Einführung in die Theoretische Informatik
Tutorium VI

Michael R. Jung

20. - 25. 11. 2015

Aufgabe 1

Seien $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ und Π ein beliebiges Alphabet. Geben Sie reguläre Grammatiken für folgende Sprachen an.

1. $L_1 :=$ {Dezimaldarstellungen, der durch 4 teilbaren Zahlen}.
2. $L_2 :=$ {Dezimaldarstellungen, der durch 3 teilbaren Zahlen}.
3. $L_3 \subseteq \Pi^*, L_3 = \{w_1, \ldots, w_n\}$ mit $w_i = a_{i,1} \ldots a_{i,k_i}$. *(optional)*

Erinnerung: Eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S\}$ heißt regulär, falls $P \subseteq V \times (\{\varepsilon\} \cup \Sigma \cup \Sigma V)$.

$L_1 :=$ {Dezimaldarstellungen, der durch 4 teilbaren Zahlen}.

Geben wir zunächst die Produktionen an:

$$
\begin{aligned}
P_1 = \{ & \\
S_1 &\to 0|4|8|1A|3A|5A|7A|9A|2B|4B|6B|8B, && (1)\\
S_1 &\to 1C|2C|3C|4C|5C|6C|7C|8C|9C, && (2)\\
A &\to 2|6, && (3)\\
B &\to 0|4|8, && (4)\\
C &\to 0C|1C|2C|3C|4C|5C|6C|7C|8C|9C && (5)\\
C &\to 1A|3A|5A|7A|9A|0B|2B|4B|6B|8B, && (6)\\
\} &
\end{aligned}
$$

Also ist $G_1 = (\{S_1, A, B, C\}, \Sigma, P_1, S_1)$.

$L_2 := \{$Dezimaldarstellungen, der durch 3 teilbaren Zahlen$\}$
Geben wir zunächst die Produktionen an:

$$
\begin{aligned}
P_2 = \{ & \\
& S_2 \to 0|1A|4A|7A|2B|5B|8B|3C|6C|9C, && (7)\\
& A \to 2C|5C|8C|1B|4B|7B|0A|3A|6A|9A, && (8)\\
& B \to 1C|4C|7C|2A|5A|8A|0B|3B|6B|9B, && (9)\\
& C \to \varepsilon|1A|4A|7A|2B|5B|8B|0C|3C|6C|9C && (10)\\
\} &
\end{aligned}
$$

Also ist $G_2 = (\{S_2, A, B, C\}, \Sigma, P_2, S_2)$.

$L_3 \subseteq \Pi^*, L_3 = \{w_1, \dots, w_n\}$ mit $w_i = a_{i,1} \dots a_{i,k_i}$.
$G_3 = (\{S_3\} \cup \{X_{i,j} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k_i\}, \Pi, P_3, S_3)$ mit

$$P_2 = \{$$

$$S_3 \rightarrow a_{1,1}X_{1,2} | a_{2,1}X_{2,2} | \dots | a_{n,1}X_{n,2}, \tag{11}$$

$$X_{i,j} \rightarrow a_{i,j}X_{i,j+1}, \qquad 1 \leq i \leq n, 1 < j < k_i \tag{12}$$

$$X_{i,k_i} \rightarrow a_{i,k_i} \tag{13}$$

$$\}$$

Aufgabe 2

Wandeln sie die gegebene Grammatik G in einen NFA N um, diesen dann in einen DFA M. Minimieren Sie M und wandeln Sie diesen in eine reguläre Grammatik zurück.

$$
\begin{aligned}
&G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S) \text{ mit}\\
&P = \{\\
&\qquad S \rightarrow aB,\\
&\qquad B \rightarrow bS|bA|b,\\
&\qquad A \rightarrow aA|aS|a\\
&\qquad \}
\end{aligned}
$$

Lösung:

Zunächst muss G' in eine Grammatik ohne Produktionen der Form $A \rightarrow a$ umgewandelt werden:

$$G'' = (\{S, A, B, X\}, \{a, b\}, P', S) \text{ mit}$$

$$P = \{$$

$$S \rightarrow aB,$$

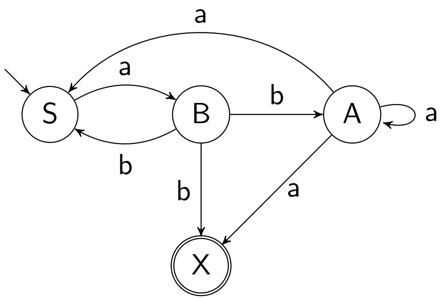
$$B \rightarrow bS|bA|bX,$$

$$A \rightarrow aA|aS|aX,$$

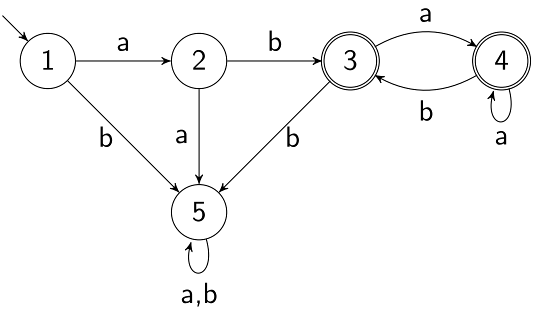
$$X \rightarrow \varepsilon$$

$$\}$$

Nun kann der NFA N folgen:



Mit der Potenzmengenkonstruktion ergibt sich M:



Benennung: 1:={S}, 2:={B},
3:={S,A,X}, 4:={S,A,B,X},
5:=∅

Erstellen wir die Tabelle für die Minimierung:

2	b			
3	ε	ε		
4	ε	ε	b	
5	ab	b	ε	ε
	1	2	3	4

Der Automat ist folglich schon minimal.

Daraus ergibt sich nun die Grammatik G'':

$$G' = (\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{a, b\}, P'', 1) \text{ mit}$$

$$P = \{$$

$$1 \to a2|b5,$$

$$2 \to a5|b3,$$

$$3 \to a4|b5|\varepsilon,$$

$$4 \to a4|b3|\varepsilon,$$

$$5 \to a5|b5$$

$$\}$$