Einführung in die Theoretische Informatik
Sonderfolien: Satz von Rice

Michael R. Jung

Satz (Satz von Rice)

Sei $\mathcal{F}$ eine Klasse von Funktionen und sei

$$L_{\mathcal{F}} := \{w \in \{0,1\}^* | M_w \text{ berechnet eine Funktion in } \mathcal{F}\}.$$

Gilt $\varnothing \subset L_{\mathcal{F}} \subset \{0,1\}^*$, so ist $L_{\mathcal{F}}$ unentscheidbar.

Satz (Satz von Rice für Sprachklassen)

Sei $\mathcal{S}$ eine Klasse von Sprachen und sei

$$L_{\mathcal{S}} := \{w \in \{0,1\}^* | L(M_w) \in \mathcal{S}\}.$$

Gilt $\varnothing \subsetneq L_{\mathcal{S}} \subsetneq \{0,1\}^*$, so ist $L_{\mathcal{S}}$ unentscheidbar.

Bemerkung:

Es gilt $\varnothing \subsetneq L_{\mathcal{S}} \subsetneq \{0,1\}^* \Leftrightarrow \varnothing \subsetneq (\mathcal{S} \cap RE) \subsetneq RE$.

Aufgabe 1

Gilt für die folgenden Sprachklassen $\mathcal{S}_i$, dass $L_{\mathcal{S}_i}$ entscheidbar ist?

1. $\mathcal{S}_1 := REC$
2. $\mathcal{S}_2 := RE$
3. $\mathcal{S}_3 := \{L | \bar{H} \leq L\}$

Lösungen:

1. Nein, denn $REC \subseteq RE, \{a\} \in REC, H \notin REC, H \in RE$ und somit ist $\mathcal{S}_1$ nicht trivial und $L_{\mathcal{S}_1}$ unentscheidbar.
2. $\mathcal{S}_2 = RE$ ist trivial und hier ist $L_{\mathcal{S}_2} = \{0,1\}^* \in REG \subset REC$, da per definitionem jede von einer TM akzeptierte Sprache semientscheidbar ist.
3. $\mathcal{S}_3 \cap RE = \varnothing$, da kein semi-entscheidbares Problem co-RE-schwer sein kann und $\mathcal{S}_3$ genau die Klasse der co-RE-schweren Sprachen ist. Somit ist $L_{\mathcal{S}_3} = \varnothing \in REC$.

Aufgabe 2

Sind folgende Sprachen entscheidbar?

1. $L_1 := \{w \in \{0,1\}^* | \exists w' \in \{0,1\}^* : M_w(w') = w'\}$
2. $L_2 := \{w \in \{0,1\}^* | \exists w' \in \{0,1\}^* : M_{w'}(w) = w\}$
3. $L_3 := \{w \in \{0,1\}^* | M_w(0) = w\}$.

Lösungen:

1. Betrachte $\mathcal{F} := \{f | \exists w' \in \{0,1\}^* : f(w') = w'\}$.
   Es ist $\mathrm{id}_{\Sigma^*} \in \mathcal{F}$ (Identität) und
   $+ : \Sigma^* \to \Sigma^*, +(x) := \mathrm{str}_\Sigma(\mathrm{num}_\Sigma(x) + 1) \notin \mathcal{F}$
   (lexikographischer Nachfolger). Somit ist $\mathcal{F}$ nicht trivial und $L_\mathcal{F}$ nicht entscheidbar.
   L_1 ist aber semientscheidbar. Betrachte eine TM M, die bei Eingabe w in der k-ten Runde M_w nacheinander auf allen Eingabe der Länge $\leq k$ simuliert, und dies k Schritte lang. Sollte also ein Wort $w', |w'| = n$ existieren, mit $M_w(w') = w'$ und M_w benötigt für die Rechnung m Schritte, so wird M w in der $(\max\{m, n\})$-ten Runde akzeptieren.

2 Betrachte die berechenbare Funktion id_{Σ^*}. Sei M eine Turingmaschine die id_{Σ^*} berechnet und sei w' ihre Kodierung. Somit existiert für alle Wörter w über $\{0, 1\}$ ein w' mit $M_{w'}(w) = w$, also ist $L_2 = \Sigma^* \in REC$.

3. ACHTUNG: Hier ist der Satz von Rice nicht anwendbar, da die Zugehörigkeit eines Wortes w zu L_3 nicht nur von der durch M_w berechneten Funktion abhängt, sondern auch von der Kodierung w selbst. Das soll heißen, es könnte Wörter $w \neq w'$ geben mit $\forall x \in \{0,1\}^* : M_w(x) = M_{w'}(x)$ (also M_w und $M_{w'}$ berechnen dieselbe Funktion), aber z.B. $w \in L_3, w' \notin L_3$, da $M_w(0) = M_{w'}(0) = w$.
   L_3 ist unentscheidbar, da sich z.B. das spezielle Halteproblem darauf reduzieren lässt via $w \mapsto w'$ mit:
   $M_{w'}$ vergisst zunächst ihre Eingabe, simuliert dann $M_w(w)$. Zum Schluss, falls die Simulation endet, gibt sie w' aus. Nun ist $w \in K \Leftrightarrow w' \in L_3$.