# Einführung in die Theoretische Informatik
# Tutorium X

Michael R. Jung

13. 01. 2016

## Aufgabe 1

Nennen Sie eine REC-vollständige Sprache.

Lösung: $\{1\}$ via $\chi_L$ für eine entscheidbare Sprache $L$.

**Aufgabe 2**

Zeigen Sie, dass alle Sprachen $L \neq \varnothing$ REC-schwer sind.

Sei $\Sigma^* \supseteq L \neq \emptyset$ und $\square \notin \Sigma$ sowie $\Sigma^* \ni x \in L$.

Zu zeigen: $L$ ist REC-schwer.

**Beweis.**

Sei $\Pi^* \supseteq A \in \text{REC}$ und $M$ eine DTM die $\chi_A$ berechnet.

Konstruiere nun eine DTM $M'$, die eine Reduktionsfunktions $f$ folgendermaßen berechnet:

- Bei Eingabe eines $y \notin \Pi^*$ setze $f(y) := \square$.
- Bei Eingabe eines $y \in \Pi^*$ simuliere $M(y)$. Nun ist
$$f(y) = \begin{cases} x, & \chi_A(y) = 1 \\ \square, & \chi_A(y) = 0. \end{cases}$$

Offensichtlich ist $f$ berechenbar und eine Reduktion von $A$ auf $L$. $\square$

## PCP

Sei $\Sigma$ ein Alphabet mit $\# \notin \Sigma$. Seien Wortpaare $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$ über $\Sigma$ gegeben.
Gesucht wird eine endliche Folge $\alpha = (i_1, \ldots, i_n), n \geq 1$ von Indizes $(i_j \in \{1, \ldots, k\})$ mit $x_{i_1} \ldots x_{i_n} = y_{i_1} \ldots y_{i_n}$.

## MPCP

Eine MPCP-Instanz ist eine PCP-Instanz, bei der man sich fragt, ob es eine Lösung gibt mit $i_1 = 1$, d.h. ob eine Lösung für die PCP-Instanz existiert, die mit dem ersten Paar beginnt.

## Aufgabe 3

Geben Sie für die PCP-Instanz

$$\begin{pmatrix} 01 & 0 & 10 & 10 \\ 1 & 01 & 100 & 00 \end{pmatrix}$$

eine Lösung an.

Lösung:

$\alpha = (2, 4, 1)$, $w = x_2 x_4 x_1 = y_2 y_4 y_1 = 01001$. Alle Lösungen mit Indexfolgenlänge $\leq 11$ findet ihr auf der Tutoriumswebseite.

## Aufgabe 4

Warum kann es für die PCP-Instanz

$$\begin{pmatrix} 01 & 010 & 10 & 10 \\ 11 & 01 & 100 & 00 \end{pmatrix}$$

keine Lösung geben?

Lösung:

Weil keines der Paare das letzte/abschließende sein kann, da die Suffixe der Länge 1 bzw. 2 nicht übereinstimmen.

## Aufgabe 5

Geben Sie zu der Grammatik $G = (\{S, B\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit

$$
\begin{aligned}
P: \quad S &\rightarrow aSBc|\varepsilon \\
cB &\rightarrow Bc \\
aB &\rightarrow ab \\
bB &\rightarrow bb
\end{aligned}
$$

die nach VL zugehörige MPCP-Instanzen für

1. $w_1 = \varepsilon$ und
2. $w_2 = aabbcc$

sowie jeweils eine Lösung an.

# Lösung:

1. Instanz:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccccccccccccc} \langle & S & S & cB & aB & bB & S & B & a & b & c & | & |\rangle \\ \langle|S & aSBc & & Bc & ab & bb & S & B & a & b & c & | & \rangle \end{array}\right)$$

Lösung:$(1, 12, 3, 13)$, $\langle|S|\rangle$

2. Instanz:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccccccccccccc} \langle & S & S & cB & aB & bB & S & B & a & b & c & | & aabbcc|\rangle \\ \langle|S & aSBc & & Bc & ab & bb & S & B & a & b & c & | & \rangle \end{array}\right)$$

Lösung:$(1, 12, 2, 12, 9, 2, 8, 11, 12, 9, 9, 3, 8, 4, 11, 12,$
$9, 5, 8, 11, 11, 12, 9, 9, 6, 11, 11, 12, 13)$,
$\langle|S|aSBc|aaSBcBc|aaBBcc|aabBcc|aabbcc|\rangle$