Einführung in die Theoretische Informatik
Tutorium I

Michael R. Jung

20. - 22. 10. 2014

Kontakt

E-Mail	jungmi@math.hu-berlin.de
Telefon	030 2093 **3146**
Büro	3.311
Sprechzeit	Montag 12-13
Webseiten	www.informatik.hu-berlin.de/∼mjung

www.informatik.hu-berlin.de/∼mjung/Tutorium/tutorium.html

Definition: Monoid

Ein Monoid ist ein Tripel $(M, \circ, e), e \in M, \circ : M \times M \to M$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Assoziativität:
   $\forall x, y, z \in M : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$
2. neutrales Element:
   $\forall x \in M : e \circ x = x \circ e = x$

Aufgabe 1

Sind folgende Tupel ein Monoid?

- $(\{1\}, \div, 1)$ JA
- $\left(\mathbb{R}^2, +, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ JA
- $(\{\frac{1}{2}, 1, 2\}, \div, 1)$ NEIN, denn $2 \div \frac{1}{2} = 4$ und auch nicht assoziativ
- $(\{0, 1\}, \diamond, 0)$ mit $\begin{array}{c|cc} \diamond & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$ JA
- $(\{0, 1, 2\}, \odot, 0)$ mit $\begin{array}{c|ccc} \odot & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}$ NEIN, denn 0 ist nicht (links-)neutral $(0 \odot 1 = 0)$

Beweis, dass $\left(\mathbb{R}^2, +, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ assoziativ ist:

$$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ gilt:}$$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \overset{\text{Def. }+}{=} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

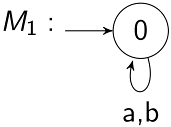
$$\overset{\text{Def. }+}{=} \begin{pmatrix} (x_1 + y_1) + z_1 \\ (x_2 + y_2) + z_2 \end{pmatrix} \overset{\text{Ass. in }\mathbb{R}}{=} \begin{pmatrix} x_1 + (y_1 + z_1) \\ x_2 + (y_2 + z_2) \end{pmatrix}$$

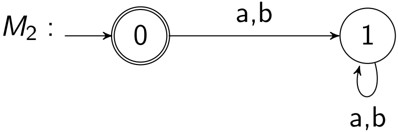
$$\overset{\text{Def. }+}{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 + z_1 \\ y_2 + z_2 \end{pmatrix} \overset{\text{Def. }+}{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right)$$

$\varnothing$ vs. $\{\varepsilon\}$ via DFAs

Aufgabe 2

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie einen DFA M_1 der $\varnothing$ und einen DFA M_2 der $\{\varepsilon\}$ akzeptiert an.





Sei $\Sigma = \{a, b, \star\}$ und seien $A = \{\varepsilon, a, ab, \star a\star\}$, $B = \{b, \star\}$ und $C = \{\star\star\}$ Sprachen über Σ.

Aufgabe 3

Geben Sie folgende Sprachen an:

a)	BC	*b)*	ΣB	*c)*	$B \cap \Sigma$
d)	$(A \cup B) \cap \Sigma$	*e)*	$AB \cap \Sigma$	*f)*	$AB \cap \Sigma AC$
g)	$A^* \setminus A^+$	*h)*	$B^2 \setminus C$	*i)*	$CABA \cap BA\Sigma$

Zur Erinnerung: $L^* := \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i,\ L^+ := \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i$

Lösungen:

a) $BC = \{b\star\star, \star\star\star\}$

b) $\Sigma B = \{ab, bb, \star b, a\star, b\star, \star\star\}$

c) $B \cap \Sigma = B$

d) $(A \cup B) \cap \Sigma = \Sigma$

e) $AB \cap \Sigma = B$

f) $AB \cap \Sigma AC = \{\star a\star\star\}$

g) $A^* \setminus A^+ = \varnothing$

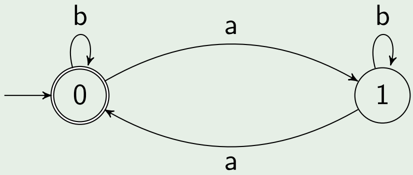
h) $B^2 \setminus C = \{bb, b\star, \star b\}$

i) $CABA \cap BA\Sigma = \{\star\star a\star a\}$

Aufgabe 4

Geben Sie die vom folgenden Automaten M erkannte Sprache $L(M)$ an.

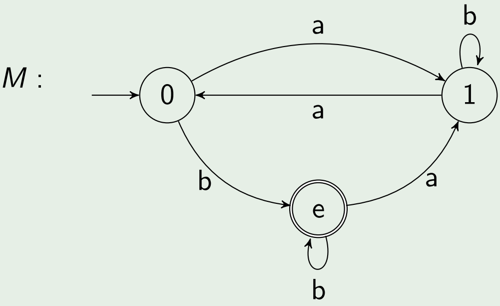
M :



$$L(M) = \{w \in \{a, b\}^* | \#_a(w) \text{ gerade } \}$$

Aufgabe 5

Geben Sie die von M erkannte Sprache $L(M)$ an.

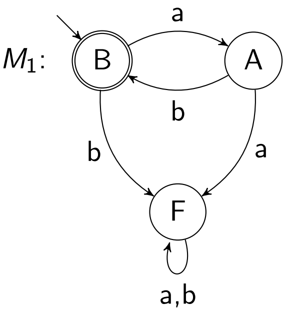


$$L(M) = \{w \in \{a,b\}^* | \#_a(w) \text{ gerade und } w \text{ endet auf } b\}$$

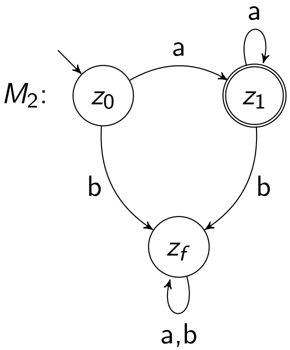
Gebeben Sie für folgende Sprachen über $\Sigma = \{a, b\}$ einen DFA an:

1. $L_1 = \{ab\}^*$
2. $L_2 = \{a\}^+$
3. $L_3 = \{w \in \Sigma^* | \#_b(w) \equiv_5 2 \vee \#_b(w) \equiv_5 4\}$

$$L_1 = \{ab\}^*$$



$$L_2 = \{a\}^+$$



$$L_3 = \{w \in \Sigma^* | \#_b(w) \equiv_5 2 \vee \#_b(w) \equiv_5 4\}$$

M_3 :