Einführung in die Theoretische Informatik
Tutorium XI

Michael R. Jung

13. & 14. 01. 2015

$\mathrm{num}(x), \mathrm{str}(n)$

Sei $\Sigma = \{a_0, \ldots, a_{m-1}\}$, also $|\Sigma| = m$ und sei $x = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n} \in \Sigma^n \subseteq \Sigma^*$.

- Nun ist $\mathrm{num}_\Sigma(x) := \sum_{j=0}^{n-1} m^j + \sum_{j=1}^{n} i_j m^{n-j} = \frac{m^n-1}{m-1} + (i_1 \ldots i_n)_m$, dabei gibt $\frac{m^n-1}{m-1}$ den Offset für Wörter der Länge n an und man addiert $k = (i_1 \ldots i_n)_m$, d.h. x ist einfach das lexikographisch $(k+1)$-te Wort der Länge n.
- Da $\mathrm{num}_\Sigma : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ bijektiv ist, können wir $\mathrm{str}_\Sigma : \mathbb{N} \to \Sigma^*$ definieren als $\mathrm{str}_\Sigma(n) := \mathrm{num}_\Sigma^{-1}(n)$.

Wenn Σ aus dem Zusammenhang klar ist, schreiben wir statt num_Σ oder str_Σ nur num bzw. str.

Beispiele für $\Sigma = \{0, 1\}$:

x	0	10	00	ε	00101
$\mathrm{num}(x)$	1	5	3	0	36

n	2	4	12	32	115
$\mathrm{str}(n)$	1	01	101	00001	110100

Sei $\Sigma = \{0, 1, \ldots, 9\}$.

Aufgabe 1

Geben Sie $\text{str}(3), \text{str}(17), \text{str}(100), \text{str}(120)$ sowie $\text{num}(0), \text{num}(1), \text{num}(10), \text{num}(100), \text{num}(1000)$ an.

Lösung:

n	3	17	100	120
$\text{str}(n)$	2	06	89	009

x	0	1	10	100	1000
$\text{num}(x)$	1	2	21	211	2111

Aufgabe 2

Geben Sie jeweils ein LOOP-, WHILE- und GOTO-Programm für die Funktion

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(a, b) := a^b$$

an.

```
r_0=r_0+1;
LOOP r_2 DO
  LOOP r_0 DO
    LOOP r_1 DO
      r_3=r_3+1
    END
  END;
  r_0=r_3+0;
  r_3=r_4+0
END
```

Besser: Teilprobleme lösen, auf die man zurückgreifen kann.

```
+(a,b):
r_0=r_1+0;
LOOP r_2 DO
  r_0=r_0+1
END

*(a,b):
LOOP r_1 DO
  r_0=r0+r_2
END
```

Dann kann man ein LOOP-Programm für $f(a,b) = a^b$ folgendermaßen schreiben:

```
r_0=r_0+1;
LOOP r_2 DO
  r_0=r_0*r_1
END
```

Frage: Wie kann ich eine While-Schleife der Form

```
WHILE r != 0 DO
  P
END
```

in eine Schleife der Form

```
WHILE r' = 0 DO
  P
END
```

umwandeln?

Lösung:

```
IF r=0 THEN r'=1 ELSE r'=0;
WHILE r' = 0 DO
  P;
IF r=0 THEN r'=1 ELSE r'=0
END
```

```
+(a,b):
r_0=r_1+0;
WHILE r_2 != 0 DO
  r_0=r_0+1;
  r_2=r_2-1
END

*(a,b):
WHILE r_2 != 0 DO
  r_0=r0+r_1;
  r_2=r_2-1
END
```

Nun kann man ein WHILE-Programm für $f(a, b) = a^b$ folgendermaßen schreiben:

```
r_0=r_0+1;
WHILE r_2 != 0 DO
  r_0=r_0*r_1;
  r_2=r_2-1
END
```

```
+(a,b):
1: r_0=r_1+0
2: IF r_2 = 0 THEN GOTO 6
3: r_0=r_0+1
4: r_2=r_2-1
5: GOTO 2
6: HALT
```

```
*(a,b):
1: IF r_2 = 0 THEN GOTO 5
2: r_0=r_0+r_1;
3: r_2=r_2-1
4: GOTO 1
5: HALT
```

Nun kann man ein GOTO-Programm für $f(a, b) = a^b$ folgendermaßen schreiben:

```
1: r_0=r_0+1
2: IF r_2 = 0 THEN GOTO 6
3: r_0=r_0*r_1
4: r_2=r_2-1
5: GOTO 2
6: HALT
```

Satz (Satz von Rice)

Sei $\mathcal{F}$ eine Klasse von Funktionen und sei

$$L_{\mathcal{F}} := \{w \in \{0,1\}^* | M_w \textit{ berechnet eine Funktion in } \mathcal{F}\}.$$

Gilt $\emptyset \subset L_{\mathcal{F}} \subset \{0,1\}^*$, so ist $L_{\mathcal{F}}$ unentscheidbar.

Satz (Satz von Rice für Sprachen)

Sei $\mathcal{S}$ eine Klasse von Sprachen und sei

$$L_{\mathcal{S}} := \{w \in \{0,1\}^* | L(M_w) \in \mathcal{S}\}.$$

Gilt $\varnothing \subset L_{\mathcal{S}} \subset \{0,1\}^*$, so ist $L_{\mathcal{S}}$ unentscheidbar.

Bemerkung:

Es gilt $\varnothing \subset L_{\mathcal{S}} \subset \{0,1\}^* \Leftrightarrow \varnothing \subset (\mathcal{S} \cap RE) \subset RE$.

Aufgabe 3

Gilt für die folgenden Sprachklassen $\mathcal{S}_i$, dass $L_{\mathcal{S}_i}$ entscheidbar ist?

1. $\mathcal{S}_1 := REC$
2. $\mathcal{S}_2 := RE$
3. $\mathcal{S}_3 := \{L | \bar{H} \leq L\}$

Lösungen:

1. Nein, denn $REC \subseteq RE, \{a\} \in REC, H \notin REC, H \in RE$ und somit ist $\mathcal{S}_1$ nicht trivial und $L_{\mathcal{S}_1}$ unentscheidbar.
2. $\mathcal{S}_2 = RE$ ist trivial und hier ist $L_{\mathcal{S}_2} = \{0, 1\}^* \in REG \subset REC$, da per definitionem jede von einer TM akzeptierte Sprache semientscheidbar ist.
3. $\mathcal{S}_3 \cap RE = \varnothing$, da kein semi-entscheidbares Problem co-RE-schwer sein kann und $\mathcal{S}_3$ genau die Klasse der co-RE-schweren Sprachen ist. Somit ist $L_{\mathcal{S}_3} = \varnothing \in REC$.

Aufgabe 4

Sind folgende Sprachen entscheidbar?

1. $L_1 := \{w \in \{0,1\}^* | \exists w' \in \{0,1\}^* : M_w(w') = w'\}$
2. $L_2 := \{w \in \{0,1\}^* | \exists w' \in \{0,1\}^* : M_{w'}(w) = w\}$
3. $L_3 := \{w \in \{0,1\}^* | M_w(0) = w\}$.

Lösungen:

1. Betrachte $\mathcal{F} := \{f | \exists w' \in \{0,1\}^* : f(w') = w'\}$.
   Es ist $\mathrm{id}_{\Sigma^*} \in \mathcal{F}$ (Identität) und
   $+ : \Sigma^* \to \Sigma^*, +(x) := \mathrm{str}_\Sigma(\mathrm{num}_\Sigma(x) + 1) \notin \mathcal{F}$
   (lexikographischer Nachfolger). Somit ist $\mathcal{F}$ nicht trivial und $L_\mathcal{F}$ nicht entscheidbar.
   L_1 ist aber semientscheidbar. Betrachte eine TM M, die bei Eingabe w in der k-ten Runde M_w nacheinander auf allen Eingabe der Länge $\leq k$ simuliert, und dies k Schritte lang. Sollte also ein Wort $w', |w'| = n$ existieren, mit $M_w(w') = w'$ und M_w benötigt für die Rechnung m Schritte, so wird M w in der $(\max\{m, n\})$-ten Runde akzeptieren.

2. Betrachte die berechenbare Funktion id_{Σ^*}. Sei M eine Turingmaschine die id_{Σ^*} berechnet und sei w' ihre Kodierung. Somit existiert für alle Wörter w über $\{0,1\}$ ein w' mit $M_{w'}(w) = w$, also ist $L_2 = \Sigma^* \in REC$.

3. ACHTUNG: Hier ist der Satz von Rice nicht anwendbar, da die Zugehörigkeit eines Wortes w zu L_3 nicht nur von der durch M_w berechneten Funktion abhängt, sondern auch von der Kodierung w selbst. Das soll heißen, es könnte Wörter $w \neq w'$ geben mit $\forall x \in \{0,1\}^* : M_w(x) = M_{w'}(x)$ (also M_w und $M_{w'}$ berechnen dieselbe Funktion), aber z.B. $w \in L_3, w' \notin L_3$, da $M_w(0) = M_{w'}(0) = w$.
L_3 ist unentscheidbar, da sich z.B. das spezielle Halteproblem darauf reduzieren lässt via $w \mapsto w'$ mit:
$M_{w'}$ vergisst zunächst ihre Eingabe, simuliert dann $M_w(w)$. Zum Schluss, falls die Simulation endet, gibt sie w' aus. Nun ist $w \in K \Leftrightarrow w' \in L_3$.