

Übungsblatt 12

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 20.–23. 01. 2009
 Abgabe der schriftlichen Lösungen bis zum 27. 1. 2009

Aufgabe 92 Reduzieren Sie PCP auf MPCP. *mündlich*

Aufgabe 93 Zeigen Sie die Entscheidbarkeit folgender Probleme. *mündlich*

- (a) Das Äquivalenz-, Schnitt- und Inklusionsproblem für reguläre Sprachen.
- (b) Das Leerheitsproblem für kontextfreie Sprachen.

Aufgabe 94 *mündlich*

- (a) Zeigen Sie, dass PCP über einem unären Alphabet entscheidbar ist.
- (b) Sei $PCP^{\leq k}$ die Einschränkung von PCP auf Instanzen mit höchstens k Wortpaaren. Ist $PCP^{\leq k}$ für jedes $k \geq 1$ entscheidbar? Begründen Sie.

Aufgabe 95 *mündlich*

Betrachten Sie die 1-DTM $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ mit $Z = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}$, $E = \{q_2\}$ und den Anweisungen

$$\begin{array}{ll} \delta: & q_00 \rightarrow q_11R \quad (1) & q_10 \rightarrow q_00R \quad (4) \\ & q_01 \rightarrow q_10R \quad (2) & q_11 \rightarrow q_00L \quad (5) \\ & q_0\sqcup \rightarrow q_2\sqcup N \quad (3) & q_1\sqcup \rightarrow q_10L \quad (6) \end{array}$$

- (a) Geben Sie die Rechnung an, die M bei Eingabe $w = 0110$ ausführt.
- (b) Sei $\Sigma' = \Gamma \cup Z \cup \{\langle, |, \rangle\}$ und sei f die in der Vorlesung definierte Funktion, die die Sprache $L(M)$ auf die Sprache $MPCP_{\Sigma'}$ reduziert. Geben Sie für eine beliebige Eingabe $w \in \Sigma^*$ explizit die zugehörige MPCP-Instanz $f(w)$ an.
- (c) Welche Lösungen hat die MPCP-Instanz $f(0110)$? Begründen Sie.

Aufgabe 96 *mündlich*

Zeigen Sie, dass folgende PCP-Variante PCP^* entscheidbar ist.

Gegeben: Eine PCP-Instanz $\begin{pmatrix} x_1 \cdots x_k \\ y_1 \cdots y_k \end{pmatrix}$.

Gefragt: Gibt es Indexfolgen i_1, \dots, i_m und j_1, \dots, j_n mit $m, n \geq 1$ und $x_{i_1} \cdots x_{i_m} = y_{j_1} \cdots y_{j_n}$?

Hinweis: Reduzieren Sie PCP^* auf das Schnittproblem für reguläre Sprachen.

Aufgabe 97 Zeigen Sie:

10 Punkte

Die Komplexitätsklassen P und NP sind abgeschlossen unter

- (a) Vereinigung, *(mündlich)*
- (b) Schnitt, *(mündlich)*
- (c) Produkt und *(mündlich)*
- (d) Sternhülle. *(10 Punkte)*

Aufgabe 98

20 Punkte

Für eine Folge $s = (x_1, \dots, x_k)$ von Binärstrings x_i sei L_s die Sprache

$$\{a^{i_n} b \cdots a^{i_1} b x_{i_1} \cdots x_{i_n} \mid n \geq 1, 1 \leq i_1, \dots, i_n \leq k\}$$

und für zwei solche Folgen s und t sei $L_{s,t}$ die Sprache $L_s \cap L_t$. Zeigen Sie:

- (a) Für jede Folge s ist L_s in DCFL. *(10 Punkte)*
 - (b) Das Schnittproblem für DPDAs ist RE-vollständig. *(5 Punkte)*
 - (c) Das Problem, für eine gegebene kontextfreie Grammatik G zu entscheiden, ob $L(G) = L(G)^R$ ist, ist unentscheidbar. *(5 Punkte)*
- Hinweis:* Zeigen Sie, dass $L_{s,t} \neq L_{s,t}^R$ ist, außer wenn $L_{s,t} = \emptyset$ ist.

Für die schriftliche Lösung von Aufgabe 99 werden bis zu 20 Bonuspunkte vergeben.

Aufgabe 99

+20 Punkte

- (a) Die Quersumme einer PCP-Lösung $\alpha = (i_1, \dots, i_n)$ sei $s = \sum_{j=1}^n i_j$. Berechnen Sie die minimale Lösungslänge n_{min} sowie die minimale Quersumme s_{min} für

$$I = \begin{pmatrix} aaba & baab & a \\ a & aa & aab \end{pmatrix}.$$

Hinweis: n_{min} ist eine 3-stellige Dezimalzahl. *(+5 Punkte)*

- (b) Zeigen Sie, dass folgende PCP-Variante PCP^+ entscheidbar ist.

Gegeben: Eine PCP-Instanz $\begin{pmatrix} x_1 \cdots x_k \\ y_1 \cdots y_k \end{pmatrix}$.

Gefragt: Gibt es Indexfolgen i_1, \dots, i_n und j_1, \dots, j_n mit $n \geq 1$ und $x_{i_1} \cdots x_{i_n} = y_{j_1} \cdots y_{j_n}$?

Hinweis: Reduzieren Sie das Komplement von PCP^+ auf das Leerheitsproblem für kontextfreie Sprachen. *(+15 Punkte)*