# Kernsätze aus der Vorlesung 'Logik in der Informatik'

Dorian Weber

21. Februar 2008

## Inhaltsverzeichnis

# 1 Logik der ersten Stufe

## 1.1 Koinzidenzlemma

### formal

Seien $\sigma$, $\sigma_1$, $\sigma_2$ Symbolmengen mit $\sigma \subseteq \sigma_1 \cap \sigma_2$ und für $i = 1, 2$ sei $\mathcal{I}_i = (\mathcal{A}_i, \beta_i)$ eine $\sigma_i$-Interpretation.

1. Sei $t \in T_\sigma$, so dass $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ auf allen in $t$ vorkommenden Symbolen und Variablen übereinstimmen. Dann gilt $[\![t]\!]^{\mathcal{I}_1} = [\![t]\!]^{\mathcal{I}_2}$.
2. Sei $\varphi \in L_\sigma$, so dass $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ auf allen in $\varphi$ vorkommenden Symbolen und auf allen freien Variablen von $\varphi$ übereinstimmen. Dann gilt

$$\mathcal{I}_1 \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{I}_2 \models \varphi$$

### intuitiv

Die Auswertung einer Formel hängt nur von der Belegung der auftretenden freien Variablen ab. Die anderen (nicht-auftauchenden) Variablen können beliebig belegt werden.

## 1.2 Isomorphielemma

### formal

Seien $\varphi$ ein $\sigma$-Satz und $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ isomorphe $\sigma$-Strukturen. Dann gilt

$$\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi$$

### intuitiv

Zueinander isomorphe (strukturgleiche) Strukturen erfüllen die gleichen Formeln.

## 1.3 Substitutionslemma

### formal

Seien $S$ eine $\sigma$-Substitution und $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine $\sigma$-Interpretation mit $\mathrm{var}(S) \subseteq \mathrm{def}(\beta)$.

1. Für alle $\sigma$-Terme $t$ mit $\mathrm{var}(t) \subseteq \mathrm{def}(\beta) \cup \mathrm{def}(S)$ gilt:

$$[\![tS]\!]^{\mathcal{I}} = [\![t]\!]^{\mathcal{I}S}$$

2. Für alle $\sigma$-Formeln $\varphi$ mit $\text{frei}(\varphi) \subseteq \text{def}(\beta) \cup \text{def}(S)$ gilt:

$$\mathcal{I} \models \varphi S \Leftrightarrow \mathcal{I}S \models \varphi$$

**intuitiv**

Es ist für die Auswertung von Termen und Formeln egal, ob die Substitution im Term/in der Formel durchgeführt wird, oder stattdessen in der Belegung.

# 2 Der Vollständigkeitssatz

## 2.1 Eigenschaften widerspruchsfreier/-voller Mengen

**formal**

1. $\Phi \subseteq L_\sigma$ ist genau dann widerspruchsfrei, wenn ein $\varphi \in L_\sigma$ existiert, so dass $\Phi \nvdash \varphi$.
2. $\Phi \subseteq L_\sigma$ ist genau dann widerspruchsvoll, wenn $\Phi \vdash \bot$.
3. Seien $\Phi \subseteq L_\sigma$ und $\varphi \in L_\sigma$. Dann gilt:
   (a) $\Phi \vdash \varphi \Leftrightarrow \Phi \cup \{\neg\varphi\}$ ist widerspruchsvoll
   (b) $\Phi \vdash \neg\varphi \Leftrightarrow \Phi \cup \{\varphi\}$ ist widerspruchsvoll
   (c) Wenn $\Phi$ widerspruchsfrei ist, so ist $\Phi \cup \{\varphi\}$ oder $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ widerspruchsfrei.

**intuitiv**

Folgt alles, weil aus Widersprüchlichem Beliebiges folgt (ex falso quodlibet).

## 2.2 Syntaktisches Endlichkeitslemma

**formal**

$\Phi \subseteq L_\sigma$ ist genau dann widerspruchsfrei, wenn alle endlichen Teilmengen von $\Phi$ widerspruchsfrei sind.

**intuitiv**

Wenn es eine endliche Teilmenge gäbe, die widerspruchsvoll ist, obwohl die gesamte Formelmenge nicht widerspruchsvoll ist, wäre $\bot$ daraus ableitbar und damit auch aus der ursprünglichen Formelmenge, was im Widerspruch dazu steht, dass sie nicht widerspruchsvoll war.

Wenn alle endlichen Teilmengen widerspruchsfrei sind, aber die gesamte Formelmenge $\Phi$ nicht, dann gilt $\Phi \vdash \bot$. Demnach gibt es eine endliche Ableitung, die das erzeugt und widersprüchlich ist, im Widerspruch zur Annahme, alle endlichen Teilmengen seien widerspruchsfrei.

## 2.3 Vollständigkeitssatz

### formal

Sei $\Phi \subseteq L_\sigma$ und $\varphi \in L_\sigma$. Dann gilt:

1. $\Phi \vdash \varphi \Leftrightarrow \Phi \vDash \varphi$

2. $\Phi$ ist widerspruchsfrei $\Leftrightarrow$ $\Phi$ ist erfüllbar

Gilt für beliebige Symbolmengen. In der Vorlesung allerdings nur für abzählbare Symbolmengen bewiesen.

### intuitiv

1. Alles, was sich aus einer Formelmenge im Gentzenkalkül ableiten lässt, folgt auch (Korrektheit). Alles was folgt, lässt sich im Gentzenkalkül ableiten (Vollständigkeit).

2. Wenn es eine Formelmenge gibt, die widerspruchsfrei ist, dann existiert auch ein Modell dafür. Jedes Modell ist widerspruchsfrei (sonst gäbe es eine Interpretation, die eine Formel und ihr Negat erfüllt).

### Beweisverlauf

Die Korrektheit folgt aus der Korrektheit der Axiome und Regeln des Gentzenkalküls. Die Vollständigkeit folgt leicht daraus, dass eine widerspruchsfreie Formelmenge ein Modell hat (Behauptung 2).

Behauptung 2 folgt aus dem Erfüllbarkeitslemma (das nächste).

## 2.4 Erfüllbarkeitslemma/Satz von Henkin

Sei $\Phi \subseteq L_\sigma$ widerspruchsfrei. Dann ist $\Phi$ erfüllbar.

### Anmerkung

Der Beweis dieses Lemmas ist zentraler Bestandteil dieses Kapitels.

### Beweisverlauf

Ziel ist es, eine Struktur finden, die $\Phi$ erfüllt, wenn es widerspruchsfrei ist.
Dazu wird zunächst wird eine Termstruktur definiert, die als Träger die Terme über $L_\sigma$ beinhaltet ($T_\sigma$). Die Belegung der Terminterpretation bildet von den Variablen auf die Terme der Variablen ab (Identität). Diese Termstruktur erfüllt noch nicht die Gleichheit in Formeln, da nur zwei syntaktisch gleiche Terme gleich im Sinne des Gleichheitssymbols sind, allerdings auch zwei syntaktisch unterschiedliche Terme gleich sein könnten.

Deshalb wird es nötig, gleiche Terme auch gleich zu nennen.
Dazu wird eine Kongruenzrelation auf $T_\sigma$ konstruiert, die zwei Terme in einer Äquivalenzklasse unterbringt, wenn ihre Gleichheit syntaktisch aus $\Phi$ folgt.

Mittels der definierten Kongruenzrelation ist es nun möglich eine reduzierte Termstruktur zu definieren, die die Gleichheit beachtet. Der Träger ist dabei die Menge der Äquivalenzklassen der Terme. Diese Äquivalenzklassen werden nun einfach durch die gesamte Struktur- und Interpretationsdefinition gezogen. Für alle atomaren Formeln ist diese Struktur jetzt schon ein Modell.

Als nächstes wird sichergestellt, dass die Hülle von $\Phi$ auch wirklich abgeschlossen ist, d.h. dass gilt $\Phi \vdash \varphi$ oder $\Phi \vdash \neg\varphi, \forall\varphi$. Diese Eigenschaft nennt man Negationstreue.

Da $\exists x\varphi$ noch nicht beweist, dass für einen Term $t$ $\varphi\frac{t}{x}$ gilt, muss eine Formel dieser Bauart noch nicht im reduzierten Termmodell der Formelmenge $\Phi$ gelten. Daher werden nun Beispiele für $\Phi$ konstruiert, so dass für alle Formeln $\exists x\varphi \in L_\sigma$ ein Term $t \in T_\sigma$ existiert, so dass

$$\Phi \vdash \exists x\varphi \to \varphi\frac{t}{x}$$

Wenn eine Formelmenge negationstreu ist und außerdem Beispiele enthält, dann gilt das Erfüllbarkeitslemma. Bleibt zu zeigen, dass alle Formelmengen, die das nicht von vorneherein erfüllen, so modifiziert werden können, dass der Satz von Henkin anwendbar wird.

Um Beispiele zu erzeugen, werden alle $\sigma$-Formeln der Gestalt $\exists x\varphi$ aufgezählt (was möglich ist, weil wir eine abzählbare Symbolmenge voraussetzen) und zusätzliche Formeln der Gestalt $\exists x\varphi \to \varphi\frac{y}{x}$ konstruiert ($y$ ist dabei eine neue freie Variable, die weder in der Formelmenge $\Phi$ noch in der Formel $\varphi$ vorkommt). Nun werden alle diese Formeln mit der ursprünglichen Formelmenge $\Phi$ vereinigt und $\Psi$ genannt. Dieses $\Psi$ ist widerspruchsfrei, was per Induktion für alle endlichen Teilmengen gezeigt wird (und nach 2.2 dann bewiesen ist).

Die Negationstreue wird leicht erreicht, indem für jede Formel sie selbst oder ihr Negat zur Menge hinzugefügt wird.

Das Erfüllbarkeitslemma kann jetzt leicht bewiesen werden, indem zu jeder Formelmenge eine äquivalente konstruiert wird, die negationstreu ist und Beispiele enthält und dann der Satz von Henkin angewendet wird.

## 2.5 Kompaktheitssatz

### formal

1. Sei $\Phi \subseteq L_\sigma$. Dann ist $\Phi$ genau dann erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge von $\Phi$ erfüllbar ist.

2. Seien $\Phi \subseteq L_\sigma$ und $\psi \in L_\sigma$. Dann gilt genau dann $\Phi \models \psi$, wenn es eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ gibt, so dass $\Phi_0 \models \Psi$.

**intuitiv**

Auch bei unendlichen Formelmengen ist es nur eine endliche Teilmenge von Formeln, von der es abhängt, ob eine Formelmenge erfüllbar ist oder nicht.

Das ist praktisch ein Korollar aus dem Vollständigkeitssatz.

# 3 Grundlagen des automatischen Beweisens

## 3.1 Elimination von freien Variablen

**formal**

Für jede Symbolmenge $\sigma$ gibt es eine Symbolmenge $\tau$, so dass $L_\sigma$ erfüllbarkeitsreduzierbar ist auf $S_\sigma$.

Genauer sei $\tau := \sigma \cup \{c_0, c_1, \ldots\}$, wobei $c_0, c_1, \ldots$ Konstantensymbole sind, die in $\sigma$ nicht vorkommen.

Dann ist die Abbildung

$$\varphi(v_0, \ldots, v_n) \mapsto \varphi(c_0, \ldots, c_n)$$

eine Erfüllbarkeitsreduktion von $L_\sigma$ auf $S_\sigma$.

**intuitiv**

Alle Formeln mit freien Variablen lassen sich durch passend gewählte Konstanten ersetzen. Dadurch verschiebt man die "Bürde" der Definition der eigentlichen Werte für Formeln mit freien Variablen von der Formelebene auf die Strukturebene. Die Erfüllbarkeitsreduktion ist deshalb wichtig, weil wir uns nur noch für die Frage interessieren *ob* eine Formelmenge überhaupt erfüllbar ist und nicht mehr, welche Strukturen sie erfüllen.

## 3.2 Axiomatisierung der Gleichheit

**formal**

Sei $\sigma$ eine Symbolmenge und $E \notin \sigma$ ein zweistelliges Relationssymbol.

1. Sei

$$\kappa_{Aq,E} := \forall x\, Exx \wedge \forall x \forall y (Exy \rightarrow Eyx) \wedge \forall x \forall y \forall z (Exy \wedge Eyz \rightarrow Exz)$$

2. Für alle $k$-stelligen Funktionssymbole $f \in \sigma$ sei

$$\kappa_{f,E} := \forall x_1 \ldots \forall x_k \forall y_1 \ldots \forall y_k (Ex_1y_1 \wedge \ldots \wedge Ex_ky_k \rightarrow Efx_1 \ldots x_f fy_1 \ldots y_k)$$

3. Für alle $k$-stelligen Relationssymbole $R \in \sigma$ sei

$$\kappa_{R,E} := \forall x_1 \ldots \forall x_k \forall y_1 \ldots \forall y_k (Rx_1 \ldots x_k \wedge Ex_1y_1 \wedge \ldots \wedge Ex_ky_k \rightarrow Ry_1 \ldots y_k)$$

4. Für alle $\varphi \in L_\sigma$ sei $\varphi_E$ die Formel, die aus $\varphi$ entsteht, wenn man jede Subformel $t \doteq u$, für $t, u \in T_\sigma$ durch $Etu$ ersetzt.
   Dann gilt für jede Formelmenge $\Phi \subseteq L_\sigma$: $\Phi$ ist erfüllbarkeitsäquivalent zur Formelmenge

   $$\Phi_E := \{\kappa_{Aq,E}\} \cup \{\kappa_{s,E} \mid s \in \sigma \text{ Funktions- oder Relationssymbol}\} \cup \{\varphi_E \mid \varphi \in \Phi\}$$

**intuitiv**

Die Gleichheit wird systematisch durch eine Relation ersetzt, die die gleichen algebraischen Eigenschaften aufweist (1.: reflexiv, symmetrisch, transitiv) und außerdem verträglich mit den Funktions- und Relationssymbolen ist (2. und 3.). Dann wird eine neue Formelmenge konstruiert, die nur noch gleichheitsfreie Formeln enthält, aber trotzdem erfüllbarkeitsäquivalent ist.

## 3.3 Elimination von Existenzquantoren

**formal**

1. Seien $\exists x\varphi \in L_\sigma$ und $c \notin \sigma$ ein Konstantensymbol. Dann gilt für jede $\sigma$-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$:

   $$\mathcal{I} \models \exists x\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \text{es existiert eine } \sigma \cup \{c\}\text{-Expansion } \mathcal{B} \text{ von } \mathcal{A}\text{, so dass } (\mathcal{B}, \beta) \models \varphi\frac{c}{x}$$

2. Seien $\forall y_1 \ldots \forall y_n \exists x\varphi \in L_\sigma$ und $f \notin \sigma$ ein $n$-stelliges Funktionssymbol. Dann gilt für jede $\sigma$-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$:

   $$\mathcal{I} \models \forall y_1 \ldots \forall y_n \exists x\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \text{es existiert eine } \sigma \cup \{f\}\text{-Expansion } \mathcal{B} \text{ von } \mathcal{A}\text{, so dass } (\mathcal{B}, \beta) \models \forall y_1 \ldots \forall y_n \varphi\frac{fy_1 \ldots y_n}{x}$$

   Insbesondere sind $\forall y_1 \ldots \forall y_n \exists x\varphi$ und $\forall y_1 \ldots \forall y_n \varphi\frac{fy_1 \ldots y_n}{x}$ erfüllbarkeitsäquivalent.

**intuitiv**

Die Existenzquantoren vor denen keine Allquantoren stehen, kann man einfach in die Strukturdefinition "hochziehen", ohne etwas an der Erfüllbarkeit der Formel zu ändern. Ob nun eine Belegung mit dem entsprechenden Wert die Formel erfüllt (Strukturebene), oder einfach nur eine existiert (Formelebene), spielt dafür keine Rolle.

Ähnlich verhält es sich mit den Existenzquantoren, vor denen auch noch Allquantoren stehen, nur dass sie funktional abhängig von den universell quantifizierten Variablen sind. Wie diese Funktion aussieht, bleibt wieder der Struktur überlassen.

## 3.4 Satz von Herbrand

### formal

Sei $\Phi \subseteq \forall S_\sigma^{\mathbf{gf}}$ eine Menge von gleichheitsfreien universellen Sätzen.
Dann gilt:

1. Wenn $\Phi$ erfüllbar ist, dann gibt es eine Herbrandstruktur, die $\Phi$ erfüllt.
2. Wenn $\Phi$ unerfüllbar ist, dann gibt es eine endliche Menge $\Psi_0$ von Grundinstanzen von Sätzen in $\Phi$, so dass $\Psi_0$ unerfüllbar ist.

### intuitiv

Wenn eine Formelmenge nicht erfüllbar ist, dann können wir das durch Aufzählen der Grundinstanzen herausfinden. Unglücklicherweise werden wir im Allgemeinen nie fertig, wenn die Formelmenge erfüllbar ist.

## 3.5 Lifting Lemma

### formal

Sei $\Phi$ eine Menge von Klauseln mit paarweise disjunkten Variablenmengen, und sei $\Psi$ die Menge aller Grundinstanzen von Klauseln in $\Phi$. Sei $\delta_1^A, \ldots, \delta_n^A$ eine aussagenlogische Resolutionswiderlegung von $\Psi^A$.
Dann gibt es eine prädikatenlogische Resolutionswiderlegung $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ von $\Phi$ und Substitutionen $S_1, \ldots, S_n$, so dass $\delta_i = \gamma_i S_i$ für alle $i \leq n$.

### intuitiv

Aussagenlogische Resolutionswiderlegungen lassen sich zu prädikatenlogischen "aufwerten" (liften) indem eine Reihe von Substitutionen angewendet werden.

# 4 Hoare Logik und Softwareverifikation

In diesem Kapitel wurden keine wichtigen Sätze bewiesen. Es wurde ein korrekter Kalkül vorgestellt, mit dem sich while-Programme partiell bzw. total beweisen lassen (programming by contract).

# 5 Modallogik

## 5.1 Substitutionslemma

### formal

Alle Substitutionsinstanzen von allgemeingültigen Formeln sind allgemeingültig.

## 5.2 Einfache Äquivalenzen

**formal**

Für alle Formeln $\varphi, \psi \in K$ gelten folgende Äquivalenzen:

1. $\Diamond\neg\varphi \equiv \neg\Box\varphi$
2. $\Box(\varphi \wedge \psi) \equiv (\Box\varphi \wedge \Box\psi)$
3. $\Diamond(\varphi \vee \psi) \equiv (\Diamond\varphi \vee \Diamond\psi)$

**intuitiv**

1. "Es existiert eine Nachbarwelt, in der nicht $\varphi$ gilt" ist äquivalent zu "nicht alle Nachbarwelten erfüllen $\varphi$"
2. "Für alle Nachbarwelten gelten $\varphi$ und $\psi$" ist äquivalent zu "für alle Nachbarwelten gilt $\varphi$ und für alle Nachbarwelten gilt $\psi$"
3. "Es existiert eine Nachbarwelt in der $\varphi$ oder $\psi$ gelten" ist äquivalent zu "in einer Nachbarwelt gilt $\varphi$ oder in einer Nachbarwelt gilt $\psi$"

## 5.3 Kompaktheitssatz

**formal**

1. Sei $\Phi \subseteq K$. Dann ist $\Phi$ genau dann erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge von $\Phi$ erfüllbar ist.
2. Sei $\Phi \subseteq K$ und $\psi \in K$. Dann gilt genau dann $\Phi \vDash \psi$, wenn es eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ gibt, so dass $\Phi_0 \vDash \Phi$.

**intuitiv**

Die Modallogik ist von der Ausdrucksstärke her eine echte Teilmenge der Prädikatenlogik. Da dieser Satz schon für die Prädikatenlogik gilt, folgt er hier sofort.

## 5.4 Bisimulation als Äquivalenzrelation

**formal**

Bisimulation ist eine Äquivalenzrelation auf der Klasse aller Paare $(\mathcal{A}, a)$, wobei $\mathcal{A}$ eine Kripkestruktur ist und $a \in A$.

**intuitiv**

Zwei Kripkestrukturen die bisimilar sind, erfüllen die gleichen Formeln.

## 5.5 Spielcharakterisierung der Bisimulation

**formal**

Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Kripkestrukturen und $a_0 \in A, b_0 \in B$ Welten. Dann sind $(\mathcal{A}, a_0)$ und $(\mathcal{B}, b_0)$ genau dann bisimilar, wenn Spieler 2 eine Gewinnstrategie für das Bisimulationsspiel auf $(\mathcal{A}, a_0, \mathcal{B}, b_0)$ besitzt.

**intuitiv**

Wenn Spieler 2 eine Gewinnstrategie hat, kann er also auf jeden möglichen Zug von Spieler 1 so reagieren, dass das Spiel entweder nie aufhört oder Spieler 1 nicht mehr ziehen kann. Daraus lässt sich die Hin- und Her-Eigenschaft der Bisimulation ableiten, da Spieler 1 sich nicht auf eine Struktur festlegen muss.

Umgekehrt gibt eine Bisimulation eine Gewinnstrategie für Spieler 2 vor.

## 5.6 Baumabwicklung einer Kripkestruktur

**formal**

Für alle Kripkestrukturen $\mathcal{A}$ und $a \in A$ ist der gerichtete Graph $(T_{\mathcal{A},a}, E^{T_{\mathcal{A},a}})$ ein gerichteter Baum, d.h. es gibt einen Knoten $w \in T_{\mathcal{A},a}$ (und zwar $w := (a)$), so dass es für alle $t \in T_{\mathcal{A},a}$ genau einen gerichteten Weg von $w$ nach $t$ gibt.
Für diesen Baum gilt:

$$\mathcal{A}, a \sim \mathcal{T}_{\mathcal{A},a}(a)$$

**intuitiv**

Für jede Kripkestruktur lässt sich ein Baum finden, der dazu bisimilar ist. Insbesondere ist die im Skript angegebene Baumabwicklung so ein Baum.

## 5.7 Bisimulationsinvarianz

**formal**

Die Modallogik $K$ ist bisimulationsinvariant, das heißt, für alle Kripkestrukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ und Welten $a \in A, b \in B$ gilt:

$$\mathcal{A}, a \sim \mathcal{B}, b \Rightarrow \mathcal{A}, a \equiv_K \mathcal{B}, b$$

**intuitiv**

Zwei bisimilare Kripkestrukturen erfüllen die gleichen Formeln der Modallogik (sie sind $K$-ununterscheidbar).

## 5.8 Satz von Hennessy und Milner

### formal

Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ endlich verzweigte Kripkestrukturen und $a_0 \in A, b_0 \in B$. Dann gilt

$$\mathcal{A}, a_0 \sim \mathcal{B}, b_0 \Leftrightarrow \mathcal{A}, a_0 \equiv_K \mathcal{B}, b_0$$

### intuitiv

Für endlich verzweigte Strukturen (also Strukturen, in denen jede Welt nur endlich viele Nachfolger hat; das sind nicht unbedingt endliche Strukturen) ist $K$-Ununterscheidbarkeit ein äquivalenter Begriff zu Bisimilarität. Bei unendlich verzweigten Strukturen ist er schwächer.

## 5.9 Charakterisierungssatz von van Benthem

### formal

Eine Formel $\varphi(x) \in L_{\sigma_K}$ ist genau dann bisimulationsinvariant, wenn sie äquivalent zu einer modallogischen Formel ist.

### intuitiv

Die Modallogik ist genau das Fragment der Prädikatenlogik, das bisimulationsinvariant ist.

## 5.10 Endliche Modelleigenschaft

### formal

Die Modallogik $K$ hat die endliche-Modell-Eigenschaft, das heißt, jede erfüllbare Formel $\varphi \in K$ hat ein endliches Modell.
Genauer gibt es für jede erfüllbare Formel $\varphi \in K$ eine Kripkestruktur $\mathcal{B}$ und ein $b \in B$, so dass gilt:

1. $\mathcal{B}, b \models \varphi$
2. $|\mathcal{B}| \leq 2^{|\varphi|}$
3. $P_i^{\mathcal{B}} = \emptyset$ für alle $i \in \mathbb{N}$, für die $P_i$ nicht in $\varphi$ vorkommt

### intuitiv

Wenn eine beliebige Formel erfüllbar ist, gibt es eine Kripkestruktur mit endlichem Träger. Das bedeutet die Modallogik ist entscheidbar.

#### Beweisverlauf

Zunächst wird gezeigt, dass die Hülle $H$ der Formel $\varphi$, die aus allen Subformeln besteht, maximal $|\varphi|$ viele Elemente enthält, da an jeder Stelle von $\varphi$ maximal eine Subformel beginnt.

Da $\varphi$ nach Annahme erfüllbar ist, existiert eine Struktur $\mathcal{A}$, die sie erfüllt.

Nun kann eine Äquivalenzrelation auf $A$ definiert werden, die alle Welten in eine Äquivalenzklasse sortiert, die die gleiche Menge an Subformeln erfüllen. Davon gibt es maximal $|\mathcal{P}(\varphi)| = 2^{|\varphi|}$ viele.

Mithilfe dieser Relation wird nun eine Struktur mit endlichem Träger definiert (der Träger sind genau die Äquivalenzklassen). Da alle Elemente eine Klasse die gleichen Subformeln erfüllen, gehören sie in die gleiche Kantenrelation und erfüllen auch die gleichen Attribute.

Schließlich folgt noch ein Induktionsbeweis, dass die beiden Strukturen die gleichen Subformeln aus der Hülle von $\varphi$ erfüllen und damit ultimativ auch $\varphi$, weil es in seiner eigenen Hülle ist.

### 5.11 Vollständigkeitssatz

#### formal

Für alle $\Phi \subseteq K$ und $\psi \in K$ gilt:

$$\Phi \vDash \psi \Leftrightarrow \Phi \vdash_K \psi$$

#### intuitiv

Für die Modallogik ist der Hilbertkalkül korrekt und vollständig.

#### Beweisverlauf

Die Korrektheit wird wie üblich per Induktion über den Ableitungsaufbau bewiesen.

Für die Vollständigkeit wird zunächst der Kompaktheitssatz verwendet, der $\Phi$ auf eine endliche Menge beschränkt. Daraus kann gefolgert werden, dass es ausreicht zu beweisen, dass alle allgemeingültigen Formeln aus dem Hilbertkalkül ableitbar sind. Das wird allerdings nicht bewiesen, sondern stattdessen die äquivalente Aussage, dass wenn etwas nicht folgerbar ist, das Negat erfüllbar ist:

$$\nvdash_K \varphi \Rightarrow \neg\varphi \text{ erfüllbar}$$

Wir wählen also eine Formel $\varphi$, die nicht im Kalkül ableitbar ist.

Nun definieren wir eine Formelmenge $\Phi$ mit der Menge aller Subformeln und deren Negate von $\varphi$. Offensichtlich ist $\Phi$ widersprüchlich, allerdings gibt es Teilmengen von $\Phi$, die widerspruchsfrei sind. Die Teilmengen, die nicht mehr größer werden können ohne widersprüchlich zu werden, nennt man maximal widerspruchsfrei. Nun wird bewiesen, dass eine Formelmenge genau dann maximal widerspruchsfrei ist, wenn sie widerspruchsfrei ist und außerdem negationstreu.

Als nächstes wird eine maximal widerspruchsfreie Formelmenge gewählt und für $\chi_1 \wedge \chi_2$ und $\chi_1 \vee \chi_2$ bewiesen, dass eine Formel genau dann in dieser Menge ist, wenn $\chi_1$ und bzw. oder $\chi_2$ ebenfalls in der Menge sind.

Jetzt kann eine Kripkestruktur definiert werden, deren Träger gerade alle maximal widerspruchsfreien Formelmengen aus $\Phi$ sind. Zwei Formelmengen aus dem Träger stehen dort genau dann in Relation, wenn die eine gewissermaßen ein Nachfolger der anderen ist, d.h.

$$E^{\mathcal{A}} = \{(\Psi_1, \Psi_2) \in A^2 | \text{ f.a. } \psi \in \Phi : \Box\psi \in \Psi_1 \Rightarrow \psi \in \Psi_2\}$$

Danach wird gezeigt, dass eine beliebige Formel von dieser Struktur genau dann erfüllt wird, wenn diese ein Teil der Formelmenge der betrachteten Welt ist (im Träger waren Formelmengen).

Als letztes bleibt noch zu zeigen, dass diese Struktur auch in einer Welt die Formel $\neg\varphi$ erfüllt. Damit haben wir ein Modell gefunden und die Aussage ist bewiesen.

## 5.12 Korrespondenzsatz für die Glaubenslogik $K_4$

### formal

$K_4 = K_R$ für die Klasse $R$ aller Rahmen $\mathcal{R}$, für die $E^{\mathcal{R}}$ transitiv ist.

### intuitiv

Alle Kripkestrukturen, die die Axiome von $K_4$ erfüllen, sind transitiv auf ihrer Übergangsrelation. Und umgekehrt, alle Kripkestrukturen, die transitiv auf der Übergangsrelation sind, erfüllen $K_4$.

### Beweisverlauf

Die Korrektheit wird wie üblich per Induktion bewiesen.

Die Vollständigkeit wird wie im Vollständigkeitssatz der Modallogik gezeigt, indem eine Kripkestruktur konstruiert wird, die $\neg\varphi$ erfüllt, wenn $\varphi$ nicht aus $K_4$ folgt.

## 5.13 Korrespondenzsatz für die Beweislogik $GL$

### formal

$GL = K_R$ für die Klasse $R$ aller endlichen Rahmen $\mathcal{R}$, für die $E^{\mathcal{R}}$ antireflexiv und transitiv ist.

### 5.14 Satz von Kamp

#### formal

Über der reellen Zeitachse ist $TL(\{U,S\})$ genauso ausdrucksstark wie die Logik der ersten Stufe.

Genauer: Zu jeder Formel $\varphi(x) \in L_\sigma$ gibt es eine Formel $\psi \in TL(\{U,S\})$ und umgekehrt, so dass für alle Kripkestrukturen $\mathcal{A}$ mit $(A, E^{\mathcal{A}}) = (\mathbb{R}, \leq)$ und alle $t \in A$ gilt:

$$\mathcal{A}, t \models \psi \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[t]$$

#### intuitiv

Die temporale Logik mit *until* und *since* kann in der Prädikatenlogik simuliert werden und umgekehrt.

## 6 Zur Ausdrucksstärke der Logik der ersten Stufe

### 6.1 Axiomatisierbarkeit

#### formal

1. Die Klasse aller unendlichen $\sigma$-Strukturen ist axiomatisierbar.

2. Die Klasse aller endlichen $\sigma$-Strukturen ist nicht axiomatisierbar.

3. Die Klasse aller unendlichen $\sigma$-Strukturen ist nicht endlich axiomatisierbar.

4. Die Klasse aller zusammenhängenden Graphen ist nicht axiomatisierbar.

#### intuitiv

1. Eine unendliche $\sigma$-Struktur hat einen unendlich großen Träger, d.h. es gibt für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Element, das unterschiedlich zu allen davor ist. Die Axiomatisierung besteht dann darin, für alle $n$ den Satz "es gibt $n$ unterschiedliche Elemente" hinzuzunehmen.

2. Um wirklich alle endlichen Strukturen zu erfassen, muss die Axiomatisierung für alle $n \in \mathbb{N}$ obigen Satz erfüllen. Damit wäre die Axiomatisierung dann genau die für unendliche Strukturen.

3. Wenn die Klasse aller unendlichen $\sigma$-Strukturen endlich axiomatisierbar wäre, dann auch ihr Negat (die Klasse aller nicht-unendlichen $\sigma$-Strukturen). Widerspricht 2.

## 6.2 Satz von Löwenheim und Skolem

### formal

Jede abzählbare erfüllbare Formelmenge $\Phi \subseteq L_\sigma$ besitzt ein abzählbares Modell.

## 6.3 Absteigender Satz von Löwenheim und Skolem

### formal

Sei $\Phi \subseteq L_\sigma$ eine unendliche erfüllbare Formelmenge. Dann besitzt $\Phi$ ein Modell, dessen Mächtigkeit höchstens so groß ist wie die Mächtigkeit von $\Phi$.

## 6.4 Aufsteigender Satz von Löwenheim und Skolem

### formal

Sei $\Phi \subseteq L_\sigma$ eine erfüllbare Formelmenge, die ein unendliches Modell besitzt. Dann gibt es zu jeder Menge $B$ ein Modell von $\Phi$, dessen Mächtigkeit mindestens so groß ist wie die Mächtigkeit von $\Phi$.

## 6.5 Satz von Löwenheim, Skolem und Tarski

### formal

Sei $\Phi \subseteq L_\sigma$ eine erfüllbare Formelmenge, die ein unendliches Modell besitzt. Sei $B$ eine unendliche Menge, deren Mächtigkeit mindestens so groß ist, wie die Mächtigkeit von $\Phi$. Dann besitzt $\Phi$ ein Modell, dessen Mächtigkeit gleich der Mächtigkeit von $B$ ist.

### intuitiv

Die Anzahl der Elemente im Träger einer erfüllenden Struktur kann so gewählt werden, dass sie gleich der Anzahl der Formeln in der Formelmenge ist, die erfüllt werden soll. Man braucht für jede Formel also nur ein Element in der Struktur, zumindest für alle Formelmengen mit unendlichen Modellen.

## 6.6 Elementare Äquivalenz

### formal

Für alle $\sigma$-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ gilt:

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \mathrm{Th}(\mathcal{A})$$

### intuitiv

Zwei Strukturen erfüllen die gleichen Sätze, wenn aus der einen Struktur alles das folgt, was auch in der anderen Struktur gültig ist.

## 6.7 Definierbarkeit der Isomorphie

### formal

Seien $\sigma$ endlich und $\mathcal{A}$ eine endliche $\sigma$-Struktur. Dann gibt es einen Satz $\varphi_{\mathcal{A}}$, der $\mathcal{A}$ bis auf Isomorphie beschreibt, das heißt, für alle $\sigma$-Strukturen $\mathcal{B}$ gilt:

$$\mathcal{B} \models \varphi_{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \mathcal{B} \cong \mathcal{A}$$

### intuitiv

Isomorphie auf endlichen Strukturen ist axiomatisierbar.

### Beweisverlauf

Es wird eine Hilfsformel konstruiert, die sicherstellt, dass es genau $|\mathcal{A}|$ viele unterschiedliche Elemente im Träger gibt, dass alle Relationen, die $\mathcal{A}$ erfüllt auch von der isomorphen Struktur erfüllt werden und alle die nicht erfüllt werden ebenfalls in der zweiten Struktur nicht erfüllt werden. Selbiges für alle Funktionen und Konstanten.

Da die Ausgangsstruktur endlich ist, ist das eine echte Formel, die nun nur noch existentiell quantifiziert werden muss, um einen Satz zu erzeugen, den nur isomorphe Strukturen von $\mathcal{A}$ erfüllen.

## 6.8 Elementare Äquivalenz und Isomorphie

### formal

Sei $\mathcal{A}$ eine $\sigma$-Struktur:

1. Für alle $\sigma$-Strukturen $\mathcal{B}$ gilt:

$$\mathcal{B} \cong \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$$

2. Wenn $\mathcal{A}$ endlich ist, so gilt für alle $\sigma$-Strukturen $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B} \equiv \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B} \cong \mathcal{A}$$

3. Wenn $\mathcal{A}$ unendlich ist, so gibt es eine $\sigma$-Struktur $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$, aber $\mathcal{B} \not\cong \mathcal{A}$.

### intuitiv

1. Wenn zwei Strukturen isomorph sind, erfüllen sie die gleichen Sätze.

2. Wenn eine der beiden Strukturen endlich ist, sind sie isomorph genau dann wenn sie elementar äquivalent sind.

3. Sonst nicht.

## 6.9 Satz von Skolem

### formal

Es gibt ein abzählbares Nichtstandardmodell der Arithmetik.

### intuitiv

Es gibt eine zum Standardmodell elementar äquivalente Struktur, die nicht isomorph ist. Also werden alle Sätze von ihr erfüllt, die auch $\mathcal{N}$ erfüllt, aber sie ist nicht strukturgleich.

## 6.10 Quantorenfreie Äquivalenz

### formal

Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ $\sigma$-Strukturen und $\overline{a} \in A^k, \overline{b} \in B^k$. Dann gilt:

$$\mathcal{A}, \overline{a} \equiv_0 \mathcal{B}, \overline{b} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Es gibt einen partiellen Isomorphismus } p \text{ von } \mathcal{A} \text{ nach } \mathcal{B} \text{ mit } p(\overline{a}) = \overline{b}$$

### intuitiv

Wenn zwei Strukturen auf einem $k$-Tupel von Punkten die gleichen quantorenfreien Formeln erfüllen, dann sind sie auf diesen Punkten partiell strukturgleich. Umgekehrt erfüllen zwei Strukturen, die partiell isomorph sind die gleichen quantorenfreien Formeln.

## 6.11 Endliche Isomorphie vs $n$-Isomorphie

### formal

Seien $k \in \mathbb{N}, \mathcal{A}, \mathcal{B}$ $\sigma$-Strukturen und $\overline{a} \in A^k, \overline{b} \in B^k$. Dann gilt:

$$\mathcal{A}, \overline{a} \cong_\omega \mathcal{B}, \overline{b} \Leftrightarrow \text{für alle } n \in \mathbb{N} : \mathcal{A}, \overline{a} \cong_n \mathcal{B}, \overline{b}$$

### intuitiv

Endliche Isomorphie liegt genau dann vor, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ ein HH-System vom Rang $n$ existiert.

## 6.12 Spielcharakterisierung der $n$-Isomorphie

### formal

Seien $k, n \in \mathbb{N}, \mathcal{A}, \mathcal{B}$ $\sigma$-Strukturen und $\overline{a}_0 \in A^k, \overline{b}_0 \in B^k$. Dann gilt:

$$\mathcal{A}, \overline{a}_0 \cong_n \mathcal{B}, \overline{b}_0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l}\text{Spieler 2 hat eine Gewinnstrategie für} \\ \text{das Spiel } \mathrm{EF}_n(\mathcal{A}, \overline{a}_0, \mathcal{B}, \overline{b}_0)\end{array}$$

**intuitiv**

Wenn Spieler 2 $n$ Runden lang das EF-Spiel spielen kann und dabei ein partieller Isomorphismus herauskommt, egal welche Position Spieler 1 wählt, dann sind die beiden Strukturen auf den Tupeln $n$-isomorph.

**Beweisverlauf**

Wenn die zwei Strukturen $n$-isomorph sind, dann kann Spieler 2 entlang der Isomorphieabbildung spielen und hat damit eine Gewinnstrategie.

Wenn Spieler 2 eine Gewinnstrategie hat, kann man daraus die entsprechende Isomorphieabbildung konstruieren.

## 6.13 Satz von Fraïssé

**formal**

Seien $k, n \in \mathbb{N}, \mathcal{A}, \mathcal{B}$ $\sigma$-Strukturen und $\overline{a} \in A^k, \overline{b} \in B^k$. Dann gilt:

$$\mathcal{A}, \overline{a} \equiv_n \mathcal{B}, \overline{b} \Leftrightarrow \mathcal{A}, \overline{a} \cong_n \mathcal{B}, \overline{b}$$

**intuitiv**

Zwei Strukturen erfüllen genau dann die gleichen Formeln bis zum Quantorenrang $n$, wenn sie $n$-isomorph sind.

## 6.14 $n$-Isomorphie impliziert $n$-Äquivalenz

**formal**

Seien $k, n \in \mathbb{N}, \mathcal{A}, \mathcal{B}$ $\sigma$-Strukturen und $\overline{a} \in A^k, \overline{b} \in B^k$. Dann gilt:

$$\mathcal{A}, \overline{a} \cong_n \mathcal{B}, \overline{b} \Rightarrow \mathcal{A}, \overline{a} \equiv_n \mathcal{B}, \overline{b}$$

**intuitiv**

Diese Implikation gilt jetzt für beliebige Symbolmengen.

## 6.15 Definierbarkeit der $n$-Isomorphie

### formal

Seien $n, k \in \mathbb{N}, \mathcal{A}$ eine $\sigma$-Struktur und $\overline{a} := (a_1, \ldots, a_k) \in A^k$.

Dann gibt es eine Formel $\theta^n_{\mathcal{A},\overline{a}}(v_1, \ldots, v_k) \in L_\sigma$ mit $\mathrm{qr}(\theta^n_{\mathcal{A},\overline{a}}) = n$, so dass für alle $\sigma$-Strukturen $\mathcal{B}$ und alle $\overline{b} := (b_1, \ldots, b_k) \in B^k$ gilt:

$$\mathcal{B} \models \theta^n_{\mathcal{A},\overline{a}}[b_1, \ldots, b_k] \Leftrightarrow \mathcal{A}, \overline{a} \cong_n \mathcal{B}, \overline{b}$$

### intuitiv

Es gibt eine Formel, die genau dann von zwei Strukturen erfüllt wird, wenn sie $n$-äquivalent sind und diese Formel ist selbst vom Quantorenrang $n$.

## 6.16 Nichtaxiomatisierbarkeitssätze mit HH-Systemen

### formal

Sei $K$ eine Klasse von $\sigma$-Strukturen und seien $\mathcal{A}_n$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{B}$ $\sigma$-Strukturen, so dass:

1. $\mathcal{A}_n \in K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{B} \notin K$
2. Für alle $n \geq 0$ gilt $\mathcal{A}_n \cong_n \mathcal{B}$ (bzw. Spieler 2 hat eine Gewinnstrategie für das Spiel $\mathrm{EF}_n(\mathcal{A}_n, \mathcal{B})$)

Dann ist $K$ nicht axiomatisierbar.

### intuitiv

Angenommen man kann zeigen, dass es für eine Modellklasse $K$ eine Struktur gibt, die nicht dazu gehört, aber trotzdem $n$-isomorph zu allen Strukturen ist, die dazu gehören. Dann ist die Klasse nicht axiomatisierbar, weil ich eine Struktur angeben kann, die nicht drin liegt, die ich aber trotzdem nicht von allen anderen Strukturen, die drin liegen unterscheiden kann.

## 6.17 Axiomatisierbarkeit im Endlichen

### formal

Jede unter Isomorphie abgeschlossene Klasse endlicher $\sigma$-Strukturen ist im Endlichen axiomatisierbar.

### intuitiv

Für jede Modellklasse, in denen nur endliche Strukturen vorkommen, kann eine Axiomatisierung gefunden werden, die endlich ist (also eine mit einem Satz).

## 6.18 Nichtaxiomatisierbarkeit im Endlichen

### formal

Sei $K$ eine Klasse von endlichen $\sigma$-Strukturen. Für alle $n \in \mathbb{N}$ seien $\mathcal{A}_n$ und $\mathcal{B}_n$ endliche $\sigma$-Strukturen, so dass

1. $\mathcal{A}_n \in K$ und $\mathcal{B}_n \notin K$
2. $\mathcal{A}_n \cong_n \mathcal{B}_n$ (bzw. Spieler 2 hat eine Gewinnstrategie für das Spiel $\mathrm{EF}_n(\mathcal{A}_n, \mathcal{B})$)

Dann ist $K$ nicht e-axiomatisierbar.

## 6.19 Satz von Gaifman

### formal

Jeder Satz $\varphi \in S_\sigma$ ist äquivalent zu einer Kombination von basislokalen $\sigma$-Sätzen.

### intuitiv

Jeder Satz ist äquivalent zu einem lokalen Satz.

## 6.20 Äquivalenz und Basislokalität

### formal

Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ $\sigma$-Strukturen, so dass für alle basislokalen Sätze $\varphi$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi$$

Dann gilt:

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$$

### intuitiv

Wenn alle Sätze erfüllt sind, die nur von der Umgebungsstruktur eines Elementes abhängen, dann erfüllen zwei Strukturen die gleichen Sätze.

# 7 Die Gödelschen Unvollständigkeitssätze

## 7.1 Aufzählbarkeit der beweisbaren Sätze

### formal

Sei $\Phi \subseteq L_\sigma$ eine rekursiv aufzählbare Formelmenge. Dann ist die Menge

$$\{\varphi \in L_\sigma | \Phi \models \varphi\}$$

rekursiv aufzählbar.

## 7.2 Die $\beta$-Funktion

**formal**

Es gibt eine $\Delta_0$-definierbare Funktion $\beta : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit folgenden Eigenschaften:

Für alle $l \in \mathbb{N}$ und alle Folgen $(n_0, \dots, n_{l-1}) \in \mathbb{N}^l$ gibt es ein $s \in \mathbb{N}$ mit $s \geq l, n_0, \dots, n_{l-1}$, so dass für $0 \leq i \leq l-1$ gilt:

$$\beta(s, i) = n_i$$

**intuitiv**

Es existiert eine Funktion, die zu einem gegebenen Wort in einer selbstgewählten Kodierung und einem Index eine Zahl ausgibt. Diese Funktion fungiert praktisch als Arrayzugriff auf $s$ an der Stelle $i$.

## 7.3 Definierbarkeit der berechenbaren Funktionen

**formal**

Jede berechenbare partielle Funktion von $\mathbb{N}^k$ nach $\mathbb{N}$ ist $\Sigma_1$-definierbar.

**intuitiv**

... da es eine Turingmaschine gibt, die sie berechnen kann und Turingmaschinen $\Sigma_1$-definierbar sind.

## 7.4 Unendscheidbarkeit der Arithmetik

**formal**

$\mathrm{Th}(\mathcal{N})$ ist nicht rekursiv aufzählbar.

## 7.5 $\Sigma_1$-Transfersatz

**formal**

Für alle $\Sigma_1$-Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_k) \in L_{Ar}$ und alle $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathcal{N} \vDash \varphi[n_1, \dots, n_k] \Leftrightarrow Q \vdash \varphi(\underline{n_1}, \dots, \underline{n_k})$$

## 7.6 Repräsentierbarkeit der berechenbaren Funktionen in $Q$

**formal**

Alle berechenbaren (totalen) Funktionen $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ sind in $Q$ repräsentierbar.

## 7.7 Fixpunktsatz

### formal

Sei $T \subseteq S_{Ar}$ eine Theorie mit $Q \subseteq T$. Dann gibt es für jede Formel $\varphi(x) \in L_{Ar}$ einen Satz $\psi \in S_{Ar}$, so dass

$$T \vdash \psi \leftrightarrow \varphi(\underline{\langle\psi\rangle})$$

### intuitiv

Für jede einstellige Formel aus der Sprache existiert ein Satz, dessen Kodierung eingesetzt in die Formel genau dann wahr wird, wenn er selbst erfüllt ist.

## 7.8 Unmöglichkeit der Selbstrepräsentierbarkeit

### formal

Sei $T \subseteq S_{Ar}$ eine widerspruchsfreie Theorie mit $Q \subseteq T$. Dann ist die Menge

$$\{\langle\chi\rangle \,|\, \chi \in T\}$$

nicht in $T$ repräsentierbar.

### intuitiv

Eine widerspruchsfreie Theorie, die $Q$ erweitert, ist nicht in sich selbst repräsentierbar.

## 7.9 Satz von Tarski über die Nichtdefinierbarkeit der Wahrheit

### formal

Es gibt keine Formel $\varphi(x) \in L_{Ar}$, so dass für alle Sätze $\psi \in L_{Ar}$ gilt:

$$\mathcal{N} \vDash \varphi(\langle\psi\rangle) \Leftrightarrow \mathcal{N} \vDash \psi$$

### intuitiv

Die Menge der wahren arithmetischen Sätze ist nicht arithmetisch definierbar. Folgt direkt aus der Unmöglichkeit der Selbstrepräsentierbarkeit.

## 7.10 Unendscheidbarkeit der Logik der ersten Stufe

### formal

Jede widerspruchsfreie Theorie $T \subseteq S_{Ar}$ mit $Q \subseteq T$ ist unendscheidbar.

### 7.11 Erster Unvollständigkeitssatz

**formal**

Sei $T \subseteq S_{Ar}$ eine widerspruchsfreie, effektiv axiomatisierbare Theorie mit $Q \subseteq T$. Dann ist $T$ unvollständig.

**intuitiv**

Wenn $T$ vollständig wäre, wärs auch entscheidbar.

### 7.12 Beweisbarkeitsformel einer Theorie

**formal**

Sei $T \subseteq S_{Ar}$ eine effektiv axiomatisierbare Theorie. Dann gibt es eine Formel $\mathrm{Bew}_T(x) \in \Sigma_1$, so dass für alle $\varphi \in S_{Ar}$ gilt:

$$\mathcal{N} \models \mathrm{Bew}_T[\langle\varphi\rangle] \Leftrightarrow T \vdash \varphi$$

**intuitiv**

Da die Theorie effektiv axiomatisierbar ist, ist sie rekursiv aufzählbar und damit lässt sich eine $\Sigma_1$-Formel finden, die diese Menge definiert.

### 7.13 Gödelsätze

**formal**

Sei $T \subseteq S_{Ar}$ eine effektiv axiomatisierbare Theorie mit $Q \subseteq T$. Dann gibt es ein $\varphi \in S_{Ar}$ mit

$$T \vdash \varphi \leftrightarrow \neg\mathrm{Bew}_T(\underline{\langle\varphi\rangle})$$

**intuitiv**

Wenn die Theorie mindestens die Axiome von $Q$ enthält, dann gibt es einen Satz, der genau dann gilt, wenn er nicht beweisbar ist.

### 7.14 Satz von Löb

**formal**

Für alle $\varphi \in S_{Ar}$ gilt:

$$T \vdash \mathrm{Bew}_T(\underline{\langle\varphi\rangle}) \to \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$$

**intuitiv**

Wenn eine Theorie $T$ die Aussage beweist, dass eine Formel gilt, wenn sie beweisbar in $T$ ist, dann beweist diese Theorie die Formel selbst.

### 7.15 Zweiter Unvollständigkeitssatz

**formal**

Sei $T \subseteq S_{Ar}$ eine widerspruchsfreie, effektiv axiomatisierbare Theorie mit $PA \subseteq T$. Dann gilt

$$T \nvdash \mathrm{Kon}_T$$

**intuitiv**

$T$ beweist nicht seine eigene Konsistenz.

## 8 Die Logik der zweiten Stufe

### 8.1 Axiomatisierung der Endlichkeit

**formal**

Es gibt einen Satz $\varphi \in L_\sigma^{II}$, so dass für alle $\sigma$-Strukturen $\mathcal{A}$ gilt:

$$\mathcal{A} \vDash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{A} \text{ endlich}$$

**intuitiv**

Es kann ein Satz konstruiert werden, der ausdrückt, dass jede zweistellige Relationsvariable, die eine einstellige Funktion repräsentiert, die injektiv ist auch surjektiv ist. Das ist genau in den endlichen Strukturen erfüllt.