Einführung in die Theoretische Informatik
Tutorium V

Michael R. Jung

17. - 19. 11. 2014

Satz (Pumping-Lemma)

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Dann gilt:

L *regulär* $\Rightarrow \exists l \in \mathbb{N}\ \forall x \in L, |x| \geq l\ \exists u, v, w \in \Sigma^*, uvw = x$ *mit*

$$v \neq \varepsilon \ \wedge\ |uv| \leq l \ \wedge\ \forall i \geq 0 : uv^i w \in L.$$

Kontraposition des Pumping-Lemmas

Das Pumping-Lemma ließe sich auch so schreiben:

Satz (Pumping-Lemma)

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Dann gilt:

Wenn $\forall l \in \mathbb{N}\ \exists x \in L, |x| \geq l\ \forall u, v, w \in \Sigma^*, uvw = x$ gilt:

$$v = \varepsilon \ \vee \ |uv| > l \vee \ \exists i \geq 0 : uv^i w \notin L,$$

so folgt: L nicht regulär.

Kontraposition des Pumping-Lemmas (Forts.)

Nun machen wir noch eine kleine Umformung, bis wir die Variante haben die wir meistens nutzen werden:

Satz (Pumping-Lemma)

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Dann gilt:

Wenn $\forall l \in \mathbb{N}\ \exists x \in L, |x| \geq l\ \forall u, v, w \in \Sigma^*, uvw = x$ gilt:

$$\left((v \neq \varepsilon\ \wedge\ |uv| \leq l) \Rightarrow\ \exists i \geq 0 : uv^i w \notin L\right),$$

so folgt: L nicht regulär.

Aufgabe 1

Zeigen sie

1. mit Hilfe des Pumping-Lemmas,
2. durch Angabe unendlich vieler bzgl. R_A bzw. R_B nicht äquivalenter Wörter

dass die Sprachen $A := \{a^n b^m c^k | n, m, k \geq 1, m \geq n + k\}$ und $B := \{a^n b^m c^k | n, m, k \geq 1, m < n + k\}$ nicht regulär sind.

Lösung (Pumping-Lemma):

1. A: Sei $l \in \mathbb{N}$. Betrachte $x = a^l b^{l+1} c \in A$.
   In jeder Zerlegung $uvw = x$ mit $v \neq \varepsilon$ und $|uv| \leq l$
   gilt: $v = a^i, 1 \leq i \leq l$.
   Also ist $uv^2w = a^{l+i} b^{l+1} c \notin A$.
   Folglich ist A nicht regulär.

   B: Sei $l \in \mathbb{N}$. Betrachte $x = a^l b^l c \in B$.
   In jeder Zerlegung $uvw = x$ mit $v \neq \varepsilon$ und $|uv| \leq l$
   gilt: $v = a^i, 1 \leq i \leq l$.
   Also ist $uv^0w = uw = a^{l-i} b^l c \notin B$.
   Folglich ist B nicht regulär.

Lösung (Myhill-Nerode-Relation):

2 A 1: Die Wörter $\{ab^{n+2}c | n \in \mathbb{N}\}$ sind bzgl. R_A pw. inäquivalent.
Für $m < n$ gilt: $ab^{m+2}cc^n \notin A, ab^{n+2}cc^n \in A$.

A 2: Die Wörter $\{a^n | n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ sind bzgl. R_A pw. inäquivalent.
Für $0 < m < n$ gilt: $a^m b^{m+1} c \in A, a^n b^{m+1} c \notin A$.

B 1: Die Wörter $\{ab^{n+2}c | n \in \mathbb{N}\}$ sind bzgl. R_B pw. inäquivalent.
Für $m < n$ gilt: $ab^{m+2}cc^n \in B, ab^{n+2}cc^n \notin B$.

B 2: Die Wörter $\{a^n | n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ sind bzgl. R_B pw. inäquivalent.
Für $0 < m < n$ gilt: $a^m b^n c \notin B, a^n b^m c \in B$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Pumping-Zahlen der folgenden Sprachen.

1. $L_1 :=$ Die Menge, der durch 4 teilbaren, natürlichen Zahlen in Dezimaldarstellung.
2. $L_2 := \{a^{2n} | n \in \mathbb{N}\}$.
3. $L_{k,c} := \{a^{kn+c} | n \in \mathbb{N}\}$.

Lösung:

1. Da $4|100$ wird deutlich, dass man die erste Stelle einer dreistelligen Zahl beliebig (auf- oder ab-)pumpen kann.$\Rightarrow l_1 \leq 3$.
   Betrachten wir $32 \in L_1$. Für $l = 2$ hätten wir folgende Zerlegungen in uvw mit $|uv| \leq 2, v \neq \varepsilon$:

   $u = \varepsilon, v = 3, w = 2$ Dann wäre aber $uv^0w = 2 \notin L_1$.
   $u = 3, v = 2, w = \varepsilon$ Dann wäre aber $uv^0w = 3 \notin L_1$.
   $u = w = \varepsilon, v = 32$ Dann wäre aber $uv^0w = \varepsilon \notin L_1$.

   Folglich ist $l_1 > 2$ und somit $l_1 = 3$.

2. l_2 ist offensichtlich 2, da wir die ersten beiden as beliebig pumpen können, ohne dass die Länge ungerade wird.
3. Zunächst ist klar, dass $l_{k,c} \geq k$. Hier müssen wir eine Fallunterscheidung machen:

$k > c$ Hier ist $l_{k,c}$ offensichtlich k, da wir die ersten k as beliebig pumpen können, ohne dass die Längenbedingung verletzt wird.

$k \leq c$ Dieser Fall ist nicht ganz, so einfach, da dass kürzeste Wort in der Sprache a^c ist und dieses schon k as beinhaltet.Also können wir die ersten k as dieses Wortes nicht abpumpen. In $a^k + c$ können wir das aber.Es ist nun leicht zu sehen, dass $l_{k,c}$ hier $c + 1$ sein muss.

Insgesamt ist also $l_{k,c} = \max\{c + 1, k\}$.

Aufgabe 3

Seien $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ und Π ein beliebiges Alphabet. Geben Sie reguläre Grammatiken für folgende Sprachen an.

1. $L_1 :=$ {Dezimaldarstellungen, der durch 4 teilbaren Zahlen}.
2. $L_2 :=$ {Dezimaldarstellungen, der durch 3 teilbaren Zahlen}.
3. $L_3 \subseteq \Pi^*, L_3 = \{w_1, \dots, w_n\}$ mit $w_i = a_{i,1} \dots a_{i,k_i}$. *(optional)*

Erinnerung: Eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S\}$ heißt regulär, falls $P \subseteq V \times (\{\varepsilon\} \cup \Sigma \cup \Sigma V)$.

$L_1 := \{$Dezimaldarstellungen, der durch 4 teilbaren Zahlen$\}$.

Geben wir zunächst die Produktionen an:

$$
\begin{aligned}
P_1 = \{ & \\
& S_1 \to 0|4|8|1A|3A|5A|6A|7A|9A|2B|4B|6B|8B, && (1)\\
& S_1 \to 1C|2C|3C|4C|5C|6C|7C|8C|9C, && (2)\\
& A \to 2|6, && (3)\\
& B \to 0|4|8, && (4)\\
& C \to 0C|1C|2C|3C|4C|5C|6C|7C|8C|9C && (5)\\
& C \to 1A|3A|5A|6A|7A|9A|0B|2B|4B|6B|8B, && (6)\\
\} &
\end{aligned}
$$

Also ist $G_1 = (\{S_1, A, B, C\}, \Sigma, P_1, S_1)$.

$L_2 := \{$Dezimaldarstellungen, der durch 3 teilbaren Zahlen$\}$
Geben wir zunächst die Produktionen an:

$$P_2 = \{$$

$$S_2 \to 0|3|6|9|1A|4A|7A|2B|5B|8B|3C|6C|9C, \quad (7)$$

$$A \to 2|5|8|2C|5C|8C|1B|4B|7B|0A|3A|6A|9A, \quad (8)$$

$$B \to 1|4|7|1C|4C|7C|2A|5A|8A|0B|3B|6B|9B, \quad (9)$$

$$C \to 0|3|6|9|1A|4A|7A|2B|5B|8B|0C|3C|6C|9C \quad (10)$$

$$\}$$

Also ist $G_2 = (\{S_2, A, B, C\}, \Sigma, P_2, S_2)$.

$L_3 \subseteq \Pi^*, L_3 = \{w_1, \dots, w_n\}$ mit $w_i = a_{i,1} \dots a_{i,k_i}$.
$G_3 = (\{S_3\} \cup \{X_{i,j} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k_i\}, \Pi, P_3, S_3)$ mit

$$P_2 = \{$$

$$S_3 \to a_{1,1}X_{1,2}|a_{2,1}X_{2,2}| \dots |a_{n,1}X_{n,2}, \tag{11}$$

$$X_{i,j} \to a_{i,j}X_{i,j+1}, \qquad 1 \leq i \leq n, 1 < j < k_i \tag{12}$$

$$X_{i,k_i} \to a_{i,k_i} \tag{13}$$

$$\}$$

c) $R^* \subseteq R^+ \cup R^0$
Hier zu zeigen: $R \subseteq R^+ \cup R^0$ und $R^+ \cup R^0$ ist reflexiv und transitiv.
$R^* \supseteq R^+ \cup R^0$
Hier zu zeigen: $(x, y) \in R^+ \cup R^0 \Rightarrow (x, y) \in R^*$, am besten unter Zuhilfenahme von b).
$R^+ = R \circ R^*$
Hier ist es am einfachsten, vorhergehende Ergebnisse aus b) und c) zu nutzen.

e) $h_{sym}(R) \subseteq R \cup R^T$
Hier zu zeigen: $R \subseteq R \cup R^T$ und $R \cup R^T$ ist symmetrisch.
$h_{sym}(R) \supseteq R \cup R^T$
Hier zu zeigen: $(x, y) \in R \cup R^T \Rightarrow (x, y) \in h_{sym}(R)$ mit Fallunterscheidung.

f) $h_{äq}(R) \subseteq (R \cup R^T)^*$
Hier zu zeigen: $R \subseteq (R \cup R^T)^*$ und $(R \cup R^T)^*$ ist Äquivalenzrelation, am einfachsten über d),e) und Eigenschaften von *.
$h_{äq}(R) \supseteq (R \cup R^T)^*$
Hier zu zeigen: $(x, y) \in (R \cup R^T)^* \Rightarrow (x, y) \in h_{äq}(R)$. Zunächst einmal beginnend mit $(R \cup R^T) \subseteq h_{äq}(R)$ und dann *.