge $C = \{l_1, \dots, l_k\}$ ihrer Literale und KNF-Formeln als Menge $F = \{C_1, \dots, C_m\}$ ihrer Klauseln dargestellt.
- Enthält F die leere Klausel, so ist F unerfüllbar.
- Dagegen ist die leere Formel $F = \emptyset$ eine Tautologie.

Erfüllbarkeitsprobleme für Formeln in KNF

Erfüllbarkeitsproblem für k -KNF Formeln (k -SAT):

Gegeben: Eine boolesche Formel F in k -KNF.

Gefragt: Ist F erfüllbar?

Not-All-Equal-SAT (NAESAT):

Gegeben: Eine Formel F in 3-KNF.

Gefragt: Hat F eine (erfüllende) Belegung, unter der in keiner Klausel alle Literale denselben Wahrheitswert haben?

Beispiel

- Die 3-KNF Formel $F = (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)$ ist alternativ durch folgende Klauselmengen darstellbar:

$$F = \{ \{x_1, \bar{x}_2\}, \{\bar{x}_1, x_3\}, \{x_2, \bar{x}_3, x_4\} \}$$

- Offenbar ist $F(1111) = 1$, d.h. $F \in 3\text{-SAT}$. Zudem gilt $F \in \text{NAESAT}$.

Komplexität von Erfüllbarkeitsproblemen

Satz

3-SAT ist NP-vollständig.

3-SAT ist NP-vollständig

Reduktion von CIRSAT auf 3-SAT

- Wir transformieren einen Schaltkreis $s = (g_1, \dots, g_m)$ mit n Eingängen in eine 3-KNF Formel F_s über den Variablen $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$, die die Klausel $\{y_m\}$ und für jedes Gatter g_i die Klauseln folgender Formel F_i enthält:

Gatter g_i	Semantik von F_i	Klauseln von F_i
0	$y_i = 0$	$\{\bar{y}_i\}$
1	$y_i = 1$	$\{y_i\}$
x_j	$y_i = x_j$	$\{\bar{y}_i, x_j\}, \{\bar{x}_j, y_i\}$
(\neg, j)	$y_i = \bar{y}_j$	$\{\bar{y}_i, \bar{y}_j\}, \{y_j, y_i\}$
(\wedge, j, k)	$y_i = y_j \wedge y_k$	$\{\bar{y}_i, y_j\}, \{\bar{y}_i, y_k\}, \{\bar{y}_j, \bar{y}_k, y_i\}$
(\vee, j, k)	$y_i = y_j \vee y_k$	$\{\bar{y}_j, y_i\}, \{\bar{y}_k, y_i\}, \{\bar{y}_i, y_j, y_k\}$

3-SAT ist NP-vollständig

Reduktion von CIRSAT auf 3-SAT

- Nun ist leicht zu sehen, dass für alle $a \in \{0, 1\}^n$ folgende Äquivalenz gilt:
$$s(a) = 1 \Leftrightarrow \exists b \in \{0, 1\}^m : F_s(ab) = 1.$$
- Ist nämlich $a \in \{0, 1\}^n$ eine Eingabe mit $s(a) = 1$. Dann erhalten wir mit
$$b_i = g_i(a) \text{ für } i = 1, \dots, m$$
eine erfüllende Belegung $ab_1 \dots b_m$ für F_s .
- Ist umgekehrt $ab_1 \dots b_m$ eine erfüllende Belegung für F_s , so muss
 - $b_m = 1$ sein, da $\{y_m\}$ eine Klausel in F_s ist, und
 - durch Induktion über $i = 1, \dots, m$ folgt

$$g_i(a) = b_i,$$

d.h. insbesondere folgt $s(a) = g_m(a) = b_m = 1$.

3-SAT ist NP-vollständig

Reduktion von CIRSAT auf 3-SAT

- Nun ist leicht zu sehen, dass für alle $a \in \{0, 1\}^n$ folgende Äquivalenz gilt:

$$s(a) = 1 \Leftrightarrow \exists b \in \{0, 1\}^m : F_s(ab) = 1.$$

- Dies bedeutet, dass der Schaltkreis s und die 3-KNF-Formel F_s erfüllbarkeitsäquivalent sind, d.h.

$$s \in \text{CIRSAT} \Leftrightarrow F_s \in \text{3-SAT}.$$

- Zudem ist leicht zu sehen, dass die Reduktionsfunktion $s \mapsto F_s$ in FP berechenbar ist, womit $\text{CIRSAT} \leq^P \text{3-SAT}$ folgt. □

Das Wortproblem für NFAs

- Als nächstes zeigen wir, dass das Wortproblem für NFAs effizient entscheidbar ist.
- Dagegen wird sich das Äquivalenzproblem für NFAs als schwer lösbar (genauer: co-NP-hart) herausstellen.

Satz

Das Wortproblem für NFAs,

$$\text{WP}_{\text{NFA}} = \{N\#x \mid N \text{ ist ein NFA und } x \in L(N)\},$$

ist in P entscheidbar.

P-Algorithmus für WP_{NFA}

- 1 **Input:** Ein NFA $N = (Z, \Sigma, \delta, Q_0, E)$ und ein Wort $x = x_1 \dots x_n$
- 2 $Q := Q_0$
- 3 **for** $i := 1$ **to** n **do**
- 4 $Q := \bigcup_{q \in Q} \delta(q, x_i)$
- 5 **if** $Q \cap E \neq \emptyset$ **then accept else reject**

Das Wortproblem für NFAs ist in P entscheidbar

Satz

Das Wortproblem für NFAs,

$$WP_{\text{NFA}} = \{N\#x \mid N \text{ ist ein NFA und } x \in L(N)\},$$

ist in P entscheidbar.

P-Algorithmus für WP_{NFA}

- 1 **Input:** Ein NFA $N = (Z, \Sigma, \delta, Q_0, E)$ und ein Wort $x = x_1 \dots x_n$
- 2 $Q := Q_0$
- 3 **for** $i := 1$ **to** n **do**
- 4 $Q := \bigcup_{q \in Q} \delta(q, x_i)$
- 5 **if** $Q \cap E \neq \emptyset$ **then accept else reject**

Es ist klar, dass dieser Algorithmus korrekt arbeitet und auch in eine polynomiell zeitbeschränkte DTM für die Sprache WP_{NFA} transformiert werden kann.

Das Leerheitsproblem und das Schnittproblem für NFAs

Ganz ähnlich folgt auch, dass das Leerheits- und das Schnittproblem für NFAs in Polynomialzeit lösbar sind (siehe Übungen).

Korollar

Das Leerheitsproblem für NFAs,

$$LP_{\text{NFA}} = \{N \mid N \text{ ist ein NFA und } L(N) = \emptyset\}$$

und das Schnittproblem für NFAs,

$$SP_{\text{NFA}} = \{N_1 \# N_2 \mid N_1 \text{ und } N_2 \text{ sind NFAs mit } L(N_1) \cap L(N_2) \neq \emptyset\}$$

sind in P lösbar.

Entscheidungsprobleme für reguläre Ausdrücke

Korollar

Das Wort-, das Leerheits- und das Schnittproblem für reguläre Ausdrücke sind in P entscheidbar.

Beweis

- Ein regulärer Ausdruck α lässt sich in Polynomialzeit in einen äquivalenten NFA N_α transformieren (siehe Übungen).
- Daher gilt $WP_{RA} \leq^P WP_{NFA}$ mittels $f : (\alpha \# x) \mapsto (N_\alpha \# x)$.
- Da nach vorigem Satz $WP_{NFA} \in P$ ist, und da P unter \leq^P abgeschlossen ist, folgt $WP_{RA} \in P$.
- Ähnlich zeigt man $LP_{RA} \leq^P LP_{NFA}$ und $SP_{RA} \leq^P SP_{NFA}$, was die Zugehörigkeit von LP_{RA} und SP_{RA} zu P impliziert. □

Dagegen sind das Äquivalenz- und das Inklusionsproblem für reguläre Ausdrücke co-NP-hart. Dies gilt sogar für **sternfreie** reguläre Ausdrücke (kurz SFRAs), also für reguläre Ausdrücke, die keinen Stern enthalten.

Entscheidungsprobleme für reguläre Sprachen

Die Tabelle gibt die Komplexitäten der wichtigsten Entscheidungsprobleme für durch DFAs, NFAs oder (sternfreie) reguläre Ausdrücke gegebene reguläre Sprachen an.

	Wort- problem $x \in L?$	Leerheits- problem $L = \emptyset?$	Schnitt- problem $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset?$	Äquivalenz- problem $L_1 = L_2?$	Inklusions- problem $L_1 \subseteq L_2$
DFA	P	P	P	P	P
SFRA	P	P	P	co-NP-vollständig	
RA	P	P	P	PSPACE-vollständig	
NFA	P	P	P	PSPACE-vollständig	

Als nächstes zeigen wir, dass die Probleme ÄP_{SFRA} und IP_{SFRA} co-NP-vollständig sind.

Das Äquivalenzproblem für sternfreie reguläre Ausdrücke

Lemma

Folgende Sprache ist NP-vollständig:

$$SF = \{\alpha \# 0^n \mid \alpha \text{ ist ein SFRA über } \{0, 1\} \text{ mit } L(\alpha) \neq \{0, 1\}^n\}.$$

Beweis

- Wir zeigen zuerst $SF \in NP$.
- Anschließend reduzieren wir 3-SAT auf SF.

Das Äquivalenzproblem für sternfreie reguläre Ausdrücke

- Sei α ein sternfreier regulärer Ausdruck der Länge m .
- Es ist leicht zu zeigen (durch Induktion über den Aufbau von α), dass $L(\alpha)$ nur Wörter der Länge $\leq m$ enthält.
- D.h. es gilt $L(\alpha) \subseteq \{0, 1\}^{\leq m}$, wobei $\Sigma^{\leq m} = \bigcup_{i=0}^m \Sigma^i$ ist.
- Daher akzeptiert folgender NP-Algorithmus die Sprache $SF = \{\alpha \# 0^n \mid \alpha \text{ ist SFRA über } \{0, 1\} \text{ mit } L(\alpha) \neq \{0, 1\}^n\}$.

NP-Algorithmus für SF

- 1 **Input:** SFRA α über $\{0, 1\}$ und eine unär kodierte Zahl n
- 2 **guess** $x \in \{0, 1\}^n$
- 3 **if** $x \notin L(\alpha)$ **then accept**
- 4 $m := |\alpha|$
- 5 **guess** $y \in \{0, 1\}^{\leq m}$
- 6 **if** $y \in L(\alpha) - \{0, 1\}^n$ **then accept else reject**

Das Äquivalenzproblem für sternfreie reguläre Ausdrücke

Reduktion von 3-SAT auf SF

- Sei $F = \{C_1, \dots, C_m\}$ eine 3-KNF Formel.
- Betrachte den SFRA $\alpha_F = (\alpha_1 | \dots | \alpha_m)$ mit $\alpha_j = \beta_{j1} \dots \beta_{jn}$ und

$$\beta_{ji} = \begin{cases} 0, & x_i \in C_j, \\ 1, & \bar{x}_i \in C_j, \\ (0|1), & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Dann ist $L(\alpha_j) = \{a \in \{0, 1\}^n \mid C_j(a) = 0\}$ und daher folgt

$$\begin{aligned} F \in 3\text{-SAT} &\Leftrightarrow \exists a \in \{0, 1\}^n : F(a) = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists a \in \{0, 1\}^n \forall j = 1, \dots, m : C_j(a) = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists a \in \{0, 1\}^n \forall j = 1, \dots, m : a \notin L(\alpha_j) \\ &\Leftrightarrow \exists a \in \{0, 1\}^n : a \notin L(\alpha_F) \\ &\Leftrightarrow L(\alpha_F) \neq \{0, 1\}^n. \end{aligned}$$

Das Äquivalenzproblem für sternfreie reguläre Ausdrücke

Korollar

Das Äquivalenzproblem für sternfreie reguläre Ausdrücke,

$$\text{ÄP}_{\text{SFRA}} = \{\alpha \# \beta \mid \alpha, \beta \text{ sind SFRA's mit } L(\alpha) = L(\beta)\},$$

ist co-NP-vollständig.

Beweis

- Wir zeigen, dass das Inäquivalenzproblem für SFRA's NP-vollständig ist.
- Die Zugehörigkeit zu NP liefert folgender Algorithmus:

```
1 Input: SFRA's  $\alpha$  und  $\beta$ 
2    $m := \max\{|\alpha|, |\beta|\}$ 
3   guess  $x \in \{0, 1\}^{\leq m}$ 
4   if  $x \in L(\alpha) \Delta L(\beta)$  then accept else reject
```

- Zudem lässt sich SF leicht auf dieses Problem reduzieren:

$$\alpha \# 0^n \mapsto \alpha \# \underbrace{(0|1) \dots (0|1)}_{n\text{-mal}}.$$

Notation – ungerichtete Graphen

- Ein (**ungerichteter**) **Graph** ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei
 - V - eine endliche Menge von **Knoten/Ecken** und
 - E - die Menge der **Kanten** ist.

Hierbei gilt

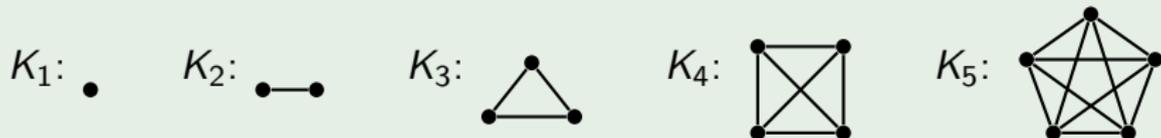
$$E \subseteq \binom{V}{2} := \{\{u, v\} \subseteq V \mid u \neq v\}.$$

- Die **Knotenzahl** von G ist $n(G) = \|V\|$.
- Die **Kantenzahl** von G ist $m(G) = \|E\|$.
- Die **Nachbarschaft** von $v \in V$ ist $N_G(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}$ und die Nachbarschaft von $U \subseteq V$ ist $N_G(U) = \bigcup_{u \in U} N_G(u)$.
- Der **Grad** von $v \in V$ ist $\deg_G(v) = \|N_G(v)\|$.
- Der **Minimalgrad** von G ist $\delta(G) := \min_{v \in V} \deg_G(v)$ und
- der **Maximalgrad** von G ist $\Delta(G) := \max_{v \in V} \deg_G(v)$.

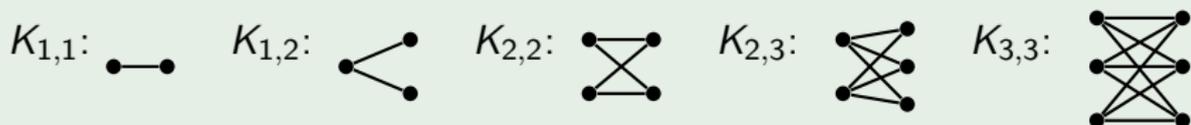
Falls G aus dem Kontext ersichtlich ist, schreiben wir auch einfach n , m , $N(v)$, $\deg(v)$, δ usw.

Beispiel

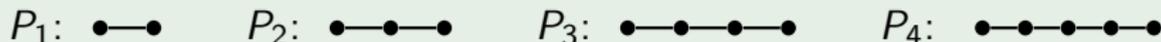
- Der **vollständige Graph** (V, E) mit $\|V\| = n$ und $E = \binom{V}{2}$ wird mit K_n und der **leere Graph** (V, \emptyset) wird mit E_n bezeichnet.



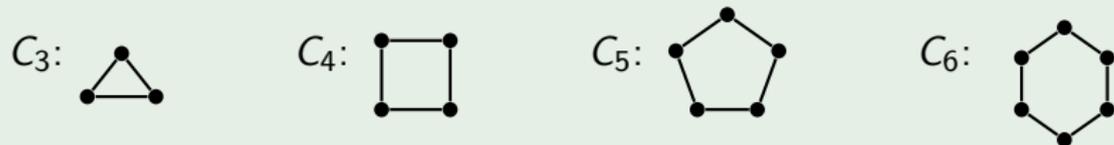
- Der **vollständige bipartite Graph** (A, B, E) auf $a + b$ Knoten, d.h. $A \cap B = \emptyset$, $\|A\| = a$, $\|B\| = b$ und $E = \{\{u, v\} \mid u \in A, v \in B\}$ wird mit $K_{a,b}$ bezeichnet.



- Der **Pfad der Länge m** wird mit P_m bezeichnet.



- Der **Kreis der Länge n** wird mit C_n bezeichnet.



Notation – ungerichtete Graphen (Fortsetzung)

- Ein Graph $H = (V', E')$ heißt **Sub-/Teil-/Untergraph** von $G = (V, E)$, falls $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$ ist.
- Ein **Weg** ist eine Folge von Knoten v_0, \dots, v_j mit $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für $i = 0, \dots, j - 1$.

Ein Weg heißt **einfach** oder **Pfad**, falls alle durchlaufenen Knoten verschieden sind.

Die **Länge** des Weges ist die Anzahl der Kanten, also j .

Ein Weg v_0, \dots, v_j heißt auch **v_0 - v_j -Weg**.

- Ein **Zyklus** ist ein u - v -Weg der Länge $j \geq 2$ mit $u = v$.
- Ein **Kreis** ist ein Zyklus $v_0, v_1, \dots, v_{j-1}, v_0$ der Länge $j \geq 3$, für den v_0, v_1, \dots, v_{j-1} paarweise verschieden sind.

Cliquen, Stabilität und Kantenüberdeckungen

- Eine Knotenmenge $U \subseteq V$ heißt **Clique**, wenn jede Kante mit beiden Endpunkten in U in E ist, d.h. es gilt $\binom{U}{2} \subseteq E$.

Die **Cliquenzahl** ist

$$\omega(G) := \max\{\|U\| \mid U \text{ ist Clique in } G\}.$$

- Eine Knotenmenge $U \subseteq V$ heißt **stabil**, wenn keine Kante in G beide Endpunkte in U hat, d.h. es gilt $E \cap \binom{U}{2} = \emptyset$.

Die **Stabilitätszahl** ist

$$\alpha(G) := \max\{\|U\| \mid U \text{ ist stabile Menge in } G\}.$$

Notation – ungerichtete Graphen (Fortsetzung)

- Eine Knotenmenge $U \subseteq V$ heißt **Kantenüberdeckung** (engl. *vertex cover*), wenn jede Kante $e \in E$ mindestens einen Endpunkt in U hat, d.h. es gilt $e \cap U \neq \emptyset$ für alle Kanten $e \in E$.

Die **Überdeckungszahl** ist

$$\beta(G) = \min\{\|U\| \mid U \text{ ist eine Kantenüberdeckung in } G\}.$$

- Eine Abbildung $f: V \rightarrow \mathbb{N}$ heißt **Färbung** von G , wenn $f(u) \neq f(v)$ für alle $\{u, v\} \in E$ gilt.

G heißt **k -färbbar**, falls eine Färbung $f: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ existiert.

Die **chromatische Zahl** ist

$$\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid G \text{ ist } k\text{-färbbar}\}.$$

Fundamentale Graphprobleme

Für einen gegebenen Graphen G und eine gegebene Zahl $k \geq 1$ betrachten wir die folgenden Fragestellungen:

CLIQUE:

Gefragt: Hat G eine Clique der Größe k ?

INDEPENDENT SET (IS):

Gefragt: Hat G eine stabile Menge der Größe k ?

VERTEX COVER (VC):

Gefragt: Hat G eine Kantenüberdeckung der Größe k ?

k -FÄRBBARKEIT (k -COLORING):

Gefragt: Ist G k -färbbar?

Fundamentale Graphprobleme

Satz

CLIQUE, IS, VC und 3-COLORING sind NP-vollständig.

IS ist NP-vollständig

Reduktion von 3-SAT auf IS

- Sei $F = \{C_1, \dots, C_m\}$ mit $C_j = \{l_{j,1}, \dots, l_{j,k_j}\}$ für $j = 1, \dots, m$ eine 3-KNF-Formel über den Variablen x_1, \dots, x_n .
- Betrachte den Graphen $G = (V, E)$ mit
$$V = \{v_{ji} \mid 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq k_j\}$$
 und
$$E = \{\{v_{ji}, v_{j'i'}\} \in \binom{V}{2} \mid j = j' \text{ oder } l_{ji} = \bar{l}_{j'i'} \text{ oder } l_{j'i'} = \bar{l}_{ji}\}.$$
- Nun gilt
$$F \in 3\text{-SAT} \Leftrightarrow \text{es gibt eine Belegung, die in jeder Klausel } C_j \text{ (mindestens) ein Literal } l_{j,i_j} \text{ wahr macht}$$
 - \Leftrightarrow es gibt m Literale $l_{1,i_1}, \dots, l_{m,i_m}$, die paarweise nicht komplementär sind (d.h. $l_{ji} \neq \bar{l}_{j'i'}$ für $j \neq j'$)
 - \Leftrightarrow es gibt m Knoten $v_{1,i_1}, \dots, v_{m,i_m}$, die nicht durch Kanten verbunden sind
 - $\Leftrightarrow G$ besitzt eine stabile Menge von m Knoten. □

CLIQUE ist NP-vollständig

Korollar

CLIQUE ist NP-vollständig.

Beweis

- Es ist leicht zu sehen, dass jede Clique in einem Graphen $G = (V, E)$ eine stabile Menge in dem zu G komplementären Graphen $\bar{G} = (V, \bar{E})$ mit $\bar{E} = \binom{V}{2} \setminus E$ ist und umgekehrt.
- Daher lässt sich IS mittels

$$f : (G, k) \mapsto (\bar{G}, k)$$

auf CLIQUE reduzieren. □

VC ist NP-vollständig

Korollar

VC ist NP-vollständig.

Beweis

- Offensichtlich ist eine Menge I genau dann stabil, wenn ihr Komplement $V \setminus I$ eine Kantenüberdeckung ist.
- Daher lässt sich IS mittels

$$f : (G, k) \mapsto (G, n(G) - k)$$

auf VC reduzieren.



Eine Variante von 3-SAT

Not-All-Equal-SAT (NAESAT):

Gegeben: Eine Formel F in 3-KNF.

Gefragt: Hat F eine (erfüllende) Belegung, unter der in keiner Klausel alle Literale denselben Wahrheitswert haben?

Satz

NAESAT ist NP-vollständig.

Beweis

- $\text{NAESAT} \in \text{NP}$ ist klar.
- Wir reduzieren CIRSAT auf NAESAT , indem wir die Reduktion von CIRSAT auf 3-SAT geeignet anpassen.

NAESAT ist NP-vollständig

Reduktion von CIRSAT auf NAESAT

- Wir reduzieren CIRSAT auf NAESAT, indem wir die Reduktion von CIRSAT auf 3-SAT geeignet anpassen:

Gatter g_i	Klauseln von F'_i
0	$\{\bar{y}_i, z\}$
1	$\{y_i, z\}$
x_j	$\{\bar{y}_i, x_j, z\}, \{\bar{x}_j, y_i, z\}$
(\neg, j)	$\{\bar{y}_i, \bar{y}_j, z\}, \{y_j, y_i, z\}$
(\wedge, j, k)	$\{\bar{y}_i, y_j, z\}, \{\bar{y}_i, y_k, z\}, \{\bar{y}_j, \bar{y}_k, y_i\}$
(\vee, j, k)	$\{\bar{y}_j, y_i, z\}, \{\bar{y}_k, y_i, z\}, \{\bar{y}_i, y_j, y_k\}$

- Es ist leicht zu sehen, dass alle **Dreierklauseln** unter jeder erfüllenden Belegung von F_S bereits beide Wahrheitswerte annehmen.
- Zu den übrigen Klauseln können wir eine neue Variable z hinzufügen.

NAESAT ist NP-vollständig

Reduktion von CIRSAT auf NAESAT

- Sei also $F'_s(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, z)$ die Formel, die die Klausel $\{y_m, z\}$ und für jedes Gatter g_i die Klauseln folgender Formel F'_i enthält:

Gatter g_i	Klauseln von F'_i
0	$\{\bar{y}_i, z\}$
1	$\{y_i, z\}$
x_j	$\{\bar{y}_i, x_j, z\}, \{\bar{x}_j, y_i, z\}$
(\neg, j)	$\{\bar{y}_i, \bar{y}_j, z\}, \{y_j, y_i, z\}$
(\wedge, j, k)	$\{\bar{y}_i, y_j, z\}, \{\bar{y}_i, y_k, z\}, \{\bar{y}_j, \bar{y}_k, y_i\}$
(\vee, j, k)	$\{\bar{y}_j, y_i, z\}, \{\bar{y}_k, y_i, z\}, \{\bar{y}_i, y_j, y_k\}$

- F'_s entsteht also aus F_s , indem wir zu jeder Klausel mit ≤ 2 Literalen die neue Variable z hinzufügen.

NAESAT ist NP-vollständig

Reduktion von CIRSAT auf NAESAT

- Da die Funktion $f : s \mapsto F'_s$ offenbar in FP berechenbar ist, bleibt nur noch die Korrektheit von f zu zeigen:

$$s \in \text{CIRSAT} \Leftrightarrow F'_s \in \text{NAESAT}.$$

- Ist $s \in \text{CIRSAT}$, so existiert eine Belegung ab mit $F_s(ab) = 1$.
- Folglich enthalten unter dieser Belegung alle Klauseln von F_s (und damit auch alle Klauseln von F'_s) ein wahres Literal.
- Tatsächlich wird unter ab in jeder Dreierklausel von F_s (und damit in jeder Klausel von F'_s , die z nicht enthält) auch ein Literal falsch, da ab neben jeder Dreierklausel der Form
 - $\{\bar{y}_i, y_j, y_k\}$ die Klauseln $\{\bar{y}_j, y_i\}$ und $\{\bar{y}_k, y_i\}$ und neben
 - $\{y_i, \bar{y}_j, \bar{y}_k\}$ die Klauseln $\{y_j, \bar{y}_i\}$ und $\{y_k, \bar{y}_j\}$ erfüllt.
- Setzen wir also $z = 0$, so wird in jeder Klausel von F'_s mindestens ein Literal wahr und mindestens ein Literal falsch.

NAESAT ist NP-vollständig

Reduktion von CIRSAT auf NAESAT

- Für die umgekehrte Implikation sei nun $F'_s \in \text{NAESAT}$ angenommen.
- Dann existiert eine Belegung $abc \in \{0, 1\}^{n+m+1}$ für

$$F'_s(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, z),$$

unter der in jeder Klausel ein wahres und ein falsches Literal vorkommen.

- Da dies auch unter der komplementären Belegung \overline{abc} der Fall ist, können wir $c = 0$ annehmen.
- Dann erfüllt aber die Belegung ab die Formel F_s .
- Also ist $s(a) = 1$ und damit $s \in \text{CIRSAT}$. □

3-COLORING ist NP-vollständig

Reduktion von NAESAT auf 3-COLORING

- Sei eine 3-KNF-Formel $F = \{C_1, \dots, C_m\}$ über den Variablen x_1, \dots, x_n mit Klauseln

$$C_j = \{l_{j,1}, \dots, l_{j,k_j}\}, \quad k_j \leq 3$$

gegeben.

- Wir können annehmen, dass F keine Einerklauseln enthält.
- Wir konstruieren einen Graphen $G_F = (V, E)$, der genau dann 3-färbbar ist, wenn $F \in \text{NAESAT}$ ist.
- Wir setzen

$$V = \{s, x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\} \cup \{v_{jk} \mid 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq k_j\}$$

und

$$E = \left\{ \{s, x_i\}, \{s, \bar{x}_i\}, \{x_i, \bar{x}_i\} \mid 1 \leq i \leq n \right\} \cup \left\{ \{s, v_{jk}\} \mid k_j = 2 \right\} \cup \\ \left\{ \{v_{jk}, v_{jl}\} \mid k \neq l \right\} \cup \left\{ \{v_{jk}, x_i\} \mid l_{jk} = \bar{x}_i \right\} \cup \left\{ \{v_{jk}, \bar{x}_i\} \mid l_{jk} = x_i \right\}.$$

3-COLORING ist NP-vollständig

Reduktion von NAESAT auf 3-COLORING

- Wir setzen

$$V = \{s\} \cup \{x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\} \cup \{v_{jk} \mid 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq k_j\},$$

und

$$E = \left\{ \{s, x_i\}, \{s, \bar{x}_i\}, \{x_i, \bar{x}_i\} \mid 1 \leq i \leq n \right\} \cup \left\{ \{s, v_{jk}\} \mid k_j = 2 \right\} \cup \\ \left\{ \{v_{jk}, v_{jl}\} \mid k \neq l \right\} \cup \left\{ \{v_{jk}, x_i\} \mid l_{jk} = \bar{x}_i \right\} \cup \left\{ \{v_{jk}, \bar{x}_i\} \mid l_{jk} = x_i \right\}.$$

- Sei $a = a_1 \dots a_n$ eine Belegung für F , unter der in jeder Klausel $C_j = \{l_{j1}, \dots, l_{jk_j}\}$ ein Literal wahr und eines falsch wird.
- Wir können annehmen, dass $l_{j1}(a) = 0$ und $l_{j2}(a) = 1$ ist.
- Dann lässt sich G_F wie folgt mit den 3 Farben 0, 1, 2 färben:

Knoten v	s	x_i	\bar{x}_i	v_{j1}	v_{j2}	v_{j3} (falls $k_j = 3$)
Farbe $c(v)$	2	a_i	\bar{a}_i	0	1	2

3-COLORING ist NP-vollständig

Reduktion von NAESAT auf 3-COLORING

- Sei nun umgekehrt $c : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ eine 3-Färbung von G_F .
- Dann können wir annehmen, dass $c(v) = 2$ ist.
- Also gilt für $i = 1, \dots, n$, dass $\{c(x_i), c(\bar{x}_i)\} = \{0, 1\}$ ist.
- Zudem müssen die Knoten $v_{j_1}, \dots, v_{j_{k_j}}$ im Fall $k_j = 2$ mit 0 und 1 und im Fall $k_j = 3$ mit allen drei Farben 0, 1 und 2 gefärbt sein.
- Wir können annehmen, dass $c(v_{j_1}) = 0$ und $c(v_{j_2}) = 1$ ist.
- Wegen $\{v_{jk}, \bar{l}_{jk}\} \in E$ muss $c(v_{jk}) \neq c(\bar{l}_{jk})$ für $k = 1, \dots, k_j$ und daher $c(v_{jk}) = c(l_{jk})$ für $k = 1, 2$ gelten.
- Also macht die Belegung $a = c(x_1) \dots c(x_n)$ die Literale l_{j_1} falsch und l_{j_2} wahr.
- Insgesamt gilt also

$$F \in \text{NAESAT} \Leftrightarrow G_F \in \text{3-COLORING.}$$

Notation – gerichtete Graphen

Definition

- Ein **gerichteter Graph** oder **Digraph** ist ein Paar $G = (V, E)$, wobei
 - V - eine endliche Menge von **Knoten/Ecken** und
 - E - die Menge der **Kanten** ist.

Hierbei gilt

$$E \subseteq V \times V = \{(u, v) \mid u, v \in V\},$$

wobei E auch Schlingen (u, u) enthalten kann.

- Die **Nachfolgermenge** von v ist $N^+(v) = \{u \in V \mid (v, u) \in E\}$.
- Die **Vorgängermenge** von v ist $N^-(v) = \{u \in V \mid (u, v) \in E\}$.
- Die **Nachbarmenge** von v ist $N(v) = N^+(v) \cup N^-(v)$.
- Der **Ausgangsgrad** von v ist $\deg^+(v) = \|N^+(v)\|$.
- Der **Eingangsgrad** von v ist $\deg^-(v) = \|N^-(v)\|$.
- Der **Grad** von v ist $\deg(v) = \deg^+(v) + \deg^-(v)$.

Gerichtete Zyklen und Kreise

Definition

Sei $G = (V, E)$ ein Digraph.

- Ein (**gerichteter**) v_0 - v_j -Weg in G ist eine Folge von Knoten (v_0, \dots, v_j) mit $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für $i = 0, \dots, j-1$.
- Ein (**gerichteter**) Zyklus in G ist ein gerichteter u - v -Weg der Länge $j \geq 1$ mit $u = v$.
- Ein gerichteter Weg heißt **einfach** oder (**gerichteter**) Pfad, falls alle durchlaufenen Knoten paarweise verschieden sind.
- Ein (**gerichteter**) Kreis in G ist ein gerichteter Zyklus $(v_0, \dots, v_{j-1}, v_0)$ der Länge $j \geq 1$, für den v_0, \dots, v_{j-1} paarweise verschieden sind.
- G heißt **stark zusammenhängend**, wenn es von jedem Knoten u in G zu jedem Knoten v in G einen Weg gibt.

Eulerlinien

Definition

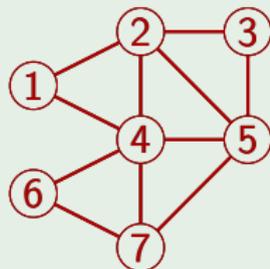
Sei $G = (V, E)$ ein Graph (oder Digraph) und sei $s = (v_0, v_1, \dots, v_l)$ ein (gerichteter) Weg in G , d.h. $\{v_i, v_{i+1}\}$ bzw. $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für $i = 0, \dots, l-1$.

- $s = (v_0, v_1, \dots, v_l)$ heißt **Eulerlinie** (auch **Eulerzug** oder **Eulerweg**) in G , falls s jede Kante in E genau einmal durchläuft, d.h. es gilt $l = \|E\|$ und

$$\left\{ \{v_i, v_{i+1}\} \text{ bzw. } (v_i, v_{i+1}) \mid i = 0, \dots, l-1 \right\} = E.$$

Beispiel (Eulerlinie in einem ungerichteten Graphen)

$$s = (4, 1, 2, 3, 5, 7, 6, 4, 5, 2, 4, 7)$$



Eulerkreise

Definition

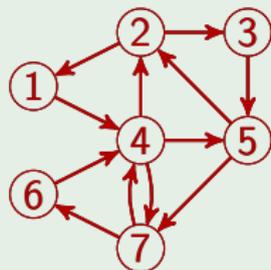
- $s = (v_0, v_1, \dots, v_l)$ in G heißt **Eulerlinie** (auch **Eulerzug** oder **Eulerweg**), falls s jede Kante in E genau einmal durchläuft, d.h. es gilt $l = \|E\|$ und

$$\left\{ \{v_i, v_{i+1}\} \text{ bzw. } (v_i, v_{i+1}) \mid i = 0, \dots, l-1 \right\} = E.$$

- Ist s zudem ein Zyklus, d.h. es gilt $v_l = v_0$, so heißt s **Eulerkreis** (auch **Eulerzyklus** oder **Eulertour**).

Beispiel (Eulerkreis in einem Digraphen)

$$s = (1, 4, 5, 2, 3, 5, 7, 4, 7, 6, 4, 2, 1)$$



Hamiltonpfade

Definition

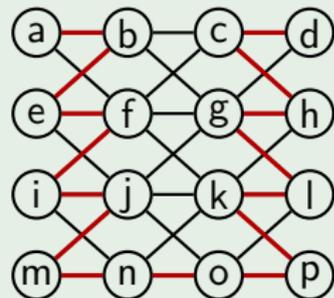
Sei $G = (V, E)$ ein Graph (oder Digraph) und sei $s = (v_0, v_1, \dots, v_l)$ ein (gerichteter) Pfad in G , d.h. $\{v_i, v_{i+1}\}$ bzw. $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für $i = 0, \dots, l-1$ und die Knoten v_0, \dots, v_l sind paarweise verschieden.

- s heißt **Hamiltonpfad** in G , falls s jeden Knoten in V genau einmal durchläuft, d.h. es gilt

$$V = \{v_0, \dots, v_l\} \text{ und } l = \|V\| - 1.$$

Beispiel (Hamiltonpfad in einem ungerichteten Graphen)

$$s = (a, b, e, f, i, j, m, n, o, p, k, l, g, h, c, d)$$



Hamiltonpfade

Definition

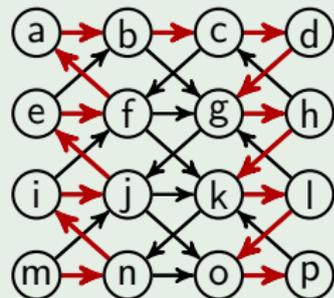
Sei $G = (V, E)$ ein Graph (oder Digraph) und sei $s = (v_0, v_1, \dots, v_l)$ ein (gerichteter) Pfad in G , d.h. $\{v_i, v_{i+1}\}$ bzw. $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für $i = 0, \dots, l-1$ und die Knoten v_0, \dots, v_l sind paarweise verschieden.

- s heißt **Hamiltonpfad** in G , falls s jeden Knoten in V genau einmal durchläuft, d.h. es gilt

$$V = \{v_0, \dots, v_l\} \text{ und } l = \|V\| - 1.$$

Beispiel (Hamiltonpfad in einem Digraphen)

$$s = (m, n, i, j, e, f, a, b, c, d, g, h, k, l, o, p)$$



Hamiltonkreise

Definition

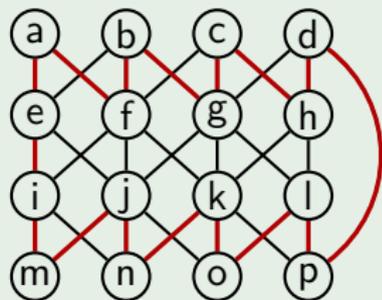
- $s = (v_0, v_1, \dots, v_l)$ in G heißt **Hamiltonpfad**, falls s jeden Knoten in V genau einmal durchläuft, d.h. es gilt

$$V = \{v_0, \dots, v_l\} \text{ und } l = \|V\| - 1.$$

- Ist zudem $\{v_0, v_l\} \in E$, d.h. $s' = (v_0, v_1, \dots, v_l, v_0)$ ist ein (**gerichteter**) Kreis, so heißt s' **Hamiltonkreis**.

Beispiel (Hamiltonkreis in einem ungerichteten Graphen)

$$s = (a, f, b, g, c, h, d, p, l, o, k, n, j, m, i, e, a)$$



Euler- und Hamiltonkreise

Definition

Wir betrachten für einen gegebenen Graphen (bzw. Digraphen) G und zwei Knoten s und t folgende Entscheidungsprobleme:

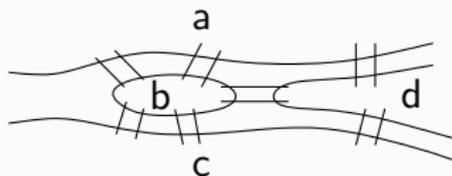
- **Das Eulerlinienproblem (EULERPATH bzw. DIEULERPATH):**
Hat G eine Eulerlinie von s nach t ?
- **Das Hamiltonpfadproblem (HAMPATH bzw. DIHAMPATH):**
Hat G einen Hamiltonpfad von s nach t ?

Zudem betrachten wir für einen gegebenen Graphen (bzw. Digraphen) G folgende Probleme:

- **Das Eulerkreisproblem (EULERCYCLE bzw. DIEULERCYCLE):**
Hat G einen Eulerkreis?
- **Das Hamiltonkreisproblem (HAMCYCLE bzw. DIHAMCYCLE):**
Hat G einen Hamiltonkreis?

Das Königsberger Brückenproblem

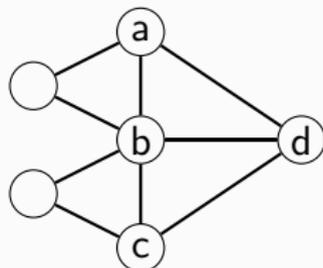
Die 7 Königsberger Brücken



Frage

Gibt es einen Spaziergang über alle 7 Brücken, bei dem keine Brücke mehrmals überquert wird und der zum Ausgangspunkt zurückführt?

Gelöst von Euler (1707 – 1783) durch Betrachtung des folgenden Graphen, der offenbar genau dann einen Eulerkreis hat, wenn die Antwort auf obige Frage „ja“ ist.



Satz (Euler, 1736)

Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ besitzt genau dann einen Eulerkreis, wenn all seine Knoten geraden Grad haben.

Eulerkreise und -linien

Satz (Euler, 1736)

Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ besitzt genau dann einen Eulerkreis, wenn all seine Knoten geraden Grad haben.

Beweis

- Falls G einen Eulerkreis s besitzt, existiert zu jeder Kante, auf der s zu einem Knoten gelangt, eine weitere Kante, auf der s den Knoten wieder verlässt.
- Daher muss jeder Knoten geraden Grad haben.
- Ist umgekehrt G zusammenhängend und hat jeder Knoten geraden Grad, so können wir wie folgt einen Eulerkreis s konstruieren.

Eulerkreise und -linien

- Ist umgekehrt G zusammenhängend und hat jeder Knoten geraden Grad, so können wir wie folgt einen Eulerkreis s konstruieren.

Algorithmus zur Berechnung eines Eulerkreises in $G = (V, E)$

- 1 Wähle $u \in V$ beliebig und initialisiere s zu $s = (u)$
- 2 Wähle einen beliebigen Knoten u auf dem Weg s , der mit einer unmarkierten Kante verbunden ist.
- 3 Folge ausgehend von u den unmarkierten Kanten auf einem beliebigen Weg z solange wie möglich und markiere dabei jede durchlaufene Kante. (Da von jedem erreichten Knoten $v \neq u$ ungerade viele markierte Kanten ausgehen, muss der Weg z zum Ausgangspunkt u zurückführen.)
- 4 Füge den Zyklus z an der Stelle u in s ein.
- 5 Wenn noch nicht alle Kanten markiert sind, gehe zu 2.
- 6 **Output:** s



Eulerkreise und -linien

Satz (Euler, 1736)

- i) Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ besitzt genau dann eine Eulerlinie von s nach t , wenn s und t ungeraden Grad und alle übrigen Knoten geraden Grad haben.
- ii) Ein stark zusammenhängender Digraph besitzt genau dann einen Eulerkreis, wenn für jeden Knoten u der Eingangs- und der Ausgangsgrad übereinstimmen.

Beweis

- i) Da G genau dann eine Eulerlinie von s nach t hat, wenn der Graph $G' = (V', E')$ mit $V' = V \cup \{u_{neu}\}$ und $E' = E \cup \{\{t, u_{neu}\}, \{u_{neu}, s\}\}$ einen Eulerkreis hat, folgt dies aus dem vorigen Satz.
- ii) Dies folgt vollkommen analog zum ungerichteten Fall.

Korollar

`EULERCYCLE, EULERPATH, DIEULERCYCLE, DIEULERPATH` \in P.

Hamiltonpfade und Hamiltonkreise

Satz

HAMPATH, HAMCYCLE, DIHAMPATH und DIHAMCYCLE sind NP-vollständig.

Bemerkung

Bevor wir den Satz beweisen, betrachten wir ein weiteres Problem, das mit dem Hamiltonkreisproblem eng verwandt ist und große praktische Bedeutung hat.

Das Problem des Handlungsreisenden

- Gegeben sind die Entfernungen d_{ij} zwischen n Städten $i, j \in \{1, \dots, n\}$.
- Gesucht ist eine Rundreise (i_1, \dots, i_n) mit minimaler Länge $d_{i_1, i_2} + \dots + d_{i_{n-1}, i_n} + d_{i_n, i_1}$, die jede Stadt genau einmal besucht.
- Die Entscheidungsvariante dieses Optimierungsproblems ist wie folgt definiert.

Problem des Handlungsreisenden (TSP; *traveling salesman problem*)

Gegeben: Eine $n \times n$ Matrix $D = (d_{i,j}) \in \mathbb{N}^{n \times n}$ und eine Zahl k .

Gefragt: Existiert eine Permutation $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$, so dass die Rundreise $(\pi(1), \dots, \pi(n))$ die Länge $\leq k$ hat?

Hamiltonkreise, Hamiltonpfade und TSP

Satz

$$3\text{-SAT} \leq^P \text{DIHAMPATH} \leq^P \begin{matrix} \text{HAMPATH,} \\ \text{DIHAMCYCLE} \end{matrix} \leq^P \text{HAMCYCLE} \leq^P \text{TSP}.$$

Reduktion von HAMCYCLE auf TSP

- Sei $G = (V, E)$ ein Graph, wobei wir $V = \{1, \dots, n\}$ annehmen.
- Dann lässt sich G in Polynomialzeit auf die TSP Instanz (D, n) mit $D = (d_{i,j})$ und

$$d_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \{i, j\} \in E, \\ 2, & \text{sonst,} \end{cases}$$

transformieren.

- Diese Reduktion ist korrekt, da G genau dann einen Hamiltonkreis hat, wenn es in dem Distanzgraphen D eine Rundreise $(\pi(1), \dots, \pi(n))$ der Länge $L(\pi) \leq n$ gibt. □

Hamiltonkreise, Hamiltonpfade und TSP

Satz

$$3\text{-SAT} \leq^p \text{DIHAMPATH} \leq^p \begin{matrix} \text{HAMPATH,} \\ \text{DIHAMCYCLE} \end{matrix} \leq^p \text{HAMCYCLE} \leq^p \text{TSP}.$$

Reduktion von DIHAMPATH auf DIHAMCYCLE

- Seien ein Digraph $G = (V, E)$ und zwei Knoten $s, t \in V$ gegeben.
- Wir transformieren G in den Digraphen $G' = (V', E')$ mit

$$V' = V \cup \{u_{\text{neu}}\} \text{ und}$$

$$E' = E \cup \{(t, u_{\text{neu}}), (u_{\text{neu}}, s)\}.$$

- Offenbar ist G' in Polynomialzeit aus G berechenbar und besitzt genau dann einen Hamiltonkreis, wenn G einen s - t -Hamiltonpfad besitzt. \square

Reduktion von HAMPATH auf HAMCYCLE

Analog (siehe Probeklausur).

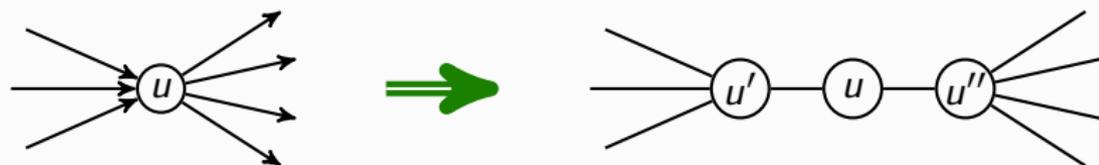
Hamiltonkreise, Hamiltonpfade und TSP

Satz

$3\text{-SAT} \leq^P \text{DIHAMPATH} \leq^P \text{HAMPATH}, \text{DIHAMPATH} \leq^P \text{DIHAMCYCLE} \leq^P \text{HAMCYCLE} \leq^P \text{TSP}.$

Reduktion von DIHAMCYCLE auf HAMCYCLE

- Wir reduzieren einen Digraphen G auf einen Graphen G' , indem wir lokal für jeden Knoten $u \in V$ die folgende Ersetzung durchführen:



- Dann ist klar, dass die Funktion $G \mapsto G'$ in FP berechenbar ist, und G genau dann einen Hamiltonkreis enthält, wenn dies auf G' zutrifft. \square

Reduktion von DIHAMPATH auf HAMPATH

Analog (siehe Probeklausur).

Reduktion von 3-SAT auf das Hamiltonpfadproblem

Satz

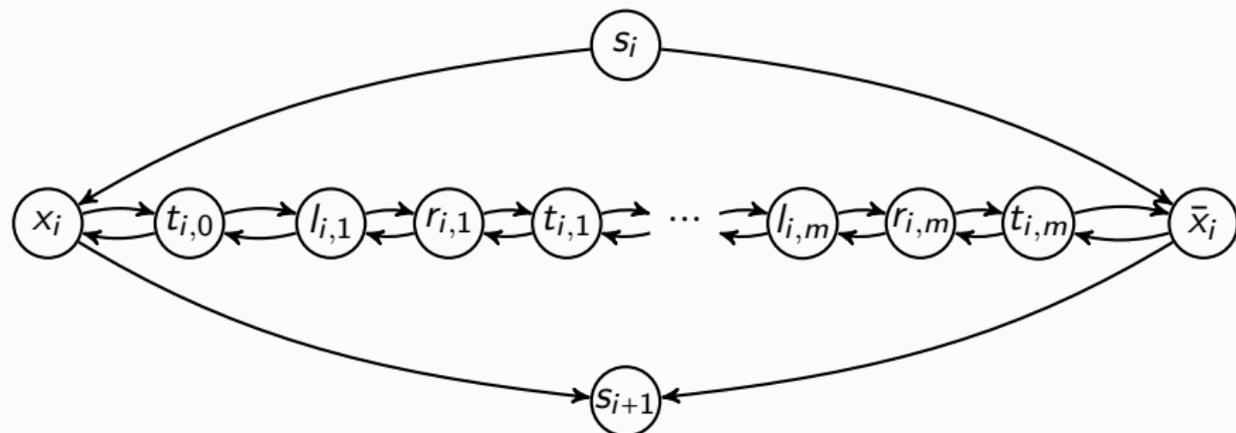
$3\text{-SAT} \leq^P \text{DIHAMPATH} \leq^P \text{HAMPATH, DIHAMCYCLE} \leq^P \text{HAMCYCLE} \leq^P \text{TSP}.$

Reduktion von 3-SAT auf DIHAMPATH

- Sei $F = \{C_1, \dots, C_m\}$ mit $C_j = \{l_{j1}, \dots, l_{jk_j}\}$ für $j = 1, \dots, m$ eine 3-KNF-Formel über den Variablen x_1, \dots, x_n .
- Wir transformieren F in Polynomialzeit in einen gerichteten Graphen $G_F = (V, E)$ mit zwei ausgezeichneten Knoten s und t , der genau dann einen hamiltonschen s - t -Pfad besitzt, wenn F erfüllbar ist.
- Jede Klausel C_j repräsentieren wir durch einen Knoten c_j und jede Variable x_i repräsentieren wir durch folgenden Graphen X_i .

Reduktion von 3-SAT auf DIHAMPATH

- Jede Klausel C_j repräsentieren wir durch einen Knoten c_j und jede Variable x_i repräsentieren wir durch folgenden Graphen X_i :



- Ein Pfad von s_1 nach s_{n+1} kann ausgehend von s_i ($i = 1, \dots, n$) entweder zuerst den Knoten x_i oder zuerst den Knoten \bar{x}_i besuchen.
- Daher können wir jedem s_1 - s_{n+1} -Pfad P eine Belegung $b_P = b_1 \dots b_n$ zuordnen mit $b_i = 1$ gdw. P den Knoten x_i vor dem Knoten \bar{x}_i besucht.

Reduktion von 3-SAT auf DIHAMPATH

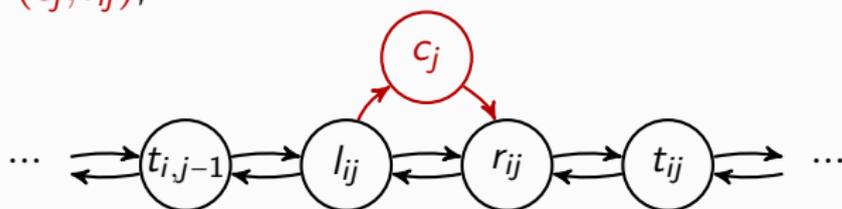
- Die Knotenmenge V von G_F ist also

$$V = \{c_1, \dots, c_m\} \cup \{s_1, \dots, s_{n+1}\} \cup \{x_1, \bar{x}_1, \dots, x_n, \bar{x}_n\} \cup \bigcup_{i=1}^n \{t_{i,0}, l_{i,1}, r_{i,1}, t_{i,1}, \dots, l_{i,m}, r_{i,m}, t_{i,m}\}.$$

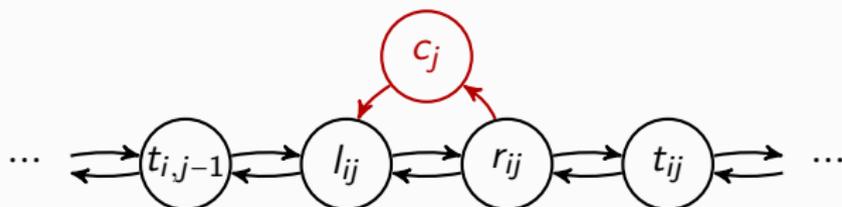
- Dabei haben die Graphen X_{i-1} und X_i den Knoten s_i gemeinsam.
- Als Startknoten wählen wir $s = s_1$ und als Zielknoten $t = s_{n+1}$.
- Jetzt fehlen nur noch die Verbindungskanten zwischen den Teilgraphen X_i und den Klauselknoten c_j .
- Diese Kanten sollen einem s - t -Pfad P genau dann einen Abstecher nach c_j ermöglichen, wenn die Belegung b_P die Klausel C_j erfüllt.

Reduktion von 3-SAT auf DIHAMPATH

- Für jedes Literal $l \in C_j$ fügen wir zu E im Fall $l = x_i$ die beiden Kanten (l_{ij}, c_j) und (c_j, r_{ij}) ,



und im Fall $l = \bar{x}_i$ die Kanten (r_{ij}, c_j) und (c_j, l_{ij}) hinzu:



- Man beachte, dass ein s - t -Pfad P über diese Kanten genau dann einen Abstecher zu c_j machen kann, wenn die Belegung b_P das Literal l wahr macht.

Reduktion von 3-SAT auf DIHAMPATH

- Zunächst ist klar, dass die Reduktionsfunktion $F \mapsto (G_F, s, t)$ in Polynomialzeit berechenbar ist.
- Es bleibt also zu zeigen, dass F genau dann erfüllbar ist, wenn in G_F ein Hamiltonpfad von $s = s_1$ nach $t = s_{n+1}$ existiert.
- Falls $F(b) = 1$ ist, so erhalten wir einen Hamiltonpfad, indem wir in jeder Klausel C_j ein wahres Literal $l = x_j$ bzw. $l = \bar{x}_j$ auswählen und in den zu b gehörigen s - t -Pfad P einen „Abstecher“ vom Knotenpaar l_{ij}, r_{ij} zum Klauselknoten c_j einbauen.
- Ist umgekehrt P ein s - t -Hamiltonpfad in G_F , so müssen der Vorgänger- und Nachfolgerknoten jedes Klauselknotens c_j ein Paar l_{ij}, r_{ij} bilden, da P andernfalls nicht beide Pufferknoten $t_{i,j-1}$ und $t_{i,j}$ besuchen kann.
- Da aber P alle Klauselknoten besucht und ausgehend von dem Paar l_{ij}, r_{ij} nur dann ein Abstecher zu c_j möglich ist, wenn die Belegung b_P die Klausel C_j erfüllt, folgt $F(b_P) = 1$. □

Reduktion von 3-SAT auf DIHAMPATH

Beispiel

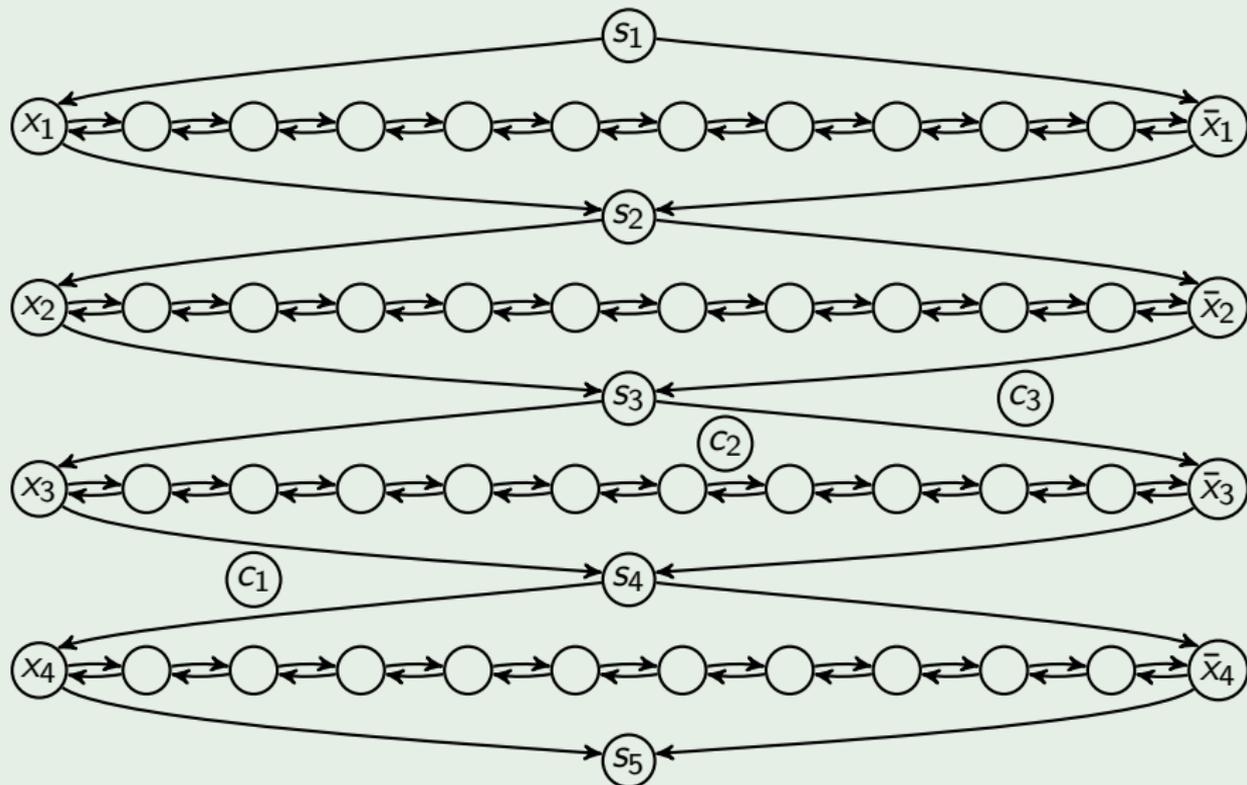
Die 3-SAT-Instanz

$$F = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4).$$

lässt sich auf folgenden Digraphen G mit Startknoten $s = s_1$ und Zielknoten $t = s_5$ reduzieren:

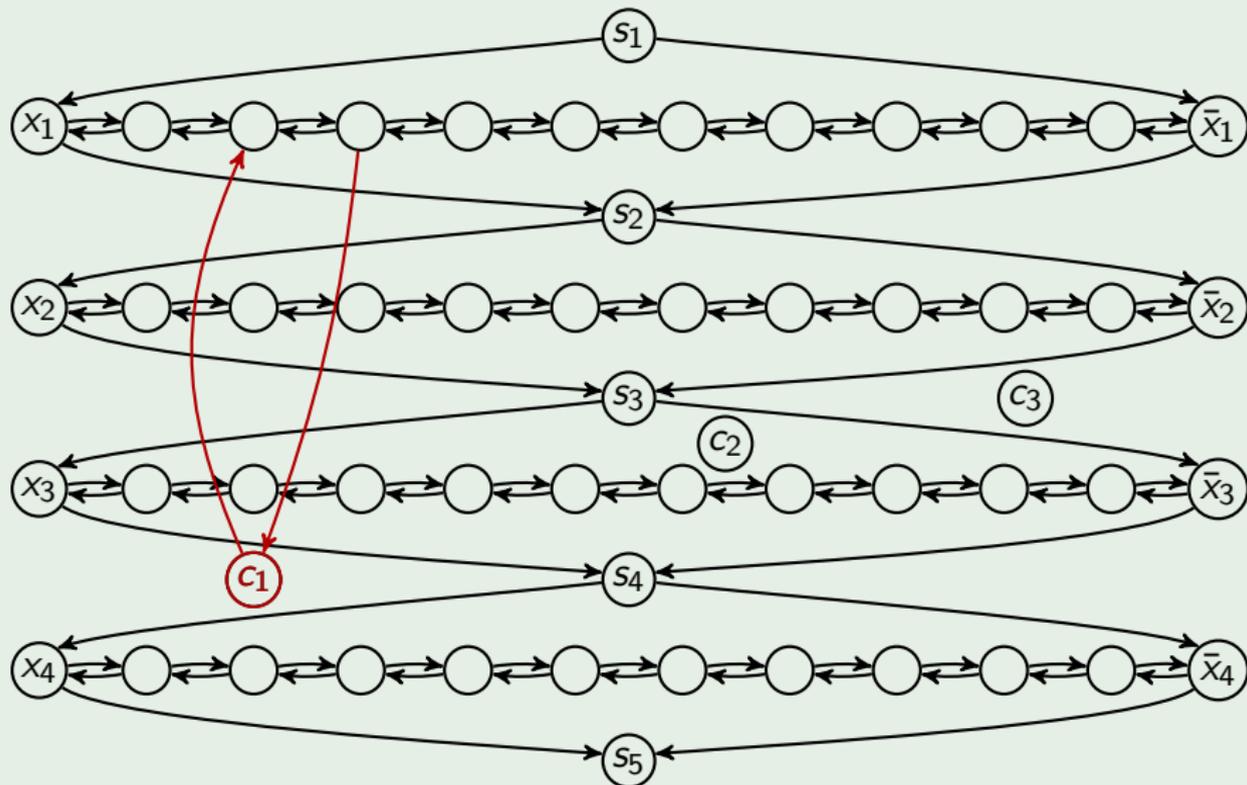
Reduktion von 3-SAT auf DIHAMPATH

$$F = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4).$$



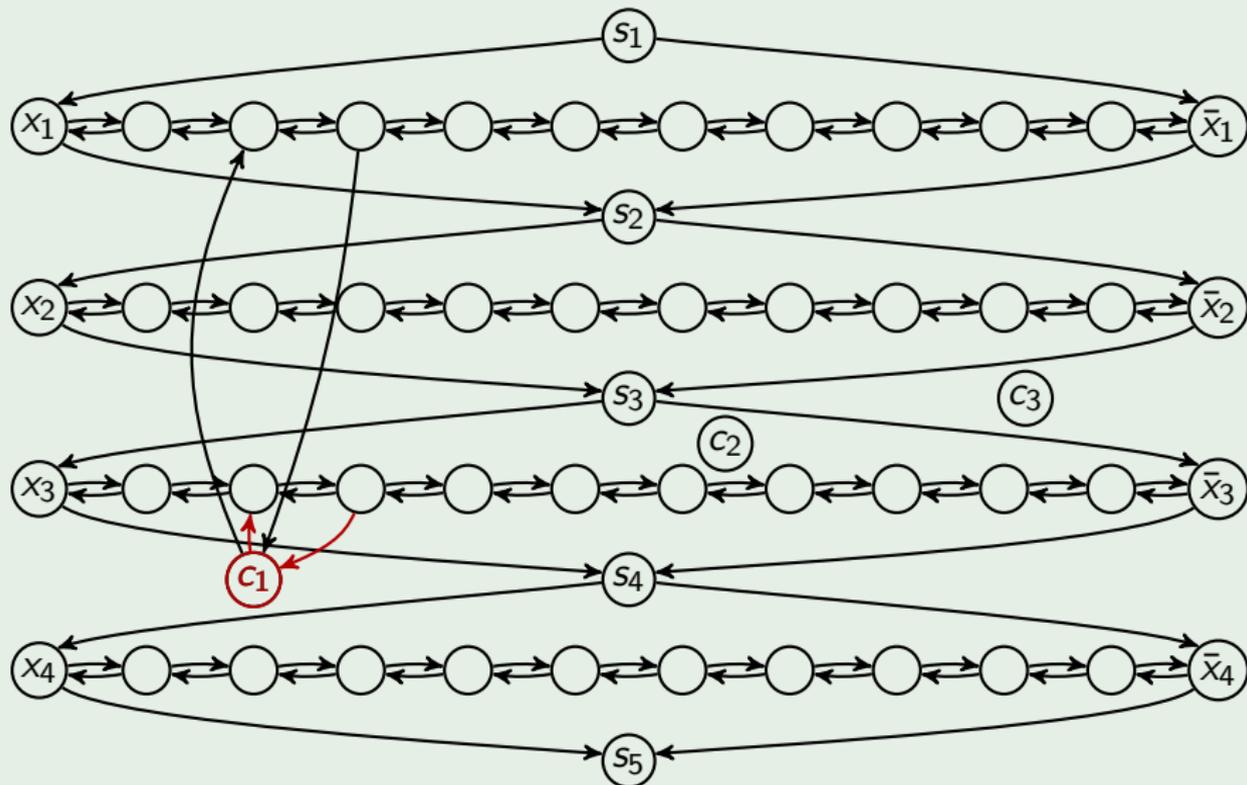
Reduktion von 3-SAT auf DIHAMPATH

$$F = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4).$$



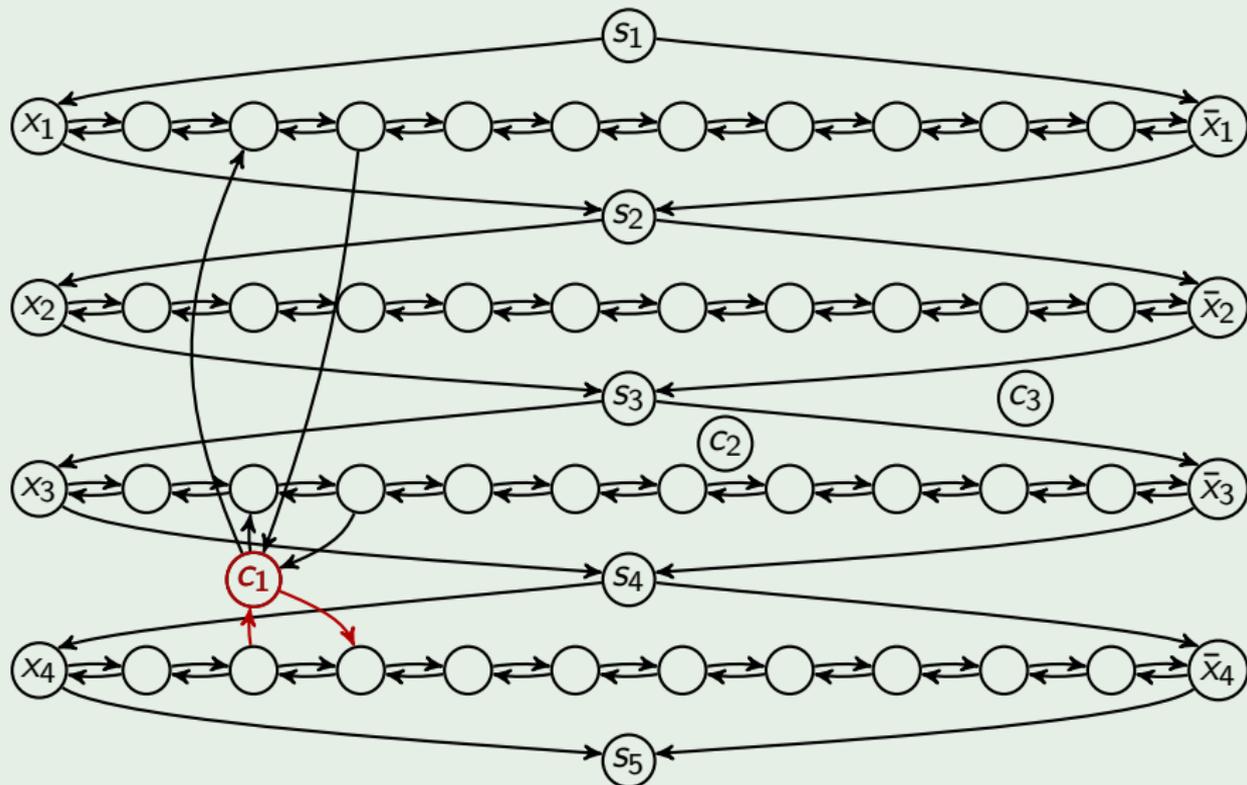
Reduktion von 3-SAT auf DIHAMPATH

$$F = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4).$$



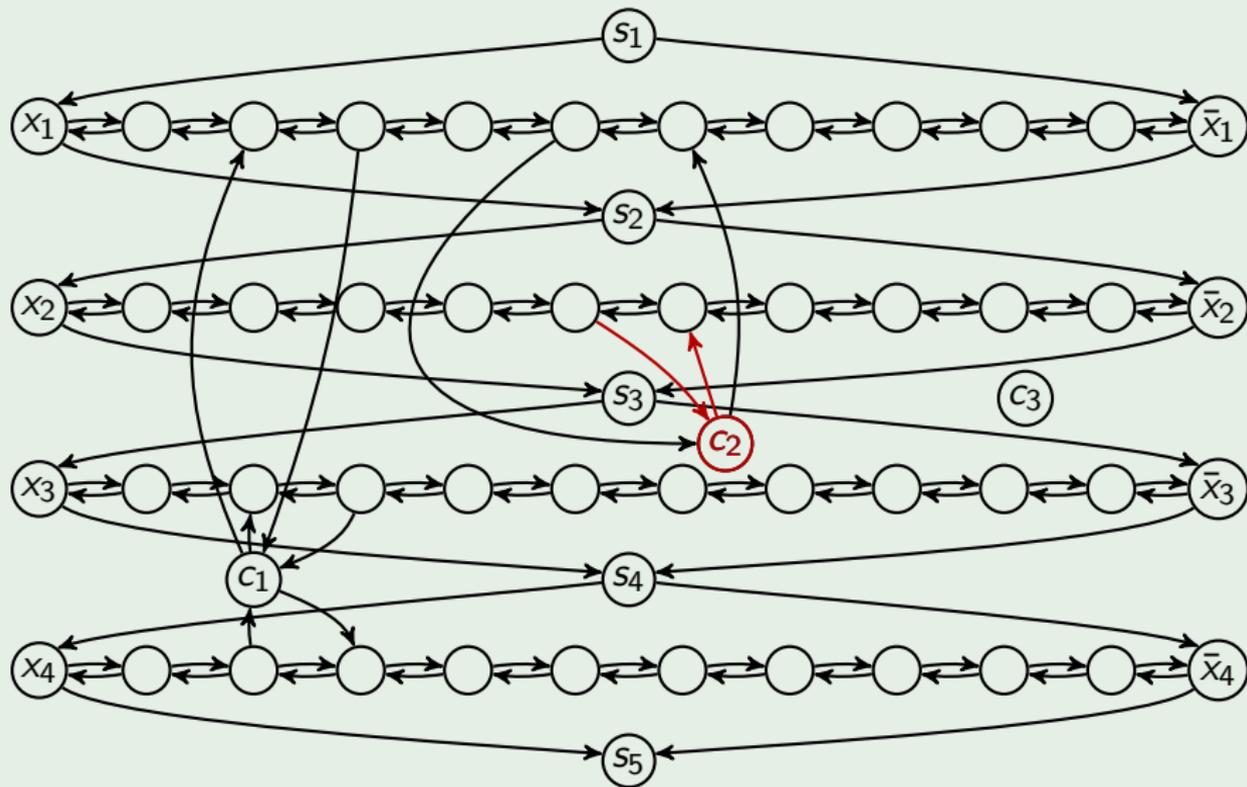
Reduktion von 3-SAT auf DIHAMPATH

$$F = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4).$$



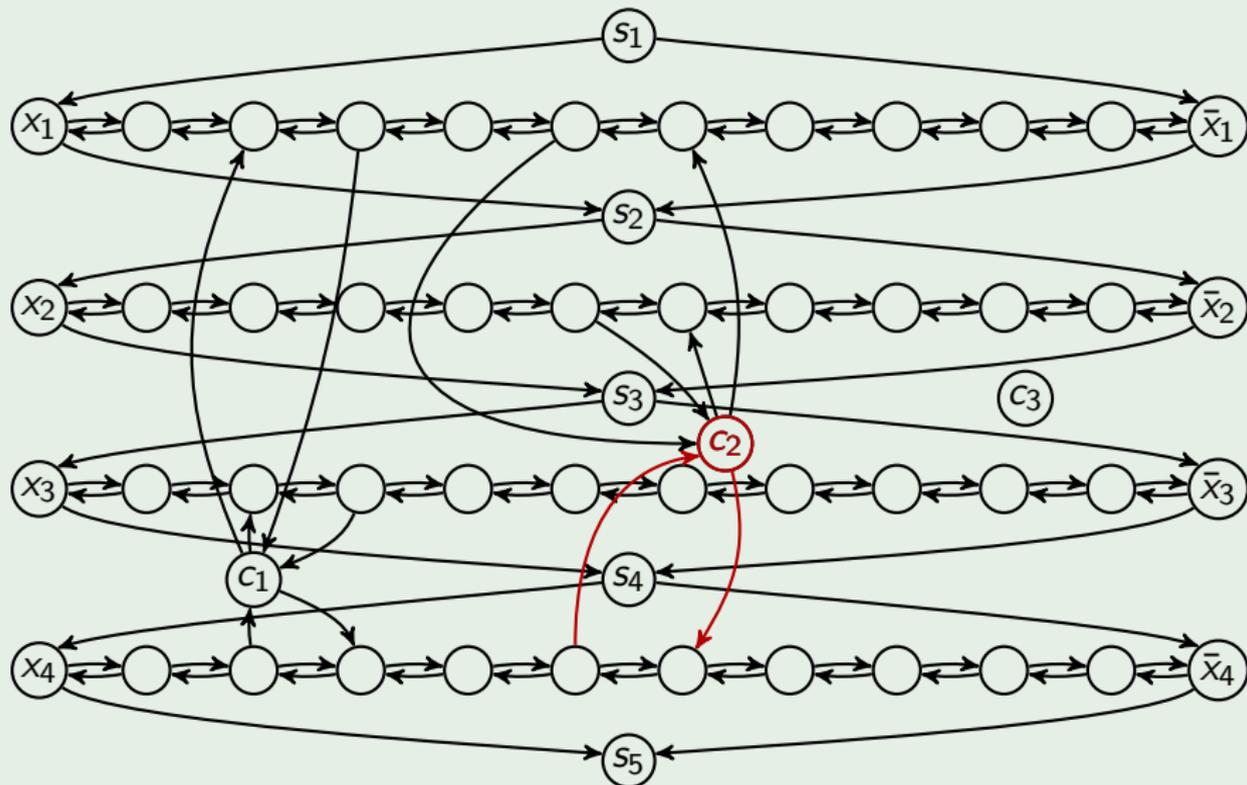
Reduktion von 3-SAT auf DIHAMPATH

$$F = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4).$$



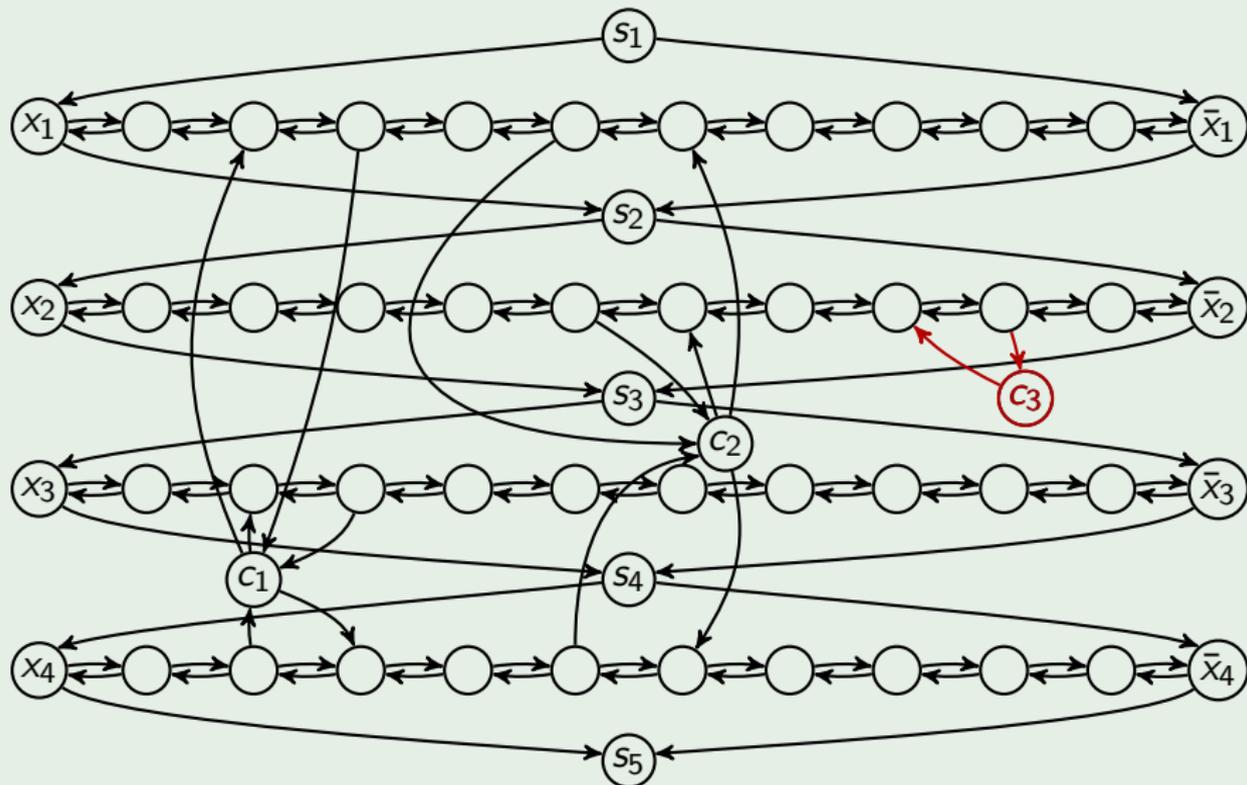
Reduktion von 3-SAT auf DIHAMPATH

$$F = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4).$$



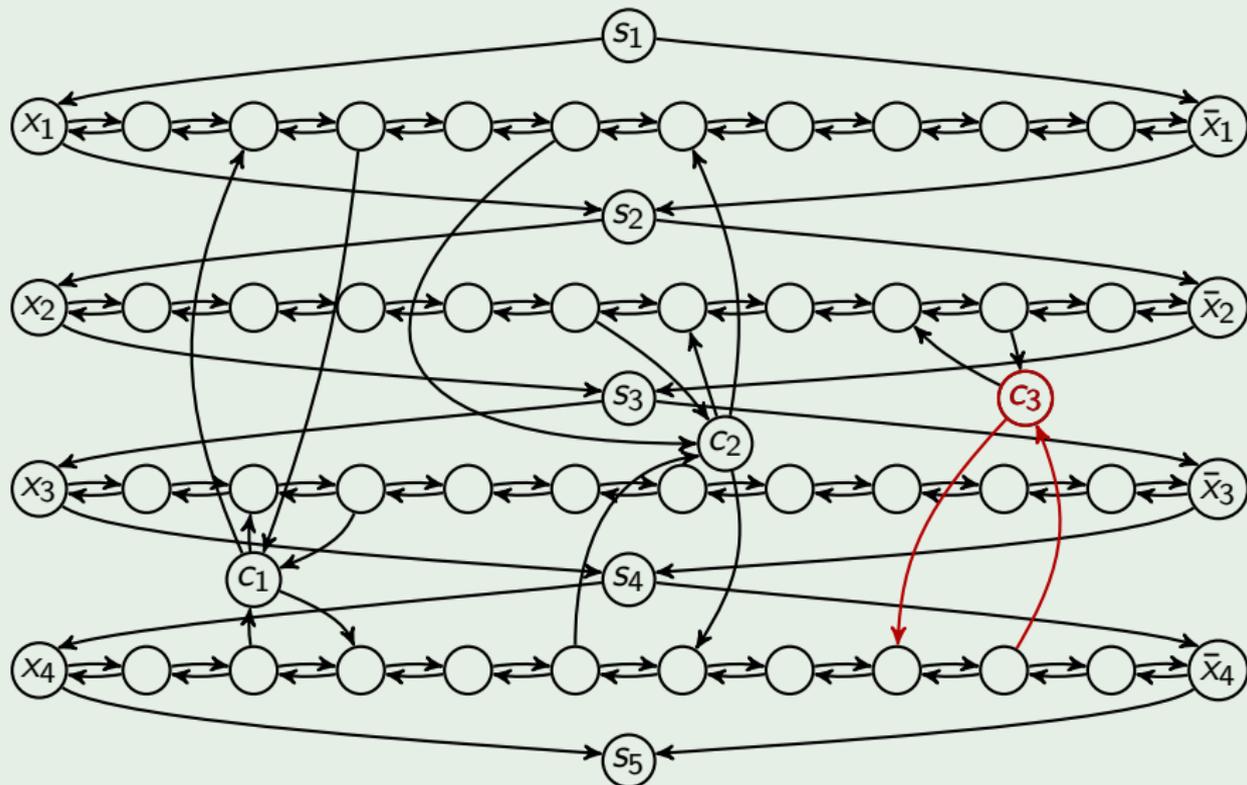
Reduktion von 3-SAT auf DIHAMPATH

$$F = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4).$$



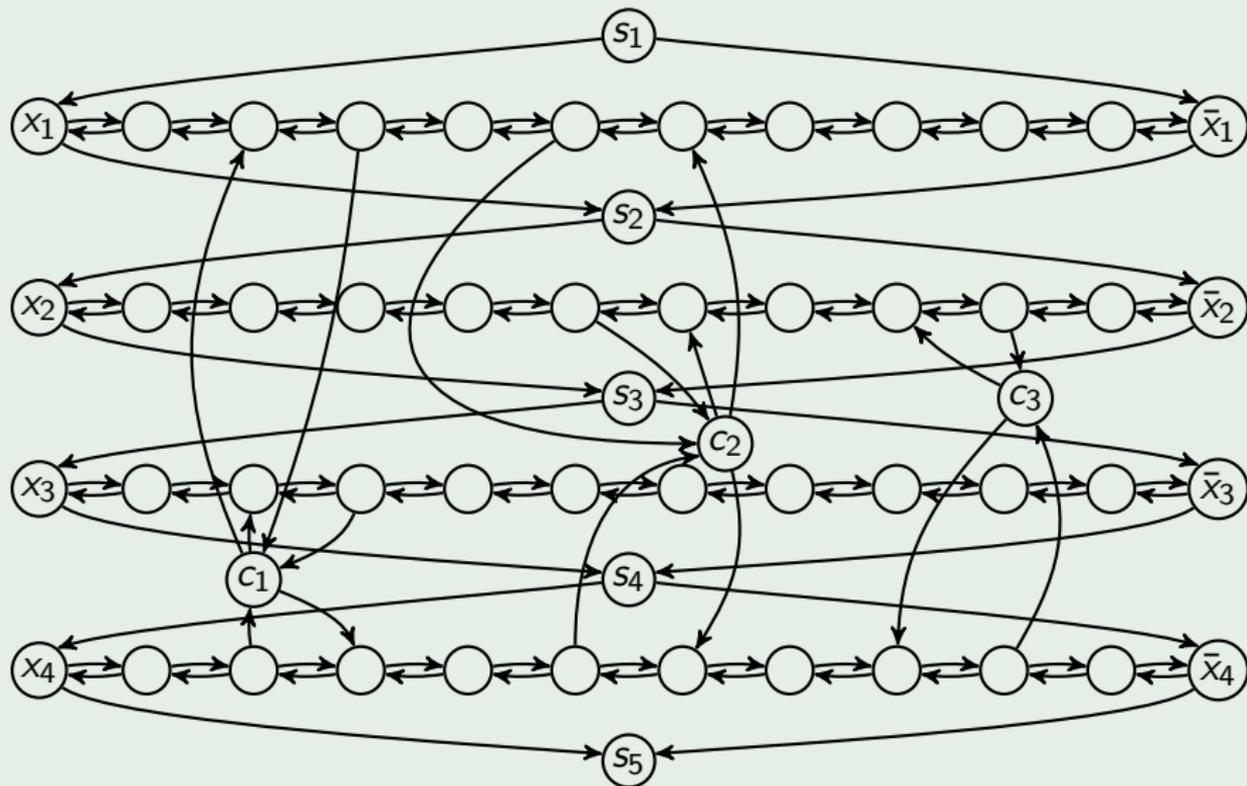
Reduktion von 3-SAT auf DIHAMPATH

$$F = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4).$$



Reduktion von 3-SAT auf DIHAMPATH

$$F = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4).$$

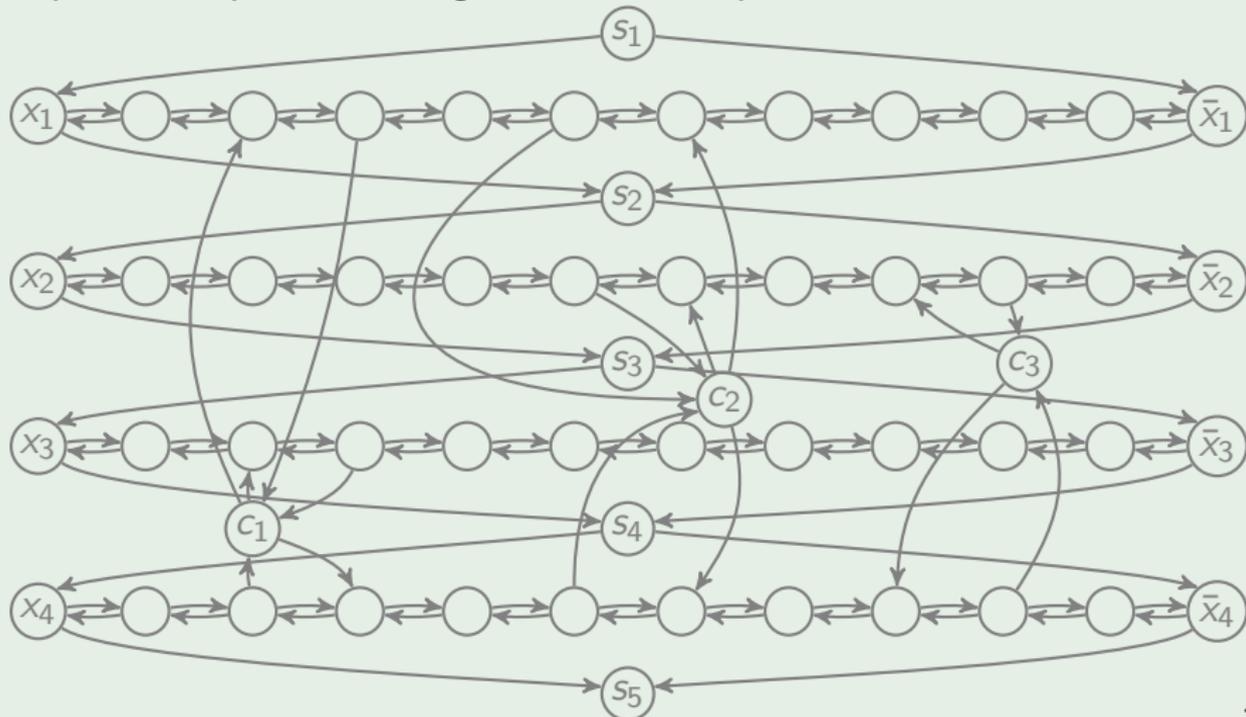


Reduktion von 3-SAT auf DIHAMPATH

Der erfüllenden Belegung $b = 0110$ von

$$F = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4)$$

entspricht beispielsweise folgender Hamiltonpfad:

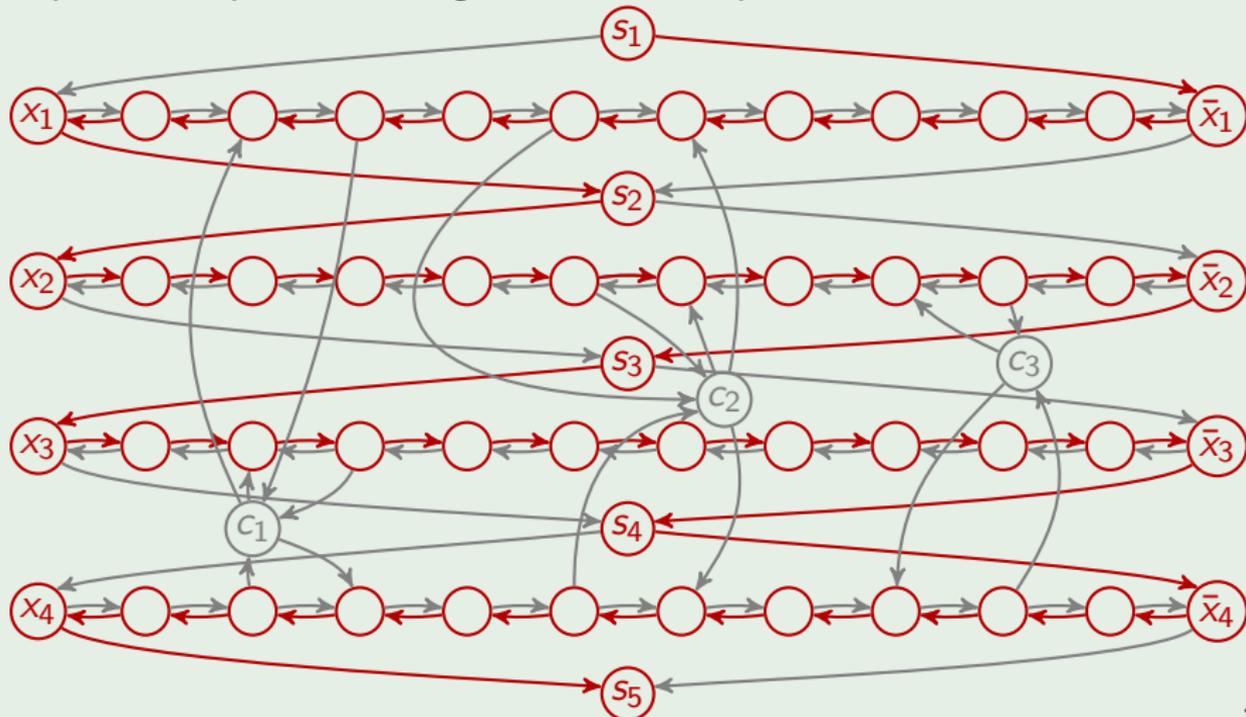


Reduktion von 3-SAT auf DIHAMPATH

Der erfüllenden Belegung $b = 0110$ von

$$F = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4)$$

entspricht beispielsweise folgender Hamiltonpfad:

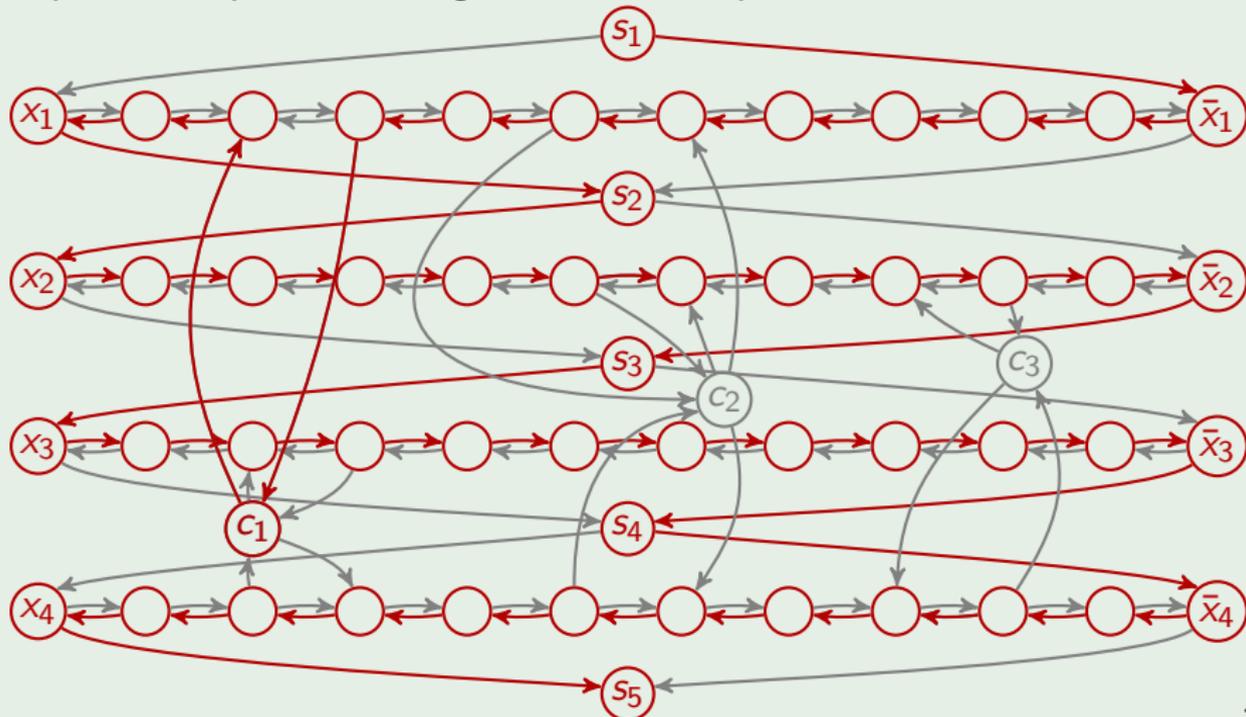


Reduktion von 3-SAT auf DIHAMPATH

Der erfüllenden Belegung $b = 0110$ von

$$F = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4)$$

entspricht beispielsweise folgender Hamiltonpfad:

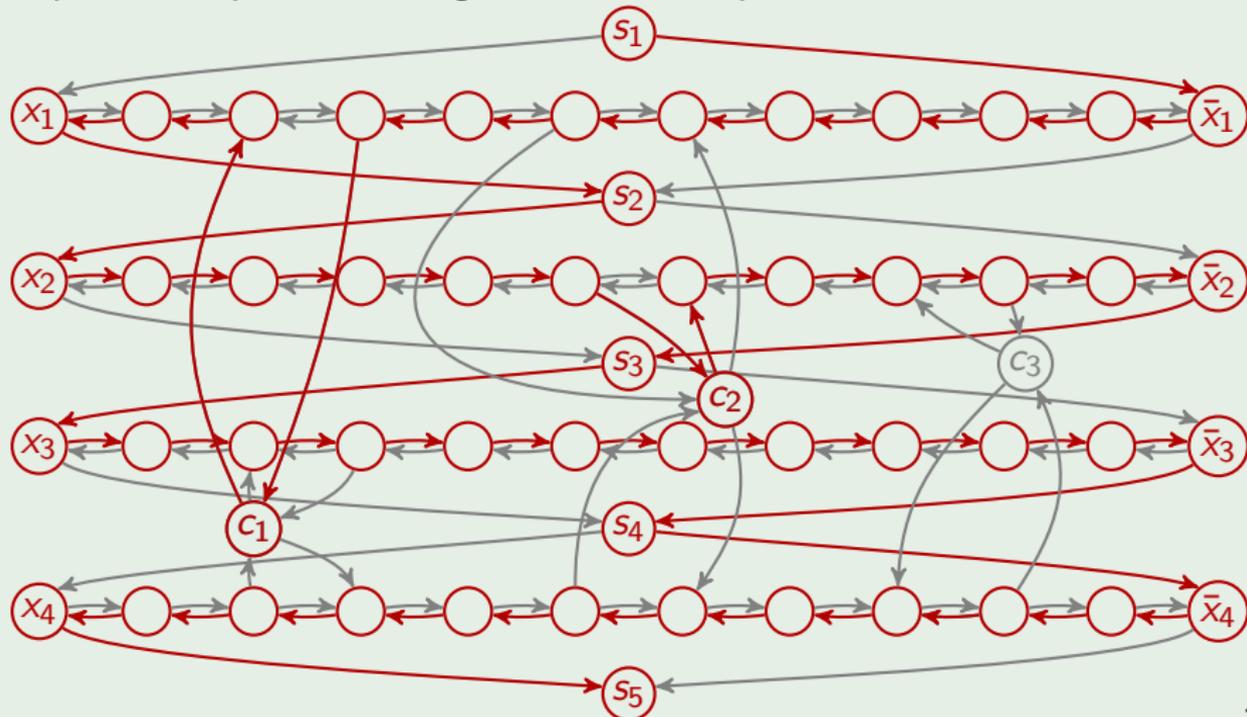


Reduktion von 3-SAT auf DIHAMPATH

Der erfüllenden Belegung $b = 0110$ von

$$F = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4)$$

entspricht beispielsweise folgender Hamiltonpfad:

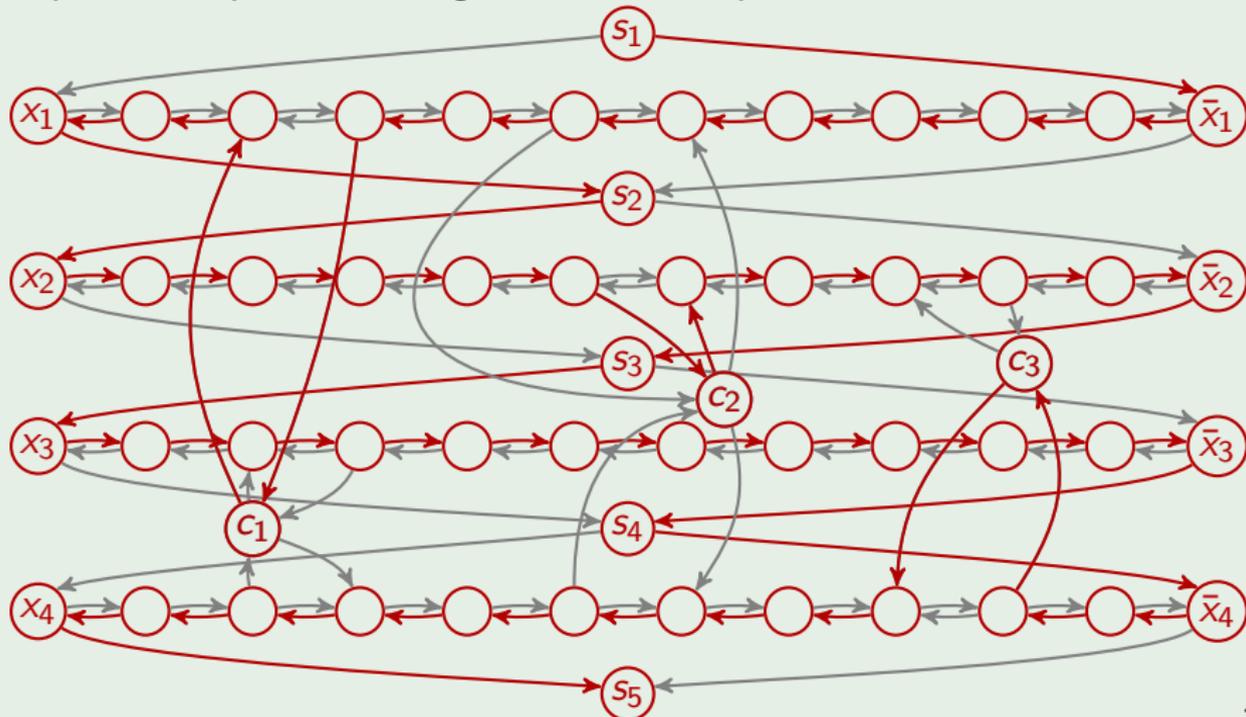


Reduktion von 3-SAT auf DIHAMPATH

Der erfüllenden Belegung $b = 0110$ von

$$F = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4)$$

entspricht beispielsweise folgender Hamiltonpfad:



Das Rucksack-Problem

- Wie schwierig ist es, einen Rucksack der Größe w mit einer Auswahl aus k Gegenständen der Größe u_1, \dots, u_k möglichst voll zu packen?
- Dieses Optimierungsproblem lässt sich leicht auf folgendes Entscheidungsproblem reduzieren.

RUCKSACK:

Gegeben: Eine Folge (u_1, \dots, u_k, v, w) von natürlichen Zahlen.

Gefragt: Ex. eine Auswahl $S \subseteq \{1, \dots, k\}$ mit $v \leq \sum_{i \in S} u_i \leq w$?

Beim SubsetSum-Problem möchte man dagegen nur wissen, ob der Rucksack randvoll gepackt werden kann.

SUBSETSUM:

Gegeben: Eine Folge (u_1, \dots, u_k, w) von natürlichen Zahlen.

Gefragt: Ex. eine Auswahl $S \subseteq \{1, \dots, k\}$ mit $\sum_{i \in S} u_i = w$?

Rucksack und SubsetSum sind NP-vollständig

RUCKSACK:

Gegeben: Eine Folge (u_1, \dots, u_k, v, w) von natürlichen Zahlen.

Gefragt: Ex. eine Auswahl $S \subseteq \{1, \dots, k\}$ mit $v \leq \sum_{i \in S} u_i \leq w$?

SUBSETSUM:

Gegeben: Eine Folge (u_1, \dots, u_k, w) von natürlichen Zahlen.

Gefragt: Ex. eine Auswahl $S \subseteq \{1, \dots, k\}$ mit $\sum_{i \in S} u_i = w$?

Satz

RUCKSACK und SUBSETSUM sind NP-vollständig.

Beweis

- Es ist leicht zu sehen, dass beide Probleme in NP enthalten sind.

Rucksack und SubsetSum sind NP-vollständig

Satz

RUCKSACK und SUBSETSUM sind NP-vollständig.

Beweis

- Es ist leicht zu sehen, dass die beiden Probleme in NP enthalten sind.
- Zum Nachweis der NP-Härte zeigen wir die folgenden Reduktionen:

$$3\text{-SAT} \leq^P \text{SUBSETSUM} \leq^P \text{RUCKSACK}.$$

Reduktion von SUBSETSUM auf RUCKSACK

Da SUBSETSUM einen Spezialfall des RUCKSACK-Problems darstellt, lässt es sich leicht darauf reduzieren:

$$(u_1, \dots, u_k, w) \mapsto (u_1, \dots, u_k, w, w).$$

□

SubsetSum ist NP-vollständig

Reduktion von 3-SAT auf SUBSETSUM

- Sei $F = \{C_1, \dots, C_m\}$ mit $C_j = \{l_{j1}, \dots, l_{jk_j}\}$ für $j = 1, \dots, m$ eine 3-KNF-Formel über den Variablen x_1, \dots, x_n .
- Betrachte die Reduktionsfunktion

$$f : F \mapsto (u_1, \dots, u_n, u'_1, \dots, u'_n, v_1, \dots, v_m, v'_1, \dots, v'_m, w),$$

wobei u_i und u'_i die Dezimalzahlen

$$u_i = b_{i1} \dots b_{im} 0^{i-1} 10^{n-i-1} \quad \text{und} \quad u'_i = b'_{i1} \dots b'_{im} 0^{i-1} 10^{n-i-1}$$

mit

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & x_i \in C_j, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad \text{und} \quad b'_{ij} = \begin{cases} 1, & \bar{x}_i \in C_j, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und $v_j = v'_j = 0^{j-1} 10^{m-j-1} 0^n$ sind.

- w setzen wir auf $w = \underbrace{3 \dots 3}_{m\text{-mal}} \underbrace{1 \dots 1}_{n\text{-mal}}$.

SubsetSum ist NP-vollständig

Beispiel

- Betrachte die 3-KNF Formel

$$F = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_4).$$

- Die zu F gehörige SUBSETSUM-Instanz $f(F)$ ist

$$(u_1, u_2, u_3, u_4, u'_1, u'_2, u'_3, u'_4, v_1, v_2, v_3, v'_1, v'_2, v'_3, w)$$

mit

$$\begin{aligned} u_1 &= 010\ 1000, & u_2 &= 010\ 0100, & u_3 &= 000\ 0010, & u_4 &= 110\ 0001, \\ u'_1 &= 100\ 1000, & u'_2 &= 001\ 0100, & u'_3 &= 100\ 0010, & u'_4 &= 001\ 0001, \\ v_1 &= 100\ 0000, & v_2 &= 010\ 0000, & v_3 &= 001\ 0000, \\ v'_1 &= 100\ 0000, & v'_2 &= 010\ 0000, & v'_3 &= 001\ 0000, \end{aligned}$$

sowie $w = 333\ 1111$.

- Der erfüllenden Belegung $a = 0100$ entspricht dann die Auswahl $(u'_1, u_2, u'_3, u'_4, v_1, v_2, v'_2, v_3, v'_3)$.



SubsetSum ist NP-vollständig

Beweis von $F \in 3\text{-SAT} \Rightarrow f(F) \in \text{SUBSETSUM}$

- Sei $a = a_1 \cdots a_n$ eine erfüllende Belegung für F .
- Da a in jeder Klausel mindestens ein und höchstens drei Literale wahr macht, hat die Zahl

$$\sum_{a_i=1} u_i + \sum_{a_i=0} u'_i$$

eine Dezimaldarstellung der Form $b_1 \cdots b_m 1 \cdots 1$ mit $1 \leq b_j \leq 3$ für $j = 1, \dots, m$.

- Durch Addition von

$$\sum_{b_j \leq 2} v_j + \sum_{b_j = 1} v'_j$$

erhalten wir w .

SubsetSum ist NP-vollständig

Beweis von $f(F) \in \text{SUBSETSUM} \Rightarrow F \in 3\text{-SAT}$

- Sei $S = P \cup N \cup I \cup J$ eine Auswahlmenge für $f(F)$ mit

$$\sum_{i \in P} u_i + \sum_{i \in N} u'_i + \sum_{j \in I} v_j + \sum_{j \in J} v'_j = \underbrace{3 \cdots 3}_{m\text{-mal}} \underbrace{1 \cdots 1}_{n\text{-mal}}.$$

- Da die Teilsumme $\sum_{j \in I} v_j + \sum_{j \in J} v'_j$ die Form $c_1 \cdots c_m 0 \cdots 0$ mit $c_j \leq 2$ hat, muss die Teilsumme $\sum_{i \in P} u_i + \sum_{i \in N} u'_i$ die Form $b_1 \cdots b_m 1 \cdots 1$ mit $b_j \geq 1$ haben.
- Da keine Überträge auftreten, muss also $P = \{1, \dots, n\} - N$ sein, und jede Klausel C_j muss mindestens ein Literal aus der Menge $\{x_i \mid i \in P\} \cup \{\bar{x}_i \mid i \in N\}$ enthalten.
- Folglich erfüllt folgende Belegung $a_1 \cdots a_n$ die Formel F :

$$a_i = \begin{cases} 1, & i \in P, \\ 0, & i \in N. \end{cases}$$

- Damit haben wir die Korrektheit von f gezeigt. □

Ganzzahlige lineare Programmierung

In vielen Anwendungen tritt das Problem auf, eine ganzzahlige Lösung für ein System linearer Ungleichungen zu finden.

Ganzzahlige Programmierung (IP; *integer programming*)

Gegeben: Eine ganzzahlige $m \times n$ Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ und ein ganzzahliger Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$.

Gefragt: Existiert ein ganzzahliger Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ mit

$$A\mathbf{x} \geq \mathbf{b},$$

wobei \geq komponentenweise zu verstehen ist.

Satz

IP ist NP-hart.

Ganzzahlige lineare Programmierung

Reduktion von 3-SAT auf IP

- Sei $F = \{C_1, \dots, C_m\}$ mit $C_j = \{l_{j1}, \dots, l_{jk_j}\}$ für $j = 1, \dots, m$ eine 3-KNF-Formel über den Variablen x_1, \dots, x_n .
- Wir transformieren F in ein Ungleichungssystem $A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$ für den Lösungsvektor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$, das
 - für $i = 1, \dots, n$ die vier Ungleichungen

$$x_i + \bar{x}_i \geq 1, \quad -x_i - \bar{x}_i \geq -1, \quad x_i \geq 0, \quad \bar{x}_i \geq 0 \quad (*)$$

- und für jede Klausel $C_j = \{l_{j1}, \dots, l_{jk_j}\}$ folgende Ungleichung enthält:

$$l_{j1} + \dots + l_{jk_j} \geq 1. \quad (**)$$

(Ganzzahlige) lineare Programmierung

Reduktion von 3-SAT auf IP

- Wir transformieren F in ein Ungleichungssystem $A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$ für den Lösungsvektor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$, das für $i = 1, \dots, n$
 - die vier Ungleichungen

$$x_i + \bar{x}_i \geq 1, \quad -x_i - \bar{x}_i \geq -1, \quad x_i \geq 0, \quad \bar{x}_i \geq 0 \quad (*)$$

- und für jede Klausel $C_j = \{l_{j1}, \dots, l_{jk_j}\}$ folgende Ungleichung enthält:

$$l_{j1} + \dots + l_{jk_j} \geq 1. \quad (**)$$

- Die Ungleichungen $(*)$ sind für ganzzahlige x_i, \bar{x}_i genau dann erfüllt, wenn x_i den Wert 0 und \bar{x}_i den Wert 1 hat oder umgekehrt.
- Die Klauselungleichungen $(**)$ stellen sicher, dass mindestens ein Literal in jeder Klausel C_j wahr wird.
- Nun ist leicht zu sehen, dass jede Lösung \mathbf{x} von $A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$ einer erfüllenden Belegung von F entspricht und umgekehrt.



(Ganzzahlige) lineare Programmierung

Bemerkungen zu IP

- Es ist nicht leicht zu sehen, dass IP in NP entscheidbar ist.
- Ein nichtdeterministischer Algorithmus kann zwar eine Lösung raten, aber a priori ist nicht klar, ob eine Lösung \mathbf{x} ex., deren Binärkodierung polynomiell in der Länge der Eingabe (A, \mathbf{b}) ist.
- Mit Methoden der linearen Algebra lässt sich jedoch zeigen, dass jede lösbare IP-Instanz (A, \mathbf{b}) auch eine Lösung \mathbf{x} hat, deren Kodierung polynomiell in der Länge von (A, \mathbf{b}) ist.
- Wenn wir nicht verlangen, dass die Lösung \mathbf{x} der IP-Instanz ganzzahlig ist, dann spricht man von einem **linearen Programm**.
- Für **LP** (Lineare Programmierung) gibt es Polynomialzeitalgorithmen (von Khachiyan 1979 und von Karmarkar 1984).

Matchings und der Heiratsatz

Das Heiratsproblem

- Sei V eine Gruppe von heiratswilligen Personen.
- Wir verbinden $u, w \in V$ durch eine Kante, falls aus Sicht von u und w die Möglichkeit einer Heirat zwischen u und w besteht.
- Sind Viehlen ausgeschlossen, so lässt sich jedes mögliche Heiratsarrangement durch ein Matching beschreiben.

Definition

Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

- Zwei Kanten $e, e' \in E$ heißen **unabhängig**, falls $e \cap e' = \emptyset$ ist.
- Eine Kantenmenge $M \subseteq E$ heißt **Matching** in G , falls die Kanten in M paarweise unabhängig sind.

Matchings und der Heiratssatz

Definition

Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

- Zwei Kanten $e, e' \in E$ heißen **unabhängig**, falls $e \cap e' = \emptyset$ ist.
- Eine Kantenmenge $M \subseteq E$ heißt **Matching** in G , falls die Kanten in M paarweise unabhängig sind.
- Analog lassen sich Matchings $M \subseteq E$ in einem **d -uniformen Hypergraphen** $G = (V, E)$ mit $E \subseteq \binom{V}{d}$ definieren.
- Die **Matchingzahl** von G ist

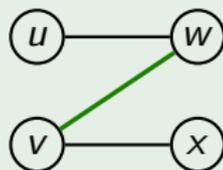
$$\mu(G) = \max\{\|M\| \mid M \text{ ist ein Matching in } G\}.$$

- Ein Matching M der Größe $\|M\| = \mu(G)$ heißt **optimal**.
- M heißt **gesättigt**, falls $M \cup \{e\}$ für keine Kante $e \in E \setminus M$ ein Matching ist.
- Ein Matching M heißt **perfekt**, falls $\|M\| = \lfloor \|V\|/d \rfloor$ ist.

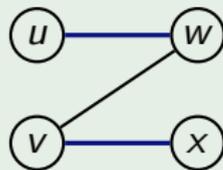
Matchings und der Heiratssatz

Beispiel

Ein gesättigtes Matching muss nicht optimal sein:



M



M'

- Das Matching $M = \{\{v, w\}\}$ ist gesättigt, da es sich nicht zu einem größeren Matching erweitern lässt.
- M ist jedoch nicht optimal, da $M' = \{\{u, w\}, \{v, x\}\}$ größer ist.
- Die Greedy-Methode, ausgehend von $M = \emptyset$ solange Kanten zu M hinzuzufügen, bis sich M nicht mehr zu einem größeren Matching erweitern lässt, funktioniert also i.a. nicht.

Matchings und der Heiratssatz

Falls beim Heiratsproblem Homoeihen ausgeschlossen sind, ist der resultierende Graph $G = (V, E)$ bipartit.

Definition

- Sei $G = (V, E)$ ein Graph und seien $U, W \subseteq V$. Dann bezeichne

$$E(U, W) = \left\{ \{u, w\} \in E \mid u \in U, w \in W \right\}$$

die Menge aller Kanten zwischen U und W in G .

- G heißt **bipartit**, falls sich V in zwei Mengen U und W mit $E(U, W) = E$ zerlegen lässt.
- In diesem Fall notieren wir G auch in der Form $G = (U, W, E)$.

Matchingprobleme

d -dimensionales Matching (d -MATCH)

Gegeben: Ein d -uniformer Hypergraph G und eine Zahl $k \geq 1$.

Gefragt: Hat G ein Matching M der Größe $\|M\| \geq k$?

d -dimensionales perfektes Matching (d -PERFECTMATCH)

Gegeben: Ein d -uniformer Hypergraph G .

Gefragt: Hat G ein perfektes Matching?

Im Fall $d = 2$ schreiben wir auch einfach **MATCH** bzw. **PERFECTMATCH**.

Bipartites Matching (BIMATCH)

Gegeben: Ein bipartiter Graph G und eine Zahl $k \geq 1$.

Gefragt: Hat G ein Matching M der Größe $\|M\| \geq k$?

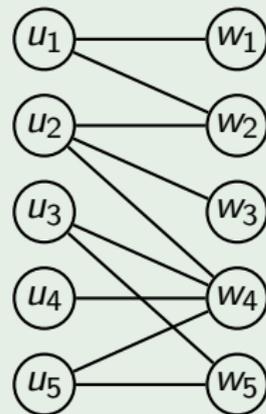
Satz

- d -MATCH, d -PERFECTMATCH und BIMATCH sind für $d \leq 2$ in P entscheidbar.
- Für $d \geq 3$ sind d -MATCH und d -PERFECTMATCH NP-vollständig.

Bipartites Matching und der Heiratssatz

Beispiel

- Der bipartite Graph G enthält ein Matching M der Größe



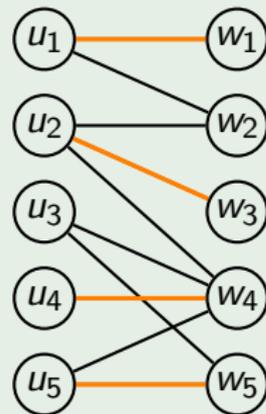
$$G = (U, W, E)$$



Bipartites Matching und der Heiratssatz

Beispiel

- Der bipartite Graph G enthält ein Matching M der Größe 4.



$$G = (U, W, E)$$

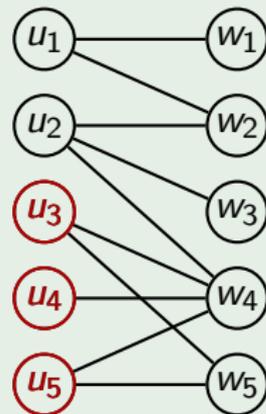


Bipartites Matching und der Heiratsatz

Beispiel

- Der bipartite Graph G enthält ein Matching M der Größe 4.
- Die Nachbarschaft von $A = \{u_3, u_4, u_5\}$ ist

$$N(A) = \quad .$$



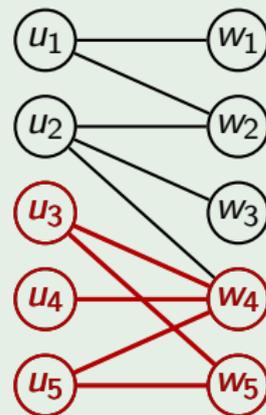
$$G = (U, W, E)$$



Bipartites Matching und der Heiratsatz

Beispiel

- Der bipartite Graph G enthält ein Matching M der Größe 4.
- Die Nachbarschaft von $A = \{u_3, u_4, u_5\}$ ist $N(A) = \{w_4, w_5\}$.



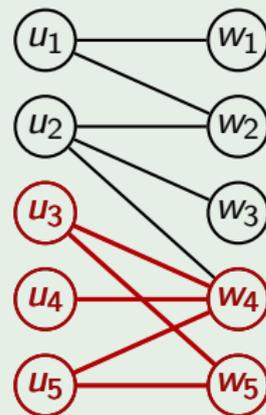
$$G = (U, W, E)$$



Bipartites Matching und der Heiratsatz

Beispiel

- Der bipartite Graph G enthält ein Matching M der Größe 4.
- Die Nachbarschaft von $A = \{u_3, u_4, u_5\}$ ist
$$N(A) = \{w_4, w_5\}.$$
- Daher kann jedes Matching höchstens 2 der 3 Knoten in A



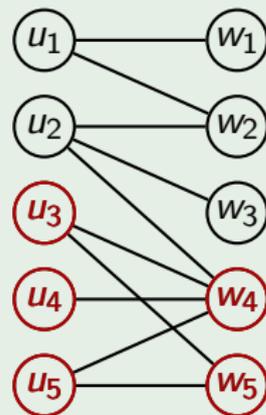
$G = (U, W, E)$



Bipartites Matching und der Heiratsatz

Beispiel

- Der bipartite Graph G enthält ein Matching M der Größe 4.
- Die Nachbarschaft von $A = \{u_3, u_4, u_5\}$ ist
$$N(A) = \{w_4, w_5\}.$$
- Daher kann jedes Matching höchstens 2 der 3 Knoten in A und somit höchstens 4 der 5 Knoten in U überdecken.



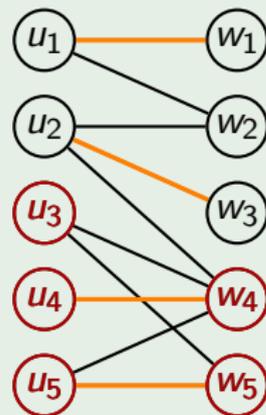
$$G = (U, W, E)$$



Bipartites Matching und der Heiratssatz

Beispiel

- Der bipartite Graph G enthält ein Matching M der Größe 4.
- Die Nachbarschaft von $A = \{u_3, u_4, u_5\}$ ist $N(A) = \{w_4, w_5\}$.
- Daher kann jedes Matching höchstens 2 der 3 Knoten in A und somit höchstens 4 der 5 Knoten in U überdecken.
- Dies zeigt, dass M optimal ist.



$G = (U, W, E)$



Bipartites Matching und der Heiratssatz

- Sei $A \subseteq U$ beliebig und sei M ein beliebiges Matching.
- Da M höchstens $\|N(A)\|$ Knoten in A überdecken kann, gilt

$$\|M\| \leq \|U - A\| + \|N(A)\| = \|U\| - (\|A\| - \|N(A)\|).$$

- Folglich ist $\mu(G) \leq \|U\| - \max_{A \subseteq U} (\|A\| - \|N(A)\|)$.

Frage: Ist diese Schranke in jedem bipartiten Graphen scharf?

Anders ausgedrückt: Lässt sich die Optimalität von M immer durch Angabe einer Menge $A \subseteq U$ mit $\|U\| - \|M\| = \|A\| - \|N(A)\|$ beweisen?

Bipartites Matching und der Heiratssatz

Satz (Heiratssatz von Hall)

Sei $G = (U, W, E)$ ein bipartiter Graph. Dann gibt es in G genau dann ein Matching M der Größe $\|M\| = \|U\|$, wenn für alle Teilmengen $A \subseteq U$ gilt:

$$\|N(A)\| \geq \|A\|.$$

Allgemeiner gilt

$$\mu(G) = \|U\| - \max_{A \subseteq U} (\|A\| - \|N(A)\|).$$

Im Beweis des Heiratssatzes benutzen wir folgende Notation:

Für eine Knotenmenge $A \subseteq V$ und ein Matching M bezeichne

$$A_M^+ = \{u \in A \mid \exists v \in V : \{u, v\} \in M\}$$

die Menge aller von M in A überdeckten Knoten und

$$A_M^- = A - A_M^+$$

bezeichne die Menge aller von M in A nicht überdeckten Knoten.

Beweis des Heiratssatzes

- Sei $D = \max_{A \subseteq U} (\|A\| - \|N(A)\|)$.
- Wir konstruieren zu jedem Matching M der Größe $\|M\| < \|U\| - D$ ein Matching M' mit $\|M'\| > \|M\|$.
- Hierzu betrachten wir den gerichteten Graphen G_M , der aus G dadurch entsteht, dass wir alle **Matchingkanten** in M von W nach U und alle **übrigen Kanten** von U nach W orientieren.
- Angenommen, es ex. in G_M ein Pfad von U_M^- nach W_M^- :

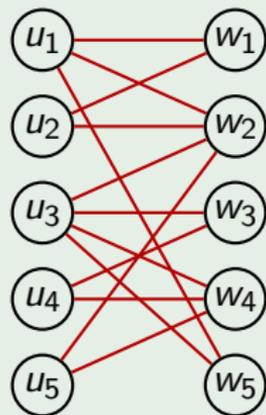
$$P: u_0 \rightarrow w_0 \rightarrow u_1 \rightarrow w_1 \rightarrow \dots \rightarrow u_{k-1} \rightarrow w_{k-1} \rightarrow u_k \rightarrow w_k$$

- Dann hat P ungerade Länge $2k + 1$, $k \geq 0$, und wir können M zu M' vergrößern, indem wir die k zu P gehörigen **Matchingkanten** aus M entfernen und dafür die $k + 1$ **übrigen Kanten** von P zu M hinzufügen:

$$M' = \left(M \setminus \left\{ \{w_i, u_{i+1}\} \mid 0 \leq i < k \right\} \right) \cup \left\{ \{u_i, w_i\} \mid 0 \leq i \leq k \right\}.$$

Beweis des Heiratssatzes

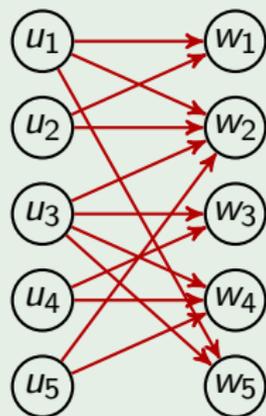
Beispiel



$$G = (U, W, E)$$

Beweis des Heiratssatzes

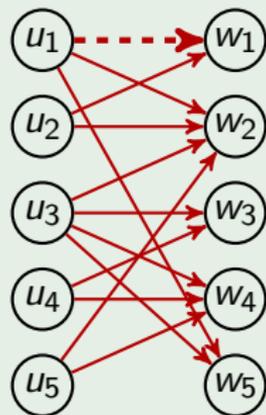
Beispiel



G_M für $M = \emptyset$

Beweis des Heiratssatzes

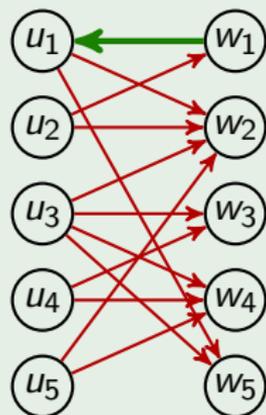
Beispiel



G_M für $M = \emptyset$

Beweis des Heiratssatzes

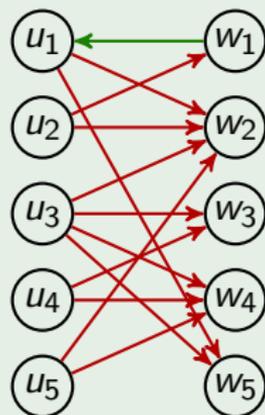
Beispiel



G_M für $M = \{\{u_1, w_1\}\}$

Beweis des Heiratssatzes

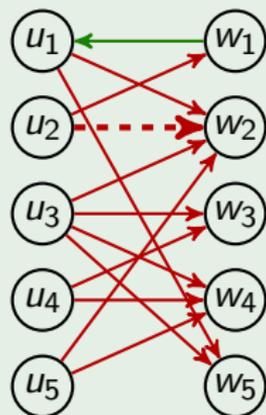
Beispiel



G_M für $M = \{\{u_1, w_1\}\}$

Beweis des Heiratssatzes

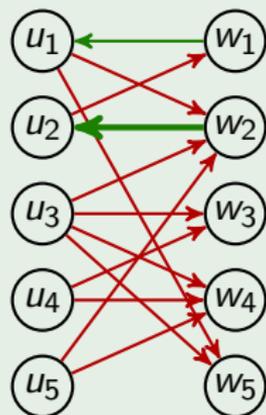
Beispiel



G_M für $M = \{\{u_1, w_1\}\}$

Beweis des Heiratssatzes

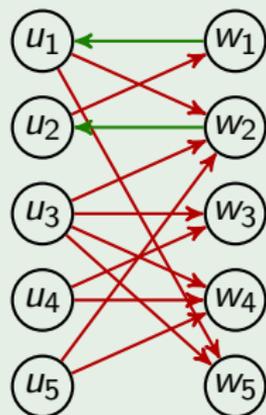
Beispiel



G_M für $M = \{\{u_1, w_1\}, \{u_2, w_2\}\}$

Beweis des Heiratssatzes

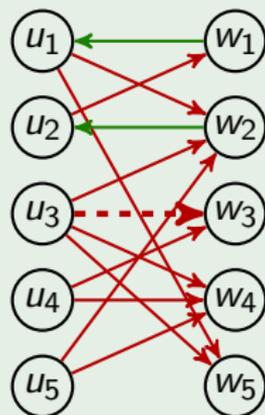
Beispiel



G_M für $M = \{\{u_1, w_1\}, \{u_2, w_2\}\}$

Beweis des Heiratssatzes

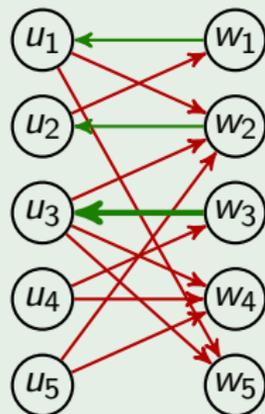
Beispiel



G_M für $M = \{\{u_1, w_1\}, \{u_2, w_2\}\}$

Beweis des Heiratssatzes

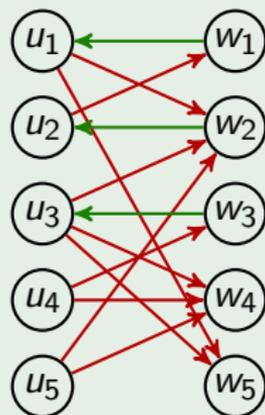
Beispiel



G_M für $M = \{\{u_1, w_1\}, \{u_2, w_2\}, \{u_3, w_3\}\}$

Beweis des Heiratssatzes

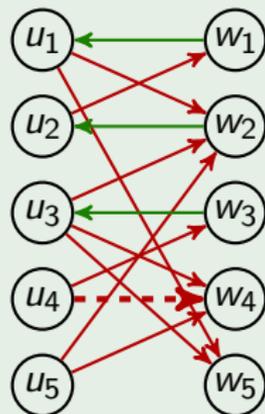
Beispiel



G_M für $M = \{\{u_1, w_1\}, \{u_2, w_2\}, \{u_3, w_3\}\}$

Beweis des Heiratssatzes

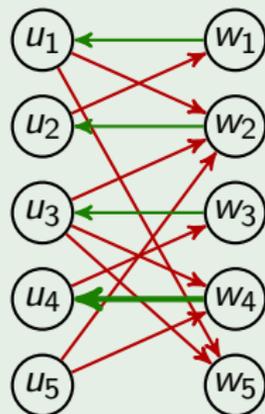
Beispiel



G_M für $M = \{\{u_1, w_1\}, \{u_2, w_2\}, \{u_3, w_3\}\}$

Beweis des Heiratssatzes

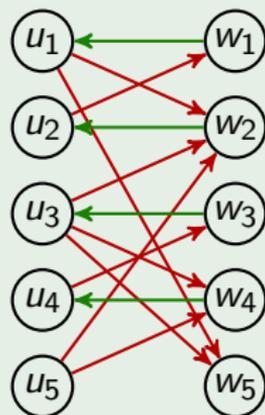
Beispiel



G_M für $M = \{\{u_1, w_1\}, \{u_2, w_2\}, \{u_3, w_3\}, \{u_4, w_4\}\}$

Beweis des Heiratssatzes

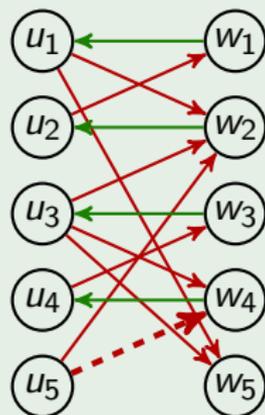
Beispiel



G_M für $M = \{\{u_1, w_1\}, \{u_2, w_2\}, \{u_3, w_3\}, \{u_4, w_4\}\}$

Beweis des Heiratssatzes

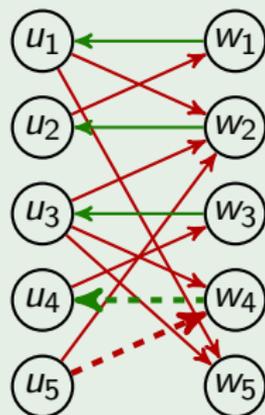
Beispiel



G_M für $M = \{\{u_1, w_1\}, \{u_2, w_2\}, \{u_3, w_3\}, \{u_4, w_4\}\}$

Beweis des Heiratssatzes

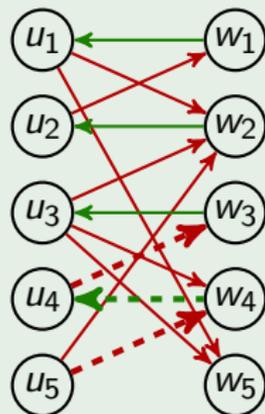
Beispiel



G_M für $M = \{\{u_1, w_1\}, \{u_2, w_2\}, \{u_3, w_3\}, \{u_4, w_4\}\}$

Beweis des Heiratssatzes

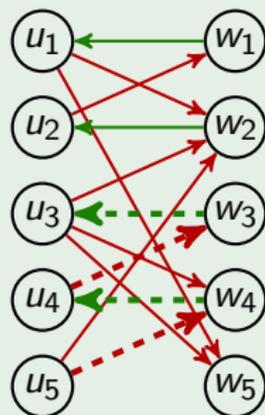
Beispiel



G_M für $M = \{\{u_1, w_1\}, \{u_2, w_2\}, \{u_3, w_3\}, \{u_4, w_4\}\}$

Beweis des Heiratssatzes

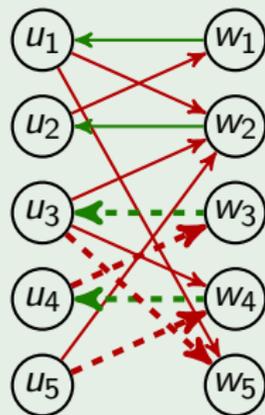
Beispiel



G_M für $M = \{\{u_1, w_1\}, \{u_2, w_2\}, \{u_3, w_3\}, \{u_4, w_4\}\}$

Beweis des Heiratssatzes

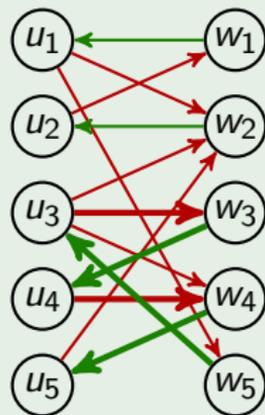
Beispiel



G_M für $M = \{\{u_1, w_1\}, \{u_2, w_2\}, \{u_3, w_3\}, \{u_4, w_4\}\}$

Beweis des Heiratssatzes

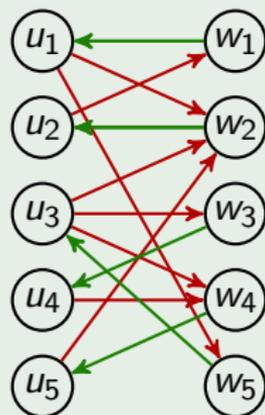
Beispiel



G_M für $M = \{\{u_1, w_1\}, \{u_2, w_2\}, \{u_3, w_5\}, \{u_4, w_3\}, \{u_5, w_4\}\}$

Beweis des Heiratssatzes

Beispiel



G_M für $M = \{\{u_1, w_1\}, \{u_2, w_2\}, \{u_3, w_5\}, \{u_4, w_3\}, \{u_5, w_4\}\}$



Beweis des Heiratssatzes

- Noch zu zeigen: $\|U_M^-\| \leq D$, falls G_M keinen Pfad von U_M^- nach W_M^- hat.
- Sei X die Menge aller in G_M von U_M^- aus erreichbaren Knoten.
- Da es keinen Pfad von U_M^- nach W_M^- gibt, folgt $X \cap W \subseteq W_M^+$.
- Da U_M^- in der Menge $A = X \cap U$ enthalten ist, ist $\|U_M^-\| = \|A\| - \|A_M^+\|$.
- Wegen $\|A\| - \|N(A)\| \leq D$ reicht es zu zeigen, dass $\|A_M^+\| \geq \|N(A)\|$ ist.
- Hierzu beweisen wir, dass $f = \{(u, w) \mid u \in A, \{u, w\} \in M\}$ eine surjektive Abbildung von A_M^+ in $N(A)$ ist.
- Da M ein Matching ist, ist f eine Abbildung von A_M^+ in $N(A)$.
- Es bleibt zu zeigen, dass $N(A) \subseteq \text{img}(f)$ ist.
- Sei also $w \in N(A)$ und sei $u' \in A$ mit $\{u', w\} \in E$.
- Falls $\{u', w\} \in M$ ist, folgt sofort $w \in \text{img}(f)$.
- Andernfalls ist mit u' auch w in X und somit in W_M^+ .
- Folglich existiert ein $u \in U$ mit $\{u, w\} \in M$.
- u ist sogar in A , da u in G_M von w aus erreichbar ist.

Bipartites Matching und der Heiratssatz

Korollar (zum Beweis des Heiratssatzes)

In bipartiten Graphen ist ein optimales Matching in Polynomialzeit berechenbar, d.h. $\text{BIMATCH} \in \text{P}$.

Zur Erinnerung: Für ein Matching M in G ist G_M der Digraph, der aus G dadurch entsteht, dass wir alle **Matchingkanten** in M von W nach U und die **übrigen Kanten** von U nach W orientieren.

Algorithmus zur Bestimmung eines optimalen Matchings

- 1 **Input:** Ein bipartiter Graph $G = (U, W, E)$
- 2 $M := \emptyset$
- 3 **while** \exists Pfad P von U_M^- nach W_M^- in G_M **do**
- 4 sei $P : u_0 \rightarrow w_0 \rightarrow u_1 \rightarrow \dots \rightarrow w_{k-1} \rightarrow u_k \rightarrow w_k$
- 5 $M := \left(M \setminus \left\{ \{w_i, u_{i+1}\} \mid 0 \leq i < k \right\} \right) \cup \left\{ \{u_i, w_i\} \mid 0 \leq i \leq k \right\}$
- 6 **Output:** M

Frage: Wie lässt sich P effizient berechnen?

3-dimensionales perfektes Matching ist NP-vollständig

Satz

3-PERFECTMATCH \in NPC.

Beweis

- 3-PERFECTMATCH \in NP ist klar. Wir reduzieren von 3-SAT.
- Sei $F = \{C_1, \dots, C_m\}$ eine 3-KNF Formel über x_1, \dots, x_n .
- Betrachte den Hypergraphen $G_F = (V, E)$ mit der Knotenmenge

$$V = \{x_i^j, \bar{x}_i^j, a_i^j, b_i^j, c_j, c'_j, g_k, g'_k \mid i \in [n], j \in [m], k \in [m(n-1)]\},$$

wobei $[l] = \{1, \dots, l\}$ ist, und der Hyperkantenmenge

$$E = \left\{ \{x_i^j, a_i^j, b_i^j\}, \{\bar{x}_i^j, b_i^j, a_i^{j+1 \bmod m}\} \mid i \in [n], j \in [m] \right\} \\ \cup \left\{ \{x_i^j, c_j, c'_j\} \mid x_i \in C_j \right\} \cup \left\{ \{\bar{x}_i^j, c_j, c'_j\} \mid \bar{x}_i \in C_j \right\} \\ \cup \left\{ \{x_i^j, g_k, g'_k\}, \{\bar{x}_i^j, g_k, g'_k\} \mid i \in [n], j \in [m], k \in [m(n-1)] \right\}.$$

Reduktion von 3-SAT auf 3-PERFECTMATCH

- Falls F erfüllbar ist, hat G_F ein (perfektes) Matching M der Größe $2nm$, wovon
 - nm Hyperkanten alle $2nm$ a - und b -Knoten sowie nm der x -Knoten (und zwar alle Knoten x_i^j , falls $x_i = 0$ und alle Knoten \bar{x}_i^j , falls $x_i = 1$ ist),
 - m Hyperkanten alle $2m$ c -Knoten sowie weitere m x -Knoten und
 - $m(n-1)$ Hyperkanten alle $2m(n-1)$ g -Knoten sowie die restlichen $m(n-1)$ x -Knoten überdecken.
- Umgekehrt ist auch leicht zu sehen, dass sich aus jedem perfektem Matching M von G eine Belegung a mit $F(a) = 1$ ableiten lässt:
 - Setze die Variable x_i genau dann gleich 1, wenn M Kanten der Form $\{\bar{x}_i^j, b_i^j, a_i^{j+1 \bmod m}\}$ enthält.
 - Da diese Kanten alle falschen Literalknoten überdecken, müssen die Klauselknoten c_j, c'_j durch wahre Literalknoten überdeckt werden.
- Zudem ist leicht zu sehen, dass die Funktion $F \mapsto G_F$ in FP ist. □

SAT als Optimierungsproblem

- Ist eine KNF-Formel F nicht erfüllbar, so kann es nützlich sein, herauszufinden, wieviele Klauseln in F maximal erfüllbar sind.
- Die Schwierigkeit dieses Optimierungsproblems lässt sich durch folgendes Entscheidungsproblem charakterisieren.

MAX- k -SAT:

Gegeben: Eine Formel F in k -KNF und eine Zahl l .

Gefragt: Existiert eine Belegung a , die mindestens l Klauseln in F erfüllt?

Hierbei können Klauseln in F auch mehrfach vorkommen.

Satz

- 1 MAX-1-SAT \in P.
- 2 MAX-2-SAT \in NPC.

SAT als Optimierungsproblem

Reduktion von 3-SAT auf MAX-2-SAT

- Für eine Dreierklausel $C = \{l_1, l_2, l_3\}$, in der die Variable v nicht vorkommt, sei $G(l_1, l_2, l_3, v)$ die 2-KNF Formel, die aus folgenden 10 Klauseln besteht:

$$\{l_1\}, \{l_2\}, \{l_3\}, \{v\}, \{\bar{l}_1, \bar{l}_2\}, \{\bar{l}_2, \bar{l}_3\}, \{\bar{l}_1, \bar{l}_3\}, \{l_1, \bar{v}\}, \{l_2, \bar{v}\}, \{l_3, \bar{v}\}$$

- Die folgenden 3 Eigenschaften von G sind leicht zu verifizieren:
 - Keine Belegung von G erfüllt mehr als 7 Klauseln von G .
 - Jede Belegung a von C mit $C(a) = 1$ ist zu einer Belegung a' von G erweiterbar, die 7 Klauseln von G erfüllt.
 - Keine Belegung a von C mit $C(a) = 0$ ist zu einer Belegung a' von G erweiterbar, die 7 Klauseln von G erfüllt.
- Sei F eine 3-KNF-Formel über x_1, \dots, x_n mit m Klauseln.
- Wir nehmen an, dass $C_j = \{l_{j1}, l_{j2}, l_{j3}\}$, $j = 1, \dots, k$, die Dreier- und C_{k+1}, \dots, C_m die Einer- und Zweierklauseln von F sind.

SAT als Optimierungsproblem

Reduktion von 3-SAT auf MAX-2-SAT

- Wir nehmen an, dass $C_j = \{l_{j1}, l_{j2}, l_{j3}\}$, $j = 1, \dots, k$, die Dreier- und C_{k+1}, \dots, C_m die Einer- und Zweierklauseln von F sind.
- Betrachte die 2-KNF Formel F' mit $10k + (m - k)$ Klauseln ist, die wie folgt aus F entsteht:
 - Ersetze jede Dreierklausel $C_j = \{l_{j1}, l_{j2}, l_{j3}\}$ in F durch die 10 Klauseln der 2-KNF-Formel $G_j = G(l_{j1}, l_{j2}, l_{j3}, v_j)$.
- Dann gilt
$$F \in 3\text{-SAT} \Leftrightarrow (F', m + 6k) \in \text{MAX-2-SAT}.$$
- Die Vorwärtsrichtung ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, dass jede erfüllende Belegung a für F zu einer Belegung a' für F' erweiterbar ist, die $7k + m - k = m + 6k$ Klauseln von F' erfüllt.

SAT als Optimierungsproblem

Reduktion von 3-SAT auf MAX-2-SAT

- Dann gilt

$$F \in \text{3-SAT} \Leftrightarrow (F', m + 6k) \in \text{MAX-2-SAT}.$$

- Die Vorwärtsrichtung ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, dass jede erfüllende Belegung a für F zu einer Belegung a' für F' erweiterbar ist, die $7k + m - k = m + 6k$ Klauseln von F' erfüllt.
- Für die Rückwärtsrichtung sei a eine Belegung, die mindestens $m + 6k$ Klauseln von F' erfüllt.
- Da in jeder 10er-Gruppe G_j , $j = 1, \dots, k$, maximal 7 Klauseln erfüllbar sind, muss a in jeder 10er-Gruppe genau 7 Klauseln und zudem alle Klauseln C_j für $j = k + 1, \dots, m$ erfüllen.
- Dies ist aber nur möglich, wenn a alle Klauseln C_j von F erfüllt.
- Zudem ist leicht zu sehen, dass $g : F \mapsto (F', m + 6k)$ in FP berechenbar ist, woraus $\text{3-SAT} \leq^P \text{MAX-2-SAT}$ folgt. □