

Übungsblatt 5

Aufgabe 17 Zeigen Sie, dass eine Sprache L genau dann in $\text{NTIME}(t) \cap \text{co-NTIME}(t)$ liegt, falls eine $t(n)$ -zeitbeschränkte NTM M mit $L(M) = L$ existiert, die auf allen Eingaben strong ist.

Aufgabe 18 (Compression Theorem) Zeigen Sie: Es gibt eine rekursive Sprache $L \subseteq \{0, 1\}^*$, so dass es für jede $s(n)$ -platzbeschränkte DTM M mit $L(M) = L$ eine DTM M' gibt mit $L(M') = L$ und $\text{space}_{M'}(x) \leq \log s(|x|)$ für fast alle Eingaben $x \in \{0, 1\}^*$.

Hinweis: Definieren Sie die Funktion S durch $S(n) = 2$ für $n \leq 0$ und $S(n+1) = 2^{S(n)}$ für $n > 0$, und konstruieren Sie bezüglich einer geeigneten Aufzählung M_1, M_2, \dots aller DTMs eine Sprache $L \subseteq \{0\}^*$ mit den folgenden Eigenschaften:

- Falls M_i die Sprache L entscheidet, so gilt $s_i(n) \geq S(n-i)$ für fast alle n ($s_i(n)$ bezeichnet den maximalen Platzverbrauch von M_i bei Eingaben der Länge n).
- Für alle $k \geq 1$ gibt es eine TM M_i mit $S_i(n) \leq S(n-k)$, die L entscheidet.

Aufgabe 19 (Union Theorem) Zeigen Sie: Es gibt eine rekursive Funktion S mit $\text{DSPACE}(S(n)) = \text{PSPACE}$. *Hinweis:* Definieren Sie $S(n)$ bezüglich einer Aufzählung M_1, M_2, \dots aller DTMs so dass die beiden folgenden Bedingungen gelten:

- Für alle k gilt $S(n) \geq n^k$ für fast alle n .
- Falls der Platzbedarf $S_i(n)$ von M_i für alle k die Bedingung $S_i(n) > n^k$ für unendlich viele n erfüllt, dann gilt auch $S_i(n) > S(n)$ für unendlich viele n .

Aufgabe 20 (schriftlich, 10 Punkte)

Beweisen Sie den Platzhierarchiesatz: Ist f eine echte Komplexitätsfunktion und gilt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0,$$

dann ist

$$\text{DSPACE}(f(n)) \setminus \text{DSPACE}(g(n)) \neq \emptyset.$$