Einführung in die Theoretische Informatik
Tutorium V

Michael R. Jung

13. - 18. 11. 2015

Satz (Pumping-Lemma)

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Dann gilt:

L regulär $\Rightarrow \exists l \in \mathbb{N}\ \forall x \in L, |x| \geq l\ \exists u, v, w \in \Sigma^*, uvw = x$ *mit*

$$v \neq \varepsilon\ \wedge\ |uv| \leq l\ \wedge\ \forall i \geq 0 : uv^i w \in L.$$

Kontraposition des Pumping-Lemmas

Das Pumping-Lemma ließe sich auch so schreiben:

Satz (Pumping-Lemma)

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Dann gilt:

Wenn $\forall l \in \mathbb{N}\ \exists x \in L, |x| \geq l\ \forall u, v, w \in \Sigma^*, uvw = x$ gilt:

$$v = \varepsilon \ \vee \ |uv| > l \vee \ \exists i \geq 0 : uv^i w \notin L,$$

so folgt: L nicht regulär.

Kontraposition des Pumping-Lemmas (Forts.)

Nun machen wir noch eine kleine Umformung, bis wir die Variante haben die wir meistens nutzen werden:

Satz (Pumping-Lemma)

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ *eine Sprache. Dann gilt:*
Wenn $\forall l \in \mathbb{N}\ \exists x \in L, |x| \geq l\ \forall u, v, w \in \Sigma^*, uvw = x$ *gilt:*

$$\left((v \neq \varepsilon\ \wedge\ |uv| \leq l) \Rightarrow\ \exists i \geq 0 : uv^i w \notin L\right),$$

so folgt: L *nicht regulär.*

Aufgabe 1

Zeigen sie

1. mit Hilfe des Pumping-Lemmas,
2. durch Angabe unendlich vieler bzgl. R_A bzw. R_B nicht äquivalenter Wörter

dass die Sprachen $A := \{a^n b^m c^k | n, m, k \geq 1, m \geq n + k\}$ und $B := \{a^n b^m c^k | n, m, k \geq 1, m < n + k\}$ nicht regulär sind.

Lösung (Pumping-Lemma):

1. *A*: Sei $l \in \mathbb{N}$. Betrachte $x = a^l b^{l+1} c \in A$.
   In jeder Zerlegung $uvw = x$ mit $v \neq \varepsilon$ und $|uv| \leq l$
   gilt:$v = a^i, 1 \leq i \leq l$.
   Also ist $uv^2w = a^{l+i} b^{l+1} c \notin A$.
   Folglich ist A nicht regulär.

   B: Sei $l \in \mathbb{N}$. Betrachte $x = a^l b^l c \in B$.
   In jeder Zerlegung $uvw = x$ mit $v \neq \varepsilon$ und $|uv| \leq l$
   gilt:$v = a^i, 1 \leq i \leq l$.
   Also ist $uv^0w = uw = a^{l-i} b^l c \notin B$.
   Folglich ist B nicht regulär.

Lösung (Myhill-Nerode-Relation):

2 A 1: Die Wörter $\{ab^{n+2}c | n \in \mathbb{N}\}$ sind bzgl. R_A pw. inäquivalent.
Für $m < n$ gilt: $ab^{m+2}cc^n \notin A, ab^{n+2}cc^n \in A$.

A 2: Die Wörter $\{a^n | n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ sind bzgl. R_A pw. inäquivalent.
Für $0 < m < n$ gilt: $a^m b^{m+1} c \in A, a^n b^{m+1} c \notin A$.

B 1: Die Wörter $\{ab^{n+2}c | n \in \mathbb{N}\}$ sind bzgl. R_B pw. inäquivalent.
Für $m < n$ gilt: $ab^{m+2}cc^n \in B, ab^{n+2}cc^n \notin B$.

B 2: Die Wörter $\{a^n | n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ sind bzgl. R_B pw. inäquivalent.
Für $0 < m < n$ gilt: $a^m b^n c \notin B, a^n b^m c \in B$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Pumping-Zahlen der folgenden Sprachen.

1. $L_1 :=$ Die Menge, der durch 4 teilbaren, natürlichen Zahlen in Dezimaldarstellung.
2. $L_2 := \{a^{2n} | n \in \mathbb{N}\}$.
3. $L_{k,c} := \{a^{kn+c} | n \in \mathbb{N}\}$.

1. Da $4|100$ wird deutlich, dass man die Teilbarkeit bzgl. 4 nur von den letzten 2 Stellen abhängt.
   Betrachte $x = x_1 \dots x_n \in L_1$ mit $n \geq 3$.

$x_2 \neq 0$ Wir können das erste Zeichen beliebig auf- und abpumpen.

$x_2 = 0 \wedge n > 3$ Wir können das zweite Zeichen (die 0) beliebig pumpen.

$x_2 = 0 \wedge n = 3$ Wir können die ersten beiden Zeichen beliebig auf- und abpumpen, da hinten ja eine 0, 4 oder 8 steht.

$\Rightarrow l_1 \leq 3$.

Betrachten wir $32 \in L_1$. Für $l = 2$ hätten wir folgende Zerlegungen in uvw mit $|uv| \leq 2, v \neq \varepsilon$:

$u = \varepsilon, v = 3, w = 2$ Dann wäre aber $uv^0w = 2 \notin L_1$.

$u = 3, v = 2, w = \varepsilon$ Dann wäre aber $uv^0w = 3 \notin L_1$.

$u = w = \varepsilon, v = 32$ Dann wäre aber $uv^0w = \varepsilon \notin L_1$.

Folglich ist $l_1 > 2$ und somit $l_1 = 3$.

2. l_2 ist offensichtlich 2, da wir die ersten beiden as beliebig pumpen können, ohne dass die Länge ungerade wird.
3. Zunächst ist klar, dass $l_{k,c} \geq k$. Hier müssen wir eine Fallunterscheidung machen:

$k > c$ Hier ist $l_{k,c}$ offensichtlich k, da wir die ersten k as beliebig pumpen können, ohne dass die Längenbedingung verletzt wird.

$k \leq c$ Dieser Fall ist nicht ganz, so einfach, da dass kürzeste Wort in der Sprache a^c ist und dieses schon k as beinhaltet. Also können wir die ersten k as dieses Wortes nicht abpumpen. In $a^k + c$ können wir das aber. Es ist nun leicht zu sehen, dass $l_{k,c}$ hier $c + 1$ sein muss.

Insgesamt ist also $l_{k,c} = \max\{c + 1, k\}$.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Pumpingzahl von

$$L = L\left(a^*(ab)^+b^*|b^*(ab)^+b^*\right).$$

Lösung:

$l > 2$ Beim Wort $ab \in L$ kann keines der Zeichen abgepumpt werden.

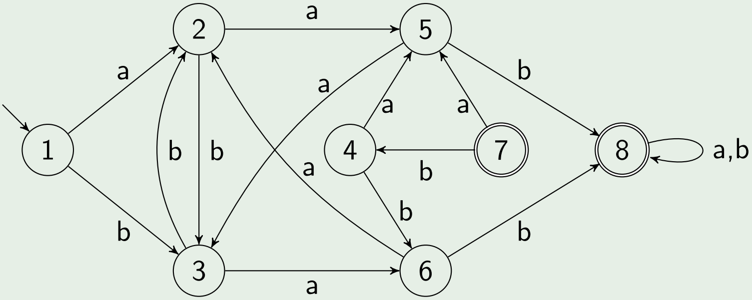
$l \leq 3$ Sei $w \in L$ mit $|w| \geq 3$. Fallunterscheidung:

- w beginnt mit b. Dann kann man das erste Zeichen beliebig auf- und abpumpen.
- w beginnt mit aa. Auch hier kann man das erste Zeichen beliebig auf- und abpumpen.
- w beginnt mit abb. In diesem Fall kann man das dritte Zeichen beliebig auf- und abpumpen.
- w beginnt mit aba. $\Rightarrow$ w beginnt mit $abab$. Hier kann man die ersten 2 Zeichen (ab) beliebig auf- und abpumpen.

Aufgabe 4

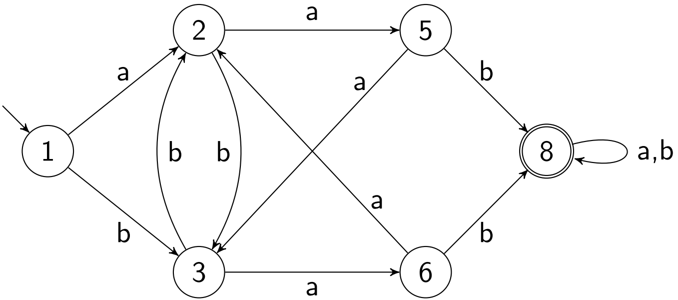
Minimieren Sie folgenden DFA M.

M :



Als erstes werden die nicht erreichbaren Zustände 4 und 7 gestrichen.

M' :



2	ab				
3	ab				
5	b	b	b		
6	b	b	b		
8	ε	ε	ε	ε	ε
	1	2	3	5	6

Bemerkung: An Position (i, j) steht ein Wort, so dass man aus i in einen Endzustand kommt und aus j nicht oder andersherum.

Es ergibt sich also folgender DFA M''.