

Einführung in die Theoretische Informatik

Tutorium VI

Michael R. Jung

24. - 26. 11. 2014



- 1 Reguläre Grammatiken vs. NFAs
- 2 Chomsky-Normalform und CYK-Algorithmus
- 3 Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen



Aufgabe 1

Wandeln sie die gegebene Grammatik G in einen NFA N um, diesen dann in einen DFA M . Minimieren Sie M und wandeln Sie diesen in eine reguläre Grammatik zurück.

$$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S) \text{ mit}$$

$$P = \{$$

$$S \rightarrow aB,$$

$$B \rightarrow bS|bA|b,$$

$$A \rightarrow aA|aS|a$$

$$\}$$


Lösung:

Zunächst muss G' in eine Grammatik ohne Produktionen der Form $A \rightarrow a$ umgewandelt werden:

$$G'' = (\{S, A, B, X\}, \{a, b\}, P', S) \text{ mit}$$

$$P = \{$$

$$S \rightarrow aB,$$

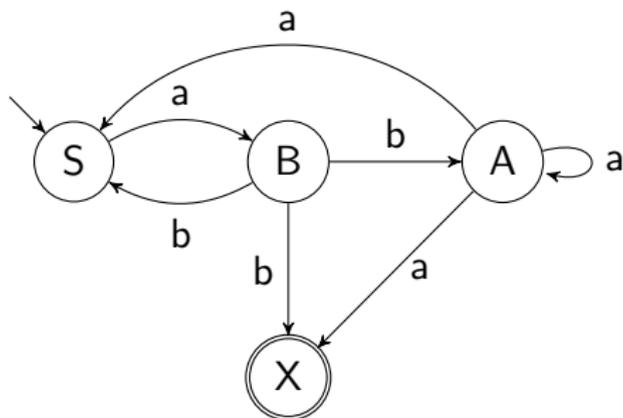
$$B \rightarrow bS|bA|bX,$$

$$A \rightarrow aA|aS|aX,$$

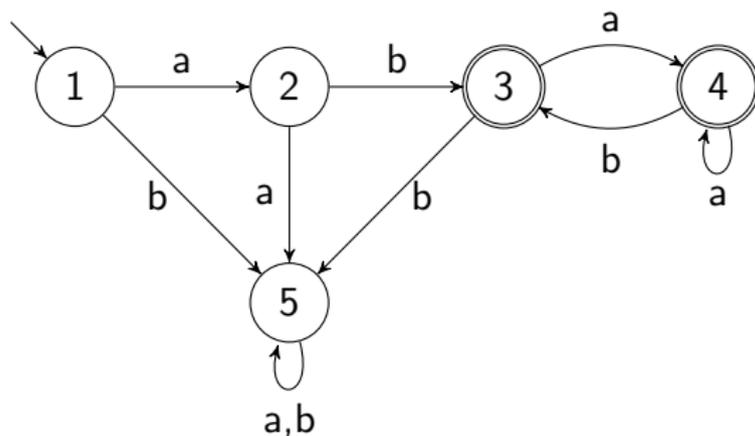
$$X \rightarrow \varepsilon$$

$$\}$$


Nun kann der NFA N folgen:



Mit der Potenzmengenkonstruktion ergibt sich M :



Benennung: $1 := \{S\}$, $2 := \{B\}$,
 $3 := \{S, A, X\}$, $4 := \{S, A, B, X\}$,
 $5 := \emptyset$



Erstellen wir die Tabelle für die Minimierung:

2	b			
3	ε	ε		
4	ε	ε	b	
5	ab	b	ε	ε
	1	2	3	4

Der Automat ist folglich schon minimal.



Daraus ergibt sich nun die Grammatik G'' :

$$G' = (\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{a, b\}, P'', 1) \text{ mit}$$

$$P = \{$$

$$1 \rightarrow a2|b5,$$

$$2 \rightarrow a5|b3,$$

$$3 \rightarrow a4|b5|\varepsilon,$$

$$4 \rightarrow a4|b3|\varepsilon,$$

$$5 \rightarrow a5|b5$$

$$\}$$


Aufgabe 2

Wandeln Sie G in eine Grammatik G' in CNF um, wobei $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$. Prüfen Sie mit dem CYK-Algorithmus, ob die Wörter $abbaab$, $aabbab$ in $L(G)$ liegen.

$$G = (\{S, X\}, \{a, b\}, P, S) \text{ mit}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow SS|X, \\ X \rightarrow aXb|\varepsilon \\ \end{array} \right\}$$



- 1 ε -Produktionen entfernen.

$$P' = \{S \rightarrow SS \mid X, X \rightarrow aXb \mid ab\}$$

- 2 Variablenumbenennung $S \rightarrow X$ entfernen.

$$P'' = \{S \rightarrow SS \mid aXb \mid ab, X \rightarrow aXb \mid ab\}$$

- 3 Hilfsvariablen für Terminale einführen.

$$P''' = \{S \rightarrow SS \mid AXB \mid AB, X \rightarrow AXB \mid AB \\ A \rightarrow a, B \rightarrow b\}$$

- 4 Rechte Seiten, die zu lang sind, behandeln.

$$P'''' = \{S \rightarrow SS \mid AX' \mid AB, X \rightarrow AX' \mid AB \\ X' \rightarrow XB, A \rightarrow a, B \rightarrow b\}$$



Damit ist $G' = (\{S, X, A, B, X'\}, \{a, b\}, P''''', S)$ wie gefordert.
 Nun müssen wir noch die beiden Wörter überprüfen.

	a	b	b	a	a	b
	A	B	B	A	A	B
	S, X	\emptyset	\emptyset	\emptyset	S, X	
	X'	\emptyset	\emptyset	\emptyset		
	\emptyset	\emptyset	\emptyset			
	\emptyset	\emptyset				
$S \notin$	\emptyset					



	<i>a</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>B</i>
	\emptyset	<i>S, X</i>	\emptyset	\emptyset	<i>S, X</i>	
	\emptyset	<i>X'</i>	\emptyset	\emptyset		
	<i>S, X</i>	\emptyset	\emptyset			
	\emptyset	\emptyset				
<i>S</i> \in	<i>S</i>					



Aufgabe 3

Zeigen Sie mit dem Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen, dass die Sprache $L = \{ww \mid w \in \{0, 1\}^*\}$ nicht kontextfrei ist.



Sei $l \in \mathbb{N}$. Betrachte $z = 0^l 1^l 0^l 1^l \in L$. Sei $z = uvwxy$ mit $vx \neq \varepsilon$ und $|vwx| \leq l$.

1. Fall:

Wenn v und x beide in der ersten Hälfte von z liegen, so beginnt die zweite Hälfte von uv^2wx^2y mit einer $1\frac{1}{2}$.

2. Fall:

Wenn v und x beide in der zweiten Hälfte von z liegen, so endet die erste Hälfte von uv^2wx^2y mit einer $0\frac{1}{2}$.

3. Fall:

Hier geht vwx über die Mitte von z . Nun wäre aber aber $uv^0wx^0y = uwy = 0^p 1^i 0^j 1^p$, wobei gilt: $i < p$ oder $j < p\frac{1}{2}$.

