Einführung in die Theoretische Informatik
Tutorium III

Michael R. Jung

30.10. - 04. 11. 2015

Eigenschaften von Relationen

Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt

reflexiv:, falls	$\forall x \in A:$	xRx
irreflexiv:, falls	$\forall x \in A:$	$\neg(xRx)$
symmetrisch:, falls	$\forall x, y \in A:$	$xRy \Rightarrow yRx$
asymmetrisch:, falls	$\forall x, y \in A:$	$xRy \Rightarrow \neg(yRx)$
antisymmetrisch:, falls	$\forall x, y \in A:$	$xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$
transitiv:, falls	$\forall x, y, z \in A:$	$xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
konnex:, falls	$\forall x, y \in A:$	$xRy \vee yRx$
semikonnex:, falls	$\forall x, y \in A:$	$x \neq y \Rightarrow (xRy \vee yRx)$

Aufgabe 1

Sei $R \subseteq A \times A$ eine Relation.
Beweisen oder widerlegen Sie:

1. R konnex $\Rightarrow$ R reflexiv. JA
2. R semikonnex $\Rightarrow$ R antisymmetrisch. NEIN
3. R asymmetrisch $\Rightarrow$ R antisymmetrisch. JA
4. R semikonnex $\Rightarrow$ R konnex. NEIN
5. R konnex $\Rightarrow$ R semikonnex. JA
6. R semikonnex und reflexiv $\Rightarrow$ R konnex. JA
7. R semikonnex und reflexiv $\Leftrightarrow$ R konnex. JA
8. R asymmetrisch $\Rightarrow$ R irreflexiv. JA
9. R ist immer reflexiv oder irreflexiv. NEIN

Lösungen:

1. *Beweis.* Sei $x \in A$.
   Dann gilt wegen der Konnektivivität von R: $xRx \vee xRx \Leftrightarrow xRx$.
   Somit ist R reflexiv. $\square$

2. *Gegenbeispiel.* $A = \{1, 2\},\ R = \{(1, 2), (2, 1), (1, 1)\}$

3. *Beweis.* Seien $x, y \in A$ mit xRy.
   Dann gilt wegen der Asymmetrie von R: $\neg(yRx)$. Somit ist die Implikation $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$ trivialerweise erfüllt und R folglich antisymmetrisch. $\square$

4. *Gegenbeispiel.* Siehe Gegenbeispiel zu (2).

5. *Beweis.* Seien $x, y \in A$ mit $x \neq y$.
   Dann gilt wegen der Konnektivivität von R: $xRy \vee yRx$. Somit ist R semikonnex. $\square$

   Wenn etwas für alle Paare gilt, gilt es insbesondere für ungleiche Paare.

6 *Beweis.* Seien $x, y \in A$.

1. Fall: $x = y$.

Da R reflexiv ist, gilt $xRx \overset{x=y}{\iff} xRy \wedge yRx \Rightarrow xRy \vee yRx$. ✓

2. Fall: $x \neq y$.

Da R semikonnex ist, gilt $xRy \vee yRx$. ✓

Somit ist R konnex. □

7 *Beweis.*

Folgt sofort aus (1),(5) und (6). □

8 *Beweis.* Sei R asymmetrisch und sei $x \in A$.

Angenommen es gelte: xRx. Dann folgt wegen der Asymmetrie von R: $\neg(xRx)$. ↯

Daher muss R irreflexiv sein. □

9 Siehe Gegenbeispiel zu (2). $(A = \{1, 2\},\ R = \{(1, 2), (2, 1), (1, 1)\})$

Spezielle Relationen

	refl.	irrefl.	sym.	antis.	asym.	trans.	kon.	semik.
Quasiord.	✓					✓		
Halbord.	✓			✓		✓		
Striktord.		(✓)		(✓)	✓	✓		
lin. Ord.	(✓)			✓		✓	✓	
lin. Strikt.		(✓)		(✓)	✓	✓		✓
Äquiv.rel.	✓		✓			✓		

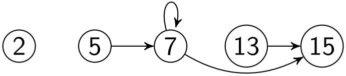
Aufgabe 2

Seien $A = \{2, 5, 7, 13, 15\}$ eine Menge und
$R = \{(5, 7), (7, 7), (7, 15), (13, 15)\}$.

1. Welche der obigen Eigenschaften erfüllt R?
2. Stellen Sie R grafisch dar.
3. Geben Sie die reflexive, die symmetrische und die tranisitive Hülle an.
4. Geben Sie die Äquivalenzhülle, ihre Klassen und ein Repräsentantensystem an. Stellen Sie diese grafisch dar.

Lösungen:

1. antisymmetrisch

2. 

3. $h_{refl}(R) = R \cup \{(2,2),(5,5),(13,13),(15,15)\}$,
   $h_{sym}(R) = R \cup \{(7,5),(15,7),(15,13)\}$, $R^{+} = R \cup \{5,15\}$

4. $h_{äq} = R \cup \{(2,2),(5,5),(13,13),(15,15),(7,5),(15,7),$
   $(15,13),(5,15),(15,5),(5,13),(13,5),(7,13),(13,7)\}$
   Klassen & Repräsentanten: $[2] = \{2\}$, $[5] = \{5,7,13,15\}$