Stochastik für InformatikerInnen

Wintersemester 2016/17

Wolfgang Kössler

16. Januar 2017

1 Grundbegriffe

1.1 Einleitung, Geschichte

Geschichte (1)

- antikes Griechenland Begriff der Wahrscheinlichkeit Naturgesetze drücken sich durch eine Vielzahl von zufälligen Erscheinungen aus.
- 1654, Chevalier de Méré, Pascal Würfelspiele, Würfe mit 2 Würfeln. Wenn in 25 Würfen einmal eine Doppelsechs so hat C.d.M. gewonnen, sonst sein Gegner.

Geschichte (2)

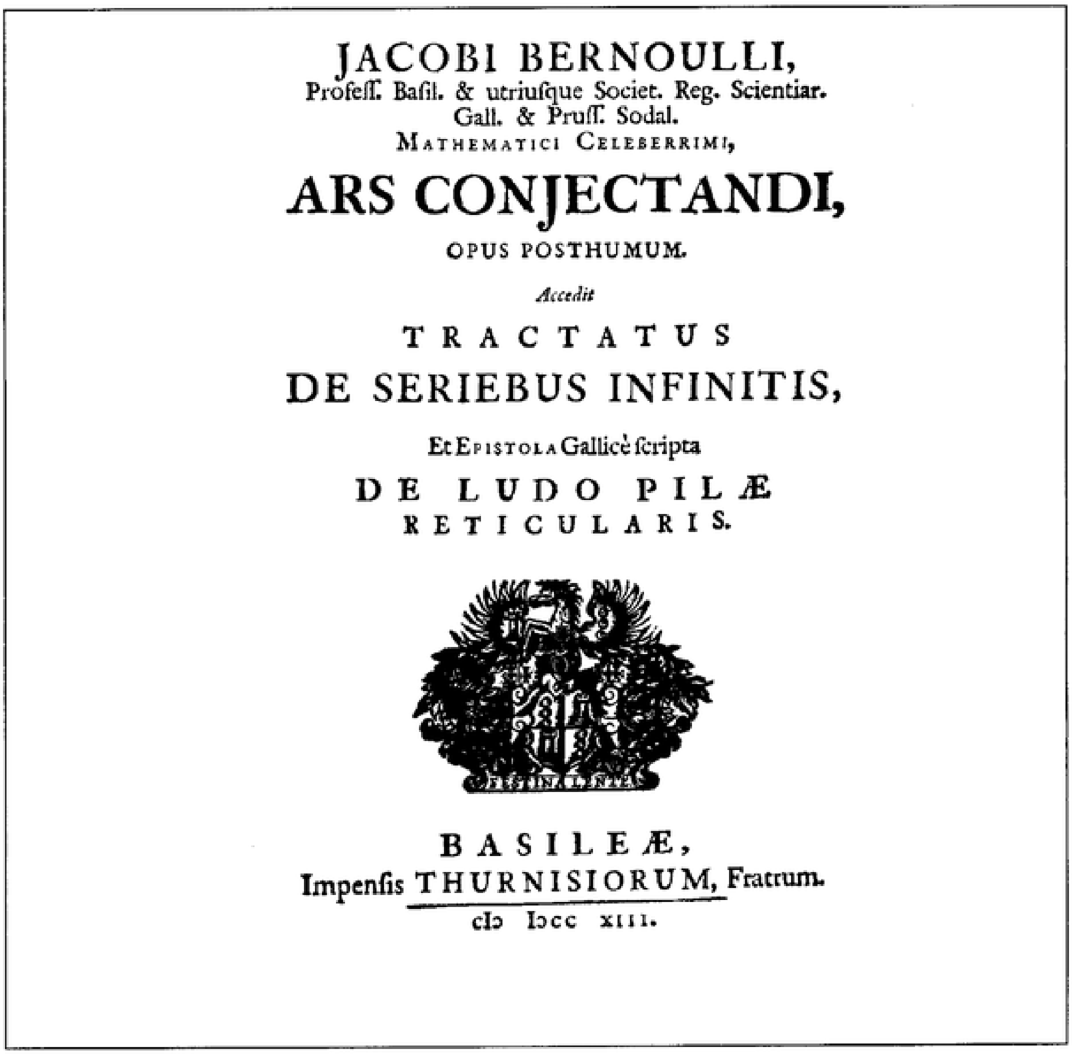
Geschichte (3)

Pascal, Fermat (Briefwechsel)

2 Personen-Spiele. Gespielt wird eine Serie von Partien, z.B. Schach (nur 0,1). Gewinnen soll der Spieler, der zuerst S Partien gewonnen hat, d.h. dieser Spieler erhält den vollen Einsatz. **Abbruch** des Spiels (z.B. wegen Zeitmangel) A hat a Gewinnpartien, $a < S$ B hat b Gewinnpartien, $b < S$ Wie ist der Einsatz gerecht zu verteilen? Variante: $\frac{a}{b}$, aber S wird nicht berücksichtigt! Es wäre also der weitere mögliche Verlauf nach dem Abbruch zu analysieren.

Geschichte (4)

- 1662, Graunt; 1693 Halley Sterlichkeitstafeln (Überlebenswkt. in Abhängigkeit vom Lebensalter) $\rightarrow$ Rentenberechnung, Schiffsversicherung
- 1713, Jacob Bernoulli "Ars conjectandi": 1. Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung Bernoulli-Gesetz der Großen Zahlen, $p = P(A)$ $h_n(A) = \frac{1}{n}\#$ Auftreten v. A, $h_n(A) - p \rightarrow_{n\rightarrow\infty} 0$
- 1733, Moivre Grenzwertsatz von Moivre-Laplace $\sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma} \rightarrow \mathcal{N}(0,1)$



JACOBI BERNOULLI,
Profeſſ. Baſil. & utriuſque Societ. Reg. Scientiar.
Gall. & Pruſſ. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,

ARS CONJECTANDI,

OPUS POSTHUMUM.

Accedit

TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,

Et EPISTOLA Gallicè ſcripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.

FESTINA LENTE

BASILEÆ,
Impenſis THURNISIORUM, Fratrum.
cIↃ IↃcc xiii.

Geschichte (6)

- 1812, Laplace klassische Definition der Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = \frac{\#\text{für } A \text{ günstigen Elementarereignisse}}{\#\text{möglichen Elementarereignisse}}$$

- 1800, Laplace, Gauss Untersuchung von Beobachtungsfehlern Kleinste Quadrat-Schätzung
- um 1800, Bessel Annahme Normalverteilung ($\overline{X}$ rechtfertigen)
- Quetelet (1796-1874): Normalverteilung sei allgemeingültig

Geschichte (7)

- Ende 19. Jh., Tschebyschev, Markov, Ljapunov
- Ende 19. Jh., v. Bortkiewicz Anzahl der tödlichen Unfälle bei Pferdetritten
- Ende 19. Jh., Galton Begriffe Regression, Korrelation
- 1900, David Hilbert (2. Intern.Mathematikerkongress Paris) 23 Probleme der Mathematik, u.a. Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Geschichte (8)

- 1919 R.v. Mises statistische Definition der Wahrscheinlichkeit, Erfahrung: $P(A) := \lim_{n\to\infty} h_n(A)$ Existiert der Grenzwert?

- 1933, A.N. Kolmogorov Axiomsystem der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Stochastik

- Statistik: Gesamtheit aller Methoden zur Analyse zufallsbehafteter Datenmengen $\rightarrow$ Aussagen über die zugrundeliegende Grundgesamtheit treffen.

- Wahrscheinlichkeitsrechnung: gegebene Grundgesamtheit (Verteilung) $\rightarrow$ Aussagen über Realisierungen einer Zufallsvariablen treffen.

- Stochastik: (grch.) im Rechnen geschickt.

Literatur

Mathar, R. und Pfeiffer, D. (1990) Stochastik für Informatiker, Stuttgart

Pflug, G. (1986). Stochastische Modelle in der Informatik, Stuttgart

Greiner, M. und Tinhofer, G. (1996) Stochastik für Studienanfänger der Informatik, München

Steland, A. (2013). Basiswissen Statistik, Springer

Henze, N. (2004), Stochastik für Einsteiger, Wiesbaden

Dehling, H., Haupt, B. (2003). Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung, Springer

Büchter, A., Henn, H.-W. (2005). Elementare Stochastik, Springer

Rosanov, J.A. (1970). Wahrscheinlichkeitstheorie, Berlin

Flachsmeyer, J. (1970). Kombinatorik, Berlin

1.2 Zufällige Ereignisse

Def. 1 Ein <u>zufälliger Versuch</u> (Experiment)
ist ein Versuch mit ungewissem Ausgang.

Beispiel: Glücksspiele.

Wichtig bei solchen Experimenten ist:

- die Beschreibung des Experiments (Kartenspiele, Münzwurf),
- die Erfassung der Menge aller möglichen Ausgänge des Experiments.

Zufällige Ereignisse (2)

Def. 2 (Grundbegriffe)

- Elementarereignis: möglicher Versuchsausgang, **Bez.**: ω, $\omega \in \Omega$.
- Ereignis: Menge von Elementarereignissen, $A \subseteq \Omega$
- sicheres Ereignis: Menge aller El.ereignisse: Ω.
- unmögiches Ereignis: $\emptyset$.
- Komplementärereignis: $\overline{A} = \Omega \setminus A$

Ein Experiment kann diskret sein, d.h. endlich oder abzählbar viele Ausgänge besitzen, oder es kann überabzählbar viele Ausgänge haben.

Zufällige Ereignisse (3)

Experimente mit einer endlichen Anzahl von Elementarereignissen

- Münzwurf
  - zwei Elementarereignisse: $\{$Zahl $(z)\}$, $\{$Wappen $(w)\}$;
  - das unmögliche Ereignis $\emptyset = \{z\} \cap \{w\}$;
  - das sichere Ereignis $\Omega := \{z, w\}$.

  Die Menge der auftretenden Ereignisse ist $\mathcal{P}(\Omega) := \{\emptyset, \{z\}, \{w\}, \Omega\}$, die Potenzmenge von Ω.

Zufällige Ereignisse (4)

Würfeln (1 mal)
Elementarereignisse: $1, 2, 3, 4, 5, 6$, d.h. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Damit erhalten wir für paarweise verschiedene $i, j, k, l, m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ die möglichen Ereignisse :

Ereignistyp	$\emptyset$	$\{i\}$	$\{i,j\}$	$\{i,j,k\}$	$\{i,j,k,l\}$	$\{i,j,k,l,m\}$	Ω	gesamt
Anzahl	1	6	15	20	15	6	1	$2^6 = 64$

Also insgesamt $2^6 = 64$ mögliche Ereignisse.

Zufällige Ereignisse (5)

Experimente mit abzählbarvielen Elementarereignissen

1. Werfen einer Münze, bis zum ersten Mal die Zahl fällt

$$\Omega = \{z, wz, wwz, wwz, wwwz, \ldots\}.$$

2. Anzahl der ankommenden Fahrzeuge an einer Kreuzung in einem bestimmten Zeitbereich

$$\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Zufällige Ereignisse (6)

Experimente mit überabzählbar vielen Elementarereignissen

- Lebensdauer einer Glühbirne

$$\Omega = [0, \infty[\,.$$

  Ereignisse sind z.B. Intervalle und Punkte.

  Es gilt beispielsweise: $\emptyset = [0,1] \cap [3,5]$.

  Das Ereignis $A = [0.4, 3.1] \cup \{7\}$ bedeutet, daß die Glühbirne eine Lebensdauer von $7s$ oder eine Lebensdauer zwischen $0.4s$ und $3.1s$ hat.

Anmerkung: Die Aussage gilt in Unkenntnis physikalischer Gesetze über diskrete Zeittakte.

Zufällige Ereignisse (7)

überabzählbar viele Elementarereignisse

- Messung einer physikalischen Konstante

$$\underbrace{y}_{\text{Meßwert}} = \underbrace{m}_{\text{Konstante}} + \underbrace{\varepsilon}_{\text{Meßfehler}}.$$

  Die Meßfehler sind die Elementarereignisse. Ereignisse sind beispielsweise Intervalle.

- Experimente, deren Ausgänge Funktionen der Zeit sind, $\Omega = \Omega_0 \times T$. Ereignisse im Experiment sind dann bestimmte Funktionsverläufe $\Longrightarrow$ stochastische Prozesse.

1.3 Ereignisfeld

Ein Ereignisfeld $\mathcal{E}$ ist (grob) ein System von Teilmengen der Menge Ω. Es gilt: $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$.

Def. 3 ($\cup, \cap$, **Komplement)**
Es seien $A_1 \in \mathcal{E}$ und $A_2 \in \mathcal{E}$ Ereignisse. Dann

- $A_3 := A_1 \cap A_2 = \{\omega \in \Omega \colon \omega \in A_1 \text{ und } \omega \in A_2\}$ das Ereignis, bei dem A_1 und A_2 eintreten;
- $A_3 := A_1 \cup A_2 = \{\omega \in \Omega \colon \omega \in A_1 \text{ oder } \omega \in A_2\}$ das Ereignis, bei dem A_1 oder A_2 eintreten;
- $\overline{A_1} = \Omega \setminus A_1 = \{\omega \in \Omega \colon \omega \notin A_1\}$ das zu A_1 komplementäre Ereignis.

Ereignisfeld (2)
Es gilt offenbar:

- $A \cup \overline{A} = \Omega$ (sicheres Ereignis),
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$ (unmögliches Ereignis).

Ereignisfeld (3)

Satz (Rechenregeln für Ereignisse)

(i) $A \cup B = B \cup A$ (Kommutativgesetz)

(ii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (Assoziativgesetz)

(iii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(iv) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (Distributivgesetze)

(v) (De'Morgansche Regeln)

$$\begin{aligned}\overline{(A \cup B)} &= \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{(A \cap B)} &= \overline{A} \cup \overline{B}\end{aligned}$$

Ereignisfeld (4)

Def. 4
Seien $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ Ereignisse. Die Vereinigung $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ist das Ereignis, das eintritt, wenn mindestens eines Ereignisse $A_1, A_2, A_3, \ldots$ eintritt. Der Durchschnitt $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ ist das Ereignis, das eintritt, wenn alle Ereignisse $A_1, A_2, A_3, \ldots$ eintreten.

Ereignisfeld (5)

Verallgemeinerungen der Rechenregeln
Seien $A, A_1, \ldots$ Ereignisse.

(iii) $A \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty}(A \cap A_i)$

(iv) $A \cup (\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcap_{i=1}^{\infty}(A \cup A_i)$

(v)

$$\begin{aligned}\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} &= \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} \\ \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} &= \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}\end{aligned}$$

Ereignisfeld (6)

Def. 5 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ **heißt** **Ereignisfeld** **über** Ω
falls folgendes gilt:

1. $\Omega \in \mathcal{E}$;
2. Gilt $A_i \in \mathcal{E}$ für $i \in \mathbf{N}$, dann folgt $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E}$;
3. $A \in \mathcal{E} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathcal{E}$.

$\mathcal{E}$ heißt auch σ–Algebra über Ω.

Ereignisfeld (7)

Grundlegende Eigenschaften

- Elementarereignisse schließen sich gegenseitig aus.
- Es tritt immer nur genau ein Elementarereignis ein.
- Ein Ereignis tritt genau dann ein, wenn eines seiner Elementarereignisse eintritt.

Folgerung

1. Ist $A_i \in \mathcal{E} \quad \forall i \in \mathbf{N}$, so folgt: $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E}$.
2. Für das unmögliche Ereignis gilt: $\emptyset \in \mathcal{E}$.

Ereignisfeld (8)

Beweis der Folgerung

1.

$$\begin{aligned}
A_i \in \mathcal{E}, \ \ \forall i \in \mathbf{N} \quad &\Longrightarrow \quad \overline{A_i} \in \mathcal{E}, \ \ \forall i \in \mathbf{N} \ \ \text{(Def. 5.3)} \\
&\Longrightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} \in \mathcal{E} \ \ \text{(Def. 5.2)} \\
&\Longrightarrow \quad \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \in \mathcal{E} \ \ \text{(de Morgan)} \\
&\Longrightarrow \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E} \ \ \text{(Def. 5.3)}
\end{aligned}$$

2. Nach Def. 5.1 gilt: $\Omega \in \mathcal{E}$. Wegen $\emptyset = \overline{\Omega}$ und Def. 5.3 folgt dann: $\emptyset \in \mathcal{E}$.

Ereignisfeld (9)

Def. 6 Zwei Ereignisse $A_1, A_2 \in \mathcal{E}$ **heißen**
unvereinbar (disjunkt), falls $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ gilt. Wir sagen dann auch, diese beiden Ereignisse schließen einander aus.

1.4 Kolmogorov'sches Axiomensystem

Def. 7 (Wahrscheinlichkeit) Sei $\mathcal{E}$ ein Ereignisfeld.
Eine Abbildung $P\colon \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt Wahrscheinlichkeit, falls sie die folgenden Eigenschaften hat:

1. Für alle $A \in \mathcal{E}$ gilt: $0 \leq P(A) \leq 1$;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. Sind die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ paarweise unvereinbar (d.h. $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j, i, j \in \mathbb{N}$), so gilt die sogenannte σ–Additivitätseigenschaft:
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Kolmogorov'sches Axiomensystem (2)

Def. 8 (Wahrscheinlichkeitsraum)
Sei Ω die Menge der Elementarereignisse, $\mathcal{E}$ ein Ereignisfeld über Ω ($\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$) und P genüge den Kolmogorov–Axiomen, dann heißt das Tripel $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ Wahrscheinlichkeitsraum.

Mittels dieses Begriffes ist eine vollständige Beschreibung eines zufälligen Experimentes möglich.

Kolmogorov'sches Axiomensystem (3)
Wir betrachten nun $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, ein System von Teilmengen der Menge Ω. Dann können wir die folgende Menge bilden:
$$\mathcal{E}(\mathcal{A}) = \left\{\mathcal{E}\colon \mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}, \mathcal{E} \text{ ist Ereignisfeld}\right\}.$$

Dann ist die Menge
$$\mathcal{E}_{\mathcal{A}} = \bigcap_{\mathcal{E} \in \mathcal{E}(\mathcal{A})} \mathcal{E}$$
die von $\mathcal{A}$ erzeugte σ–Algebra (Ereignisfeld) bzw. die kleinste σ–Algebra über Ω, die $\mathcal{A}$ enthält.

Kolmogorov'sches Axiomensystem (4)
Beispiele für Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega, \mathcal{E}, P)$

Def. 9 (klassische Definition der Wahrscheinlichkeit)
$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$, $\quad \mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$. $P(\omega) = P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{N} \quad \forall i = 1, \ldots, N$. D.h. alle Elementarereignisse sind gleichwahrscheinlich.
Sei $A \in \mathcal{E}$.
$$P(A) = \frac{\#\{\omega, \omega \in A\}}{N} = \frac{\#\text{für } A \text{ günstigen El. ereign.}}{\#\text{möglichen El.ereignisse}}$$
ist die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit.

Kolmogorov'sches Axiomensystem (5)

Def. 10 (Borel-Mengen)
Es sei $\Omega = \mathbb{R}$ und
$$\mathcal{A} = \{[a, b[\colon -\infty < a < b < \infty\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega).$$
die Menge der halboffenen Intervalle. Dann ist $\mathcal{B}^1 := \mathcal{E}_{\mathcal{A}}$ die σ-Algebra der Borel–Mengen. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1, P)$ ist dann ein Wahrscheinlichkeitsraum mit irgendeiner Wahrscheinlichkeit P.

Kolmogorov'sches Axiomensystem (6)
Es sei $\Omega = [0,1]$. Weiterhin betrachten wir:

$$\mathcal{E} = \{A \colon A = B \cap [0,1], B \in \mathcal{B}^1\}.$$

die Menge der Borelmengen auf dem Intervall $[0,1]$.

$P \colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ *mit* $P(A) := \int\limits_A dx.$

$$P(\Omega) = \int_0^1 dx \;=\; 1; \quad P\left(\left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}\right]\right) = \tfrac{1}{4}; \quad P\left(\left\{\tfrac{1}{2}\right\}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \;=\; 0$$

Kolmogorov'sches Axiomensystem (7)

$Q \colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ *mit* $Q(A) := \int\limits_A \frac{3}{2}(1-x^2)dx$

$$Q(\Omega) = \int_0^1 \frac{3}{2}(1-x^2)dx = \frac{3}{2}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 1$$

$(\Omega, \mathcal{E}, P)$ und $(\Omega, \mathcal{E}, Q)$ sind Wahrscheinlichkeitsräume.

1.5 Folgerungen aus dem Kolmogorov-Axiomensystem

Folgerung:
Sei $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ W.-raum und A, B Ereignisse.

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
2. $P(\emptyset) = 0$.
3. Sei $A \subseteq B$. Dann gilt:
   (a) $B \setminus A \in \mathcal{E}$;
   (b) $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ (Subtraktivität);
   (c) $P(A) \leq P(B)$ (Monotonie der Wahrscheinlichkeit).
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$. Sind A und B unvereinbar, so gilt die Gleichheit.

Folgerungen (2)
Es sei $\{A_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge von Ereignissen.

5. Es sei $A_n \subseteq A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:
$$P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$
„Stetigkeit (des Wahrscheinlichkeitsmaßes) von unten"
6. Es sei $A_n \supseteq A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:
$$P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$
„Stetigkeit (des Wahrscheinlichkeitsmaßes) von oben"

Beweis Folgerungen 1 und 2

1. Es gilt: $\Omega = A \cup (\Omega \setminus A) = A \cup \overline{A}$, für alle $A \in \mathcal{E}$.

   Wegen $A \cap \overline{A} = \emptyset$ folgt:

$$\begin{aligned} 1 &= P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) \\ &= P(A) + P(\overline{A}) \end{aligned}$$

   Wir stellen um und erhalten: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

2. Wegen $\emptyset = \Omega \setminus \Omega = \overline{\Omega}$ folgt aus Aussage 1:

$$P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 0.$$

Beweis Folgerungen 3

3. Es seien $A, B \in \mathcal{E}$ zwei Ereignisse mit $A \subseteq B$.

   (a) Es gilt:

$$B \setminus A = B \cap \overline{A}.$$

   Wegen $B \in \mathcal{E}$ und $\overline{A} \in \mathcal{E}$ folgt nach Def. 5.(2.), dass auch die Menge $B \setminus A \in \mathcal{E}$ ist.

   (b) Aus $B = A \cup (B \setminus A)$ und $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ folgt:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cup (B \setminus A)) \\ &= P(A) + P(B \setminus A) \end{aligned}$$

   Wir stellen um und erhalten:

$$P(B) - P(A) = P(B \setminus A).$$

Beweis Folgerungen 3.-4.

3. Folgerung 3.3

   (a) Wenn wir die Subtraktivitätsgleichung etwas umstellen, erhalten wir:

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A).$$

   Wegen Definition 7.(1.) folgt daraus sofort:

$$P(A) \leq P(B).$$

4. Es gilt $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ und da die Ereignisse A und $B \setminus A$ unvereinbar sind folgt die erste Behauptung aus Axiom 3 und der Subtraktivität. Die zweite Behauptung folgt aus $P(B \setminus A) \geq 0$.

Beweis Folgerung 5 (1)

5. Es sei nun $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge von Ereignissen mit $A_n \subseteq A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Damit gilt:

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Wir definieren die Ereignisse

$$B_1 := A_1, \quad B_2 := A_2 \setminus A_1, \quad \ldots \quad B_n := A_n \setminus A_{n-1} \quad \ldots$$

Offenbar gilt für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$:

$$B_i \cap B_j = \emptyset \qquad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k.$$

Beweis Folgerung 5 (2)

$$
\begin{aligned}
P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P(B_k) \quad \text{(Definition 7.(3.))} \\
&= P(A_1) + \sum_{k=2}^{\infty} P(A_k \setminus A_{k-1}) \\
&= P(A_1) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} P(A_k \setminus A_{k-1}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(P(A_1) + \sum_{k=2}^{n} (P(A_k) - P(A_{k-1})) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(A_n).
\end{aligned}
$$

Beweis Folgerung 6 (1)

6. Es sei nun $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge von Ereignissen mit der Eigenschaft $A_n \supseteq A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Unter Anwendung der de Morgan'schen Regeln erhalten wir:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{A_k}}.$$

Außerdem gilt: $\overline{A_k} \subseteq \overline{A_{k+1}}$. Dann

Beweis Folgerung 6 (2)

$$
\begin{aligned}
P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) &= P\left(\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{A_k}}\right) \\
&= 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{A_k}\right) \quad \text{(Aussage 1)} \\
&= 1 - P\left(\lim_{n\to\infty} \overline{A_n}\right) \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} P(\overline{A_n}) \quad \text{(Aussage 5)} \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} (1 - P(A_n)) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(A_n).
\end{aligned}
$$

Subadditivität von P

Satz: Seien $A_1, A_2, \ldots$ Ereignisse. Dann gilt:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} B_1 &:= A_1 \\ B_2 &:= A_2 \setminus A_1 \\ B_3 &:= A_3 \setminus (A_1 \cup A_2) \\ & ... \\ B_i &:= A_i \setminus (\bigcup_{j<i} A_j) \ ... \end{aligned}$$

B_i paarw. disjunkt, $B_i \subseteq A_i$.

$$\begin{aligned} \bigcup_{i\geq 1} B_i &= \bigcup_{i\geq 1} A_i \Rightarrow \\ P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) &= P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \quad \text{(3.Ax.)} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad \text{(Mon.)} \end{aligned}$$

Folgerungen (8)
Siebformel, Prinzip von Inklusion und Exklusion
Seien $A_1, \ldots, A_n$ Ereignisse. Dann gilt:

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) &= \sum_{I\subseteq\{1,\ldots,n\}, I\neq\emptyset} (-1)^{|I|-1} P(\bigcap_{i\in I} A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + -... \\ & (-1)^{n+1} \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_n} P(\bigcap_{\nu=1}^{n} A_{i_\nu}) \end{aligned}$$

auch: Formel von Poincare-Sylvester (Montmort: Briefwechsel mit Bernoulli)

Siebformel

1. IA $n = 1$ trivial, ($n = 2$: Subtraktivität)

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \\ &= \sum_{i=1}^{2} P(A_i) - \sum_{I=\{1,2\}} P(A_i \cap A_j) \\ &= \sum_{I\subseteq\{1,\ldots,n\}, I\neq\emptyset} (-1)^{|I|-1} P(\bigcap_{i\in I} A_i) \end{aligned}$$

2. IS: Aussage der Folgerung gelte für n. Dann

$$P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) + P(A_{n+1}) - P(\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1}))$$

   wegen Subtraktivität.

Siebformel

Beweis (2)

Auf den ersten und dritten Summanden wird jeweils die IV angewendet. Der dritte Summand ist gleich

$$\begin{aligned} -P(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cap A_{n+1})) &= -\sum_{J\subseteq\{1,\ldots,n\},J\neq\emptyset} (-1)^{|J|-1} P(\bigcap_{i\in J}(A_i \cap A_{n+1})) \\ &= \sum_{\{n+1\}\subseteq J\subseteq\{1,\ldots,n+1\},J\neq\{n+1\}} (-1)^{|J|-1} P(\bigcap_{i\in J} A_i). \end{aligned}$$

Siebformel

Beweis (3)

Untersuchung der Indexmengen:

1. Summe: alle nichtleeren Teilmengen von $\{1,\ldots,n\}$

3. Summe: alle nicht-1-Element. Teilmengen von $\{1,\ldots,n+1\}$, die das Element $n+1$ enthalten

2. Summe: das Element $n+1$.

Damit tauchen alle nichtleeren Teilmengen von $\{1,\ldots,n+1\}$ in einer der Summanden auf. Alle Summanden haben die gleiche Form, wie in der Siebformel.

Beispiele zur Siebformel (1)

Rencontre-Problem

n Studenten sollen schriftlich von einer Änderung des Vorlesungstermins benachrichtigt werden. Im irrtümlichen Glauben, daß jeder der n Briefe den gleichen Inhalt aufweist, verteilt eine Sekretärin die Briefe willkürlich in die verschiedenen Umschläge.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens ein Brief in den richtigen Umschlag gelangt? Welchen Wert erhält man für $n \to \infty$?

Lösung: Übung.

Beispiele zur Siebformel (2)

Sortierprobleme

geg.: Feld der Länge n Daten zufällig angeordnet, gleichverteilt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n!}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens ein Feldelement schon an der richtigen Stelle liegt.? Welchen Wert erhält man für $n \to \infty$?

das ist dasselbe wie beim Rencontre-Problem.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß genau k Elemente bereits am richtigen Platz stehen? $\to$ Übung

Folgerungen aus der Siebformel

Bonferroni-Ungleichungen (1)

Die Ungleichung

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

heißt Bonferroni-Ungleichung. Weitere (Bonferroni)- Ungleichungen erhält man durch Abbruch der Siebformel nach Gliedern mit positivem ($\leq$) bzw. negativem ($\geq$) Vorzeichen.

Folgerungen aus der Siebformel

Bonferroni-Ungleichungen (2)

$$\begin{aligned}
P(A\cup B\cup C) &\leq P(A)+P(B)+P(C) \qquad (n=1)\\
P(A\cup B\cup C) &\geq P(A)+P(B)+P(C) \qquad (n=2)\\
&\quad -P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)\\
P(A\cup B\cup C) &\leq P(A)+P(B)+P(C)\\
&\quad -P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)\\
&\quad +P(A\cap B\cap C)
\end{aligned}$$

(n=3, es gilt hier sogar Gleichheit)

1.6 Die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit

Wir betrachten für ein zufälliges Experiment die Menge der Elementarereignisse $\Omega=\{\omega_1,\dots,\omega_N\}$. Sei $\mathcal{E}=\mathcal{P}(\Omega)$ und $P(\{\omega_i\})=\frac{1}{N}, \forall i=1,\dots,N)$.

$$\begin{aligned}
P(A) &= \frac{\#\{\omega\colon \omega\in A\}}{N} = \tfrac{n(A)}{N}\\
&= \frac{\#\text{ der für } A \text{ günstigen Elementarereignisse}}{\#\text{ der möglichen Elementarereignisse}}
\end{aligned}$$

De Méré **(1)**

Würfeln mit 3 Würfeln
Folgende Ereignisse werden betrachtet:

A = Es fallen 11 Augen. B = Es fallen 12 Augen.

Frage: $P(A), P(B)$?

Die Menge der Elementarereignisse ist

$$\Omega=\{(i,j,k)\colon 1\leq i,j,k\leq 6\}.$$

Anzahl der Elementarereignisse $N:=6^3=216,\quad P((i,j,k))=\frac{1}{216}$.

De Méré **(2)**
Anzahl der Ereignisse

A (11 Augen)		**B** (12 Augen)	
6-4-1	6	6-5-1	6
6-3-2	6	6-4-2	6
5-5-1	3	6-3-3	3
5-4-2	6	5-5-2	3
5-3-3	3	5-4-3	6
4-4-3	3	4-4-4	1
	n(A)=27		n(B)=25

$$P(A)=\frac{27}{216}>\frac{25}{216}=P(B).$$

2 Kombinatorik

2.1 Klassische kombinatorische Probleme

Aufgabenstellung

Anzahl der verschiedenen Zusammenstellungen von Objekten. Je nach Art der zusätzlichen Forderungen, ist zu unterscheiden, welche Zusammenstellungen als gleich, und welche als verschieden angesehen werden.

- Permutation (ohne Wiederholung)
- Permutation mit Wiederholung
- Variation ohne Wiederholung
- Variation mit Wiederholung
- Kombination (ohne Wiederholung)
- Kombination mit Wiederholung

Klassische kombinatorische Probleme (1)

Permutation (ohne Wiederholung)

Jede eineindeutige Abbildung π der geordenten Menge $\{1, \ldots, n\}$ auf eine n-elementige Menge $M = \{s_1, \ldots, s_n\}$ heißt Permutation oder Permutation ohne Wiederholung,

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} : \pi(i) = s_i, s_i \in M, s_i \neq s_j (i \neq j)$$

Anzahl: $\boxed{N = n!}$

Wiewiel Möglichkeiten gibt es, die Eisenbahnwagen 32,33,34,35,36,37 hintereinander zu hängen?

$$N = 6!$$

Klassische kombinatorische Probleme (2)

Permutation mit Wiederholung

Sei $M = \{s_1, \ldots, s_k\}$, $k_i > 0 \ \forall i = 1, \ldots, k$ mit $\sum_{i=1}^{k} k_i = n$. Jedes geordnete n-Tupel von Elementen aus M, wobei jedes Element s_i genau k_i mal vorkommt, heißt Permutation mit Wiederholung.

Anzahl: $\boxed{N = \frac{n!}{k_1! \cdots k_k!}}$

Wieviele Möglichkeiten gibt es, die Karten beim Skatspiel zu vergeben?

$$N = \frac{32!}{10!10!10!2!}$$

Klassische kombinatorische Probleme (3)

Variation ohne Wiederholung

Sei $M = \{s_1, \ldots, s_n\}$. Jedes geordnete k-Tupel, $k \leq n$ von verschiedenen Elementen aus M heißt Variation ohne Wiederholung.

Anzahl: $\boxed{N = n(n-1) \cdots (n-k+1)}$

Aufteilung von k Elementen auf n Fächer.

Wieviele Möglichkeiten für die drei Erstplazierten im 100m Endlauf gibt es?

$$N = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336.$$

Klassische kombinatorische Probleme (4)

Variation mit Wiederholung

Auswahl von k Elementen aus einer Menge $M = \{s_1, \ldots, s_n\}$ mit Zurücklegen. Die Frage ist: Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es, k Elemente aus dieser Menge zu entnehmen, wobei Elemente mehrfach entnommen werden können?

$$\boxed{N = n^k.}$$

Anzahl der 10stelligen Dualzahlen:

$$N = 2^{10}.$$

Klassische kombinatorische Probleme (5)

Kombinationen (ohne Wiederholung)

Jede k-elementige Teilmenge aus einer n-elementigen Menge M heißt Kombination (ohne Wiederholung) (von k aus n Elementen). Dabei sind Wiederholungen nicht erlaubt und die Reihenfolge der k Elemente wird nicht berücksichtigt.

$$\boxed{N = \tfrac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \tbinom{n}{k} = \tfrac{n!}{(n-k)!k!}.}$$

Anzahl der 5er im Lotto: ÜA

Klassische kombinatorische Probleme (6)

Kombination (mit Wiederholung)

Fasst man alle Variationen mit Wiederholung (n Elemente, Ordnung k) zu Äquivalenzklassen zusammen, so daß sie aus aus den gleichen Elementen der gleichen Anzahl bestehen, so heißt jede solche Klasse Kombination mit Wiederholung.

$$\boxed{N = \tbinom{n+k-1}{k}}$$

$n = 2, k = 3$*: 4 Klassen:*
$\{aaa\}, \{aab, aba, baa\}, \{abb, bab, bba\}, \{bbb\}$ werden jeweils zu einer Klasse zusammengefaßt.

Klassische kombinatorische Probleme (6a)

Erläuterung zur Kombination mit Wiederholung: siehe Beispiele 4, 5 und 6. (Dieses Problem wird auf den Fall unterscheidbarer Würfel zurückgeführt.)

Klassische kombinatorische Probleme (7)

Kombination von Elementen aus mehreren Mengen

Wir betrachten beliebige Mengen $S_1, \ldots, S_k$, wobei $S_i = \{s_{i1}, \ldots, s_{in_i}\}$ $(i = 1, \ldots, k)$ gilt.
Wieviel verschiedene Kombinationen von je einem Element der Mengen $S_1, \ldots, S_k$ können gebildet werden? Solche Kombinationen haben die Form $(s_{1i_1}, \ldots, s_{ki_k})$, wobei $s_{ki_k} \in S_k$ gilt für alle $i = 1, \ldots, k$.

Anzahl: $\boxed{N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k.}$

2.2 Beispiele

Beispiele (1)

Eine Gruppe von r Studenten verreist in einem Zug
Die Studenten verteilen sich zufällig auf $n \geq r$ Abteile. Es sei A das Ereignis, daß alle Studenten in verschiedenen Abteilen sitzen.

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{n(A)}{N}. \\ N &= n^r = \#\text{Möglichkeiten für die Verteilung der} \\ & r \text{ Studenten auf die } n \text{ Abteile} \\ n(A) &= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) \\ P(A) &= \frac{n(A)}{N} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)}{n^r}. \end{aligned}$$

Beispiele (2)

Ziehen von Kugeln
In einer Urne sollen sich n Kugeln befinden. Von diesen seien n_1 schwarz, $n - n_1$ dagegen weiß. Nun werden k Kugeln (zufällig) entnommen, und zwar ohne Zurücklegen.
A: "von diesen k Kugeln genau k_1 schwarz"

$$P(A) = \tfrac{n(A)}{N}.$$

$N = \binom{n}{k}$ =# Möglichkeiten, k Kugeln aus n Kugeln auszuwählen.

Beispiele (2a)

Ziehen von Kugeln (Fortsetzung)
$n(A)$= Anzahl der Möglichkeiten zur Entnahme von k Kugeln, bei denen genau k_1 schwarze Kugeln ausgewählt werden. In einem solchen Fall sind dann auch genau $k - k_1$ weiße Kugeln entnommen worden. Also

1. Die Anzahl der Möglichkeiten, aus n_1 schwarzen Kugeln k_1 schwarze auszuwählen (ohne Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge) ist $\binom{n_1}{k_1}$.

Beispiele (2b)

Ziehen von Kugeln (Fortsetzung)

1. Die Anzahl der Möglichkeiten, aus $n - n_1$ weißen Kugeln $k - k_1$ weiße auszuwählen (ebenfalls ohne Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge) ist $\binom{n-n_1}{k-k_1}$.

$$\begin{aligned} \#\text{günstige Ereignisse} &= n(A) = \binom{n_1}{k_1} \cdot \binom{n-n_1}{k-k_1} \\ P(A) &= \frac{n(A)}{N} = \frac{\binom{n_1}{k_1} \cdot \binom{n-n_1}{k-k_1}}{\binom{n}{k}} \end{aligned}$$

Hypergeometrische Wahrscheinlichkeit.

Beispiele (3)

Lotto 6 aus 49
Wenn wir uns die Zahlen als Kugeln denken, die aus einer Urne entnommen werden, und außerdem gezogene Zahlen im nachhinein als schwarze Kugeln ansehen, so kann jeder Tip durch die Entnahme von 6 Kugeln verkörpert werden.
A: Ereignis , daß vier Richtige getippt werden.

$n = 49, \quad n_1 = 6, \quad k = 6, \quad k_1 = 4,$

$$P(A) = \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{49-6}{6-4}}{\binom{49}{6}}$$

Beispiele (4)

Zwei nicht unterscheidbare Würfel
Wie groß ist die Anzahl der Würfe mit 2 nicht zu unterscheidenden Würfeln?
Seien i, j die Augenzahlen und o.B.d.A. $i \leq j$.

Wir vergeben die Tupel (i, j), wenn $i \neq j$.

Wir vergeben die Tupel $(i, 7)$, wenn $i = j$.
Die gesuchte Anzahl ist die Anzahl der möglichen Auswahlen aus der Menge $\{1, \ldots, 7\}$, d.h. $\binom{7}{2}$.

Beispiele (5)

Wie groß ist die Anzahl der Würfe mit **3**
nicht zu unterscheidenden Würfeln?
Seien i, j, k die Augenzahlen und o.B.d.A. $i \leq j \leq k$. Wir vergeben die Tripel
(i, j, k), wenn $i < j < k$. $(i, k, 7)$, wenn $i = j < k$. $(i, j, 8)$, wenn $i < j = k$. $(i, 7, 8)$, wenn $i = j = k$.
Die gesuchte Anzahl ist die Anzahl der möglichen Auswahlen aus der Menge $\{1, \ldots, 8\}$, d.h. $\binom{8}{3}$.

Beispiele (6)

Verteilen von n Geldstücken an k Studenten ($k \leq n$)
Auf wieviele Weisen ist das möglich?

- a) jeder Student bekommt mindestens ein Stück. Geldstücke nebeneinander legen und $k-1$ Trennstriche verteilen unter $n-1$ möglichen $N = \binom{n-1}{k-1}$

Beispiele (6a)

Verteilen von n Geldstücken

- b) es wird zugelassen, dass Studenten nichts erhalten. Trick: Borgen von k Stücken $\longrightarrow$ $n + k$ Stück $k - 1$ Trennstriche verteilen unter den jetzt $n + k - 1$ möglichen $N = \binom{n+k-1}{k-1}$ Dann gibt jeder Student genau ein Stück zurück.

Beispiele (6b)

ein weiterer Zugang:

Verteilen von n Geldstücken an k Studenten

Wir basteln einen Würfel mit k Flächen und würfeln n mal. Beim i-ten Wurf bekommt der Student das Geldstück, dessen Nummer gewürfelt wurde. Die gesuchte Anzahl ist dieselbe wie bei Würfen mit n nicht unterscheidbaren Würfeln.

$N = \binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$

Beispiele (7)

Hashing

Beobachtungen (oder Daten) abspeichern auf einem Feld. k: Anzahl der Beobachtungen n: Feldlänge ($k \leq n$) Das Abspeichern geschieht mit Hilfe von Hashfunktionen (oder Hashtafeln). zufällige Daten: Kollisionen können auftreten.

$A_{k,n}$: Ereignis, daß Kollisionen auftreten. ges.: $P(A_{k,n})$

Beispiele (7a)

Hashing (Fortsetzung)

$$\begin{aligned} P(\overline{A}_{k,n}) &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = \prod_{i=0}^{k-1}(1-\frac{i}{n}) \\ &= \exp(\sum_{i=0}^{k-1}\ln(1-\frac{i}{n})) \\ &\leq \exp(-\sum_{i=0}^{k-1}\frac{i}{n}) \\ &= \exp(-\frac{(k-1)k}{2n}) \approx \exp(-\frac{k^2}{2n}) \end{aligned}$$

$\ln(1-x) < -x$ für $x < 1$

Beispiele (8)

Suche von Elementen. Sei $n = |\Omega|$

Greifen zufällig eine k-elementige Teilmenge $A \subseteq \Omega$ heraus. $\omega_1, ...$: Schlüsselelemente (vorgegeben), $\omega_1, ... \in \Omega$

Frage: Mit welcher Wkt. $\omega_1 \in A$?

$$P(A) = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{k}{n}$$

Frage: Mit welcher Wkt. $\omega_1, \ldots, \omega_r \in A$?

$$P(A) = \frac{\binom{n-r}{k-r}}{\binom{n}{k}} = \frac{k(k-1)\cdots(k-r+1)}{n(n-1)\cdots(n-r+1)}$$

Beispiele (8a)

Suche von Elementen (Fortsetzung)

Sei die Anzahl r der Schlüsselelemente fest, $\frac{k}{n} \to p$: $P(A) \sim p^r$

$$P(A) \overset{\approx}{\geq} \frac{1}{2}, \quad \text{falls} \quad p^r \geq \frac{1}{2} \quad \text{falls} \quad k \geq \frac{n}{2^{1/r}}$$

Soll also die Wahrscheinlichkeit, daß alle r Schlüsselelemente in der Teilmenge enthalten sind, größer als $\frac{1}{2}$ sein, so muss

$$k \geq \frac{n}{2^{1/r}}$$

gewählt werden.

Kombinatorik

Zusammenfassung

n: # Elemente = $|\Omega|$ k: # auszuwählende Elemente $k_1, \ldots, k_m$: Häufigkeit der einzelnen Elemente

	ohne Wiederholung	mit Wiederholung
Permutationen	$n!$	$\frac{n!}{k_1! \cdots k_m!}$
Variationen	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	n^k
Kombinationen	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$

2.3 Arithmetische Beziehungen zwischen den Binomialkoeffizienten

Arithmetische Beziehungen zwischen den Binomialkoeffizienten (1)

- 1.
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
- 2.
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$
- 3.
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$
- 4.
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

Arithmetische Beziehungen zwischen den Binomialkoeffizienten (2)

- 5.
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$
- 6.
$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$$
- 7.
$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

Arithmetische Beziehungen zwischen den Binomialkoeffizienten (3)

- 8. Definieren die Folge
$$S_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k}$$
Zeigen Sie: $S_{n+1} = S_n + S_{n-1}$.

Beweis: 3 Methoden, vollständige Induktion algebraisch kombinatorisch $\square$
teilweise Übungsaufgabe, teilweise Übung

2.4 Die Stirling Formel

Satz: Es gilt

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Beweis: Die Aussage des Satzes ist äquivalent zu

$$\ln n! \sim \ln\sqrt{2\pi} + (n+\frac{1}{2})\ln n - n.$$

Sei

$$d_n := \ln n! - (n+\frac{1}{2})\ln n + n.$$

Es genügt zu zeigen,

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \ln\sqrt{2\pi}.$$

Beweis der Stirling-Formel (2)

Wir schätzen die Differenz $d_n - d_{n+1}$ ab, dann das Verhalten der Folge $\{d_n\}$ und versuchen den Grenzwert zu bestimmen. Die Differenz $d_n - d_{n+1}$ ist

$$\begin{aligned}
&= \ln n! - \ln(n+1)! \\
&\quad -(n+\frac{1}{2})\ln n + (n+1+\frac{1}{2})\ln(n+1) + n - (n+1) \\
&= \ln\tfrac{n!}{(n+1)!} + (n+\tfrac{1}{2})(\ln(n+1) - \ln n) + \ln(n+1) - 1 \\
&= -\ln(n+1) + (n+\frac{1}{2})\ln\frac{n+1}{n} + \ln(n+1) - 1 \\
&= \frac{2n+1}{2}\ln\frac{n+1}{n} - 1 \\
&= (2n+1)\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}} - 1.
\end{aligned}$$

Beweis der Stirling-Formel (3)

Es gilt für $-1 < x < 1$:

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\frac{x^i}{i} \\
\ln(1-x) &= \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\frac{(-x)^i}{i} \\
\ln\frac{1+x}{1-x} &= \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^{2i+1}}{2i+1}
\end{aligned}$$

Beweis der Stirling-Formel (4)

Setzen $x := \frac{1}{2n+1}$ und erhalten ($x \neq 0$)

$$\begin{aligned} d_n - d_{n+1} &= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\Big(x + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2i+1} x^{2i+1}\Big) - 1 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2i+1} \frac{1}{(2n+1)^{2i}} \\ &< \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^{2i}} \\ &= \frac{1}{3}\big(\frac{1}{1-q} - 1\big) \quad \text{wobei} \quad q = \frac{1}{(2n+1)^2} \\ &= \frac{1}{3((2n+1)^2 - 1)} \end{aligned}$$

Beweis der Stirling-Formel (5)

Offenbar gilt auch

$$\frac{1}{3(2n+1)^2} = \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{2i+1} \cdot \frac{1}{(2n+1)^{2i}} < d_n - d_{n+1},$$

also

$$\frac{1}{3(2n+1)^2} < d_n - d_{n+1} < \frac{1}{3((2n+1)^2 - 1)}.$$

Beweis der Stirling-Formel (6)

Abschätzung der Schranken

$$\begin{aligned} \frac{1}{3((2n+1)^2-1)} &= \frac{1}{12n(n+1)} = \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)} \\ \frac{1}{3(2n+1)^2} &= \frac{1}{12n(n+1)+3} = \frac{12}{12(12n(n+1)+3)} \\ &= \frac{12}{12 \cdot 12n(n+1) + 36} \\ &> \frac{12}{12 \cdot 12n^2 + 12 \cdot 12n + 24n + 13} \\ &= \frac{12}{12 \cdot 12n^2 + 12 \cdot 14n + 13} \\ &= \frac{12}{(12n+1)(12n+13)} \\ &= \frac{1}{12n+1} - \frac{1}{12(n+1)+1} \end{aligned}$$

Beweis der Stirling-Formel (7)

Beide Ungleichungen zusammen

$$\frac{1}{12n+1} - \frac{1}{12(n+1)+1} < d_n - d_{n+1} < \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}$$

$$(d_n - \frac{1}{12n}) - (d_{n+1} - \frac{1}{12(n+1)}) < 0 < (d_n - \frac{1}{12n+1}) - (d_{n+1} - \frac{1}{12(n+1)+1})$$

Folge $\{d_n - \frac{1}{12n+1}\}$ ist monoton fallend Folge $\{d_n - \frac{1}{12n}\}$ ist monoton wachsend.

Beweis der Stirling-Formel (8)

Beide Folgen haben denselben Grenzwert $c := \lim d_n$,

$$\begin{array}{rcl} d_n - \dfrac{1}{12n} & < c < & d_n - \dfrac{1}{12n+1} \\ c + \dfrac{1}{12n+1} & < d_n < & c + \dfrac{1}{12n} \end{array}$$

Erinnerung:

$$\begin{aligned} d_n &= \ln n! - (n + \frac{1}{2}) \ln n + n \\ \Rightarrow e^{d_n} &= n! \big(\frac{n}{e}\big)^{-n} n^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Beweis der Stirling-Formel (9)

$$\begin{array}{rcl} e^{c + \frac{1}{12n+1}} & < e^{d_n} < & e^{c+\frac{1}{12n}} \\ e^c e^{\frac{1}{12n+1}} & < n! \big(\frac{n}{e}\big)^{-n} n^{-\frac{1}{2}} < & e^c e^{\frac{1}{12n}} \\ e^c \sqrt{n} \big(\dfrac{n}{e}\big)^n e^{\frac{1}{12n+1}} & < n! < & e^c \sqrt{n} \big(\dfrac{n}{e}\big)^n e^{\frac{1}{12n}} \end{array}$$

Bleibt zu zeigen

$$e^c = \sqrt{2\pi}.$$

Beweis der Stirling-Formel (10)

Hilfsrechnungen

$$\begin{aligned} I_n &:= \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx \\ I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \cdot \sin x \, dx \\ &= \sin^{n-1} x \cdot (-\cos x)\big|_0^{\pi/2} - \\ & \quad \int_0^{\pi/2} (n-1) \sin^{n-2} x \cos x \cdot (-\cos x) \, dx \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n) \\ I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2} \end{aligned}$$

Beweis der Stirling-Formel (11)

Hilfsrechnungen (Fortsetzung, 1)

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{\pi}{2} & I_1 &= 1 \\ I_2 &= \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} & I_3 &= \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \frac{\pi}{2} \\ I_{2n+1} &= \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} \end{aligned}$$

Beweis der Stirling-Formel (12)

Hilfsrechnungen (Fortsetzung, 2)

$$
\begin{array}{rc}
 & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\
\Rightarrow & 0 < \sin x < 1 \\
\Rightarrow & \sin^{2n-1} x > \sin^{2n} x > \sin^{2n+1} x \\
\Rightarrow & I_{2n-1} > I_{2n} > I_{2n+1} \\
\Rightarrow & \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} > \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} > 1 \\
\Rightarrow & \frac{2n+1}{2n} > \frac{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)\cdot(2n+1)}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n)} \cdot \frac{\pi}{2} > 1 \\
\Rightarrow & \lim \frac{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)\cdot(2n+1)}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdots(2n)\cdot(2n)} \cdot \frac{\pi}{2} = 1 \\
\Rightarrow & \frac{\pi}{2} = \lim\left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1} \\
 & = \lim \frac{2^{4n}(n!)^4}{((2n)!)^2(2n+1)}
\end{array}
$$

Beweis der Stirling-Formel (13)

$$
\begin{aligned}
n! &= e^c\sqrt{n}n^n e^{-n} e^{\alpha_n} \\
(2n)! &= e^c\sqrt{2n}2^{2n}n^{2n}e^{-2n}e^{\beta_n}
\end{aligned}
$$

wobei $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \lim_{n\to\infty}\beta_n = 0$.

Einsetzen oben liefert

$$e^c = \sqrt{2\pi}.$$

3 Bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit

3.1 Einführung

3-maliges Werfen einer Münze

Menge der Elementarereignisse: $\Omega = \{zzz, zzw, zwz, wzz, zww, wzw, wwz, www\}$. $|\Omega| = 2^3 = 8 = N$ Wir definieren zwei Ereignisse:

A: Das Wappen fällt genau einmal, d.h.

$$A = \{zzw, zwz, wzz\}. \qquad P(A) = \frac{n(A)}{N} = \frac{3}{8}.$$

B: # Wappenwürfe ungerade,d.h.: $B = \{zzw, zwz, wzz, www\}$. $\quad P(B) = \dfrac{n(B)}{N} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$.

Offenbar $A \subset B$.

3-maliges Werfen einer Münze (Fortsetzung)

Angenommen, Ereignis B sei bereits eingetreten.

Wahrscheinlichkeit, daß unter dieser Bedingung das Ereignis A eintritt?

Bei diesem Experiment ist die Menge der Elementarereignisse die Menge B. Damit gilt $N = 4$. Folglich erhalten wir:

$$P(A, \text{falls } B \text{ bereits eingetreten ist}) = P(A/B) = \frac{3}{4}.$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Einführung (2)

Def. 11 (Bedingte Wahrscheinlichkeit)

Es seien $A, B \in \mathcal{E}$ zwei zufällige Ereignisse und es gelte $P(B) > 0$. Dann wird

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

als bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B bezeichnet.

Bem.: Oft wird auch die folgende Bezeichnung verwendet: $P_B(A) := P(A/B)$.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Einführung (3)

Bem.: Wir unterscheiden folgende Fälle:

1. $A \supseteq B$: Dann gilt:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

2. $A \subseteq B$: Dann gilt:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$$

3. $A \cap B \neq \emptyset$ (teilweise Überschneidung): Dann gilt:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Unabhängigkeit
Definition

Def. 12 (Unabhängigkeit)
Zwei Ereignisse $A, B \in \mathcal{E}$ heißen unabhängig, wenn gilt:

$$P(A/B) = P(A).$$

Bem.: Für zwei unabhängige Ereignisse gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Unabhängigkeit
Beispiel

Skatspiel mit 32 Karten
Daraus wird eine Karte gezogen. ($N = |\Omega| = 32$). Wir betrachten die zufälligen Ereignisse:

A: Ziehen eines Königs.

$$P(A) = \frac{n(A)}{N} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}.$$

B: Ziehen einer Herzkarte.

$$P(B) = \frac{n(B)}{N} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}.$$

Sind diese beiden Ereignisse voneinander unabhängig?

Unabhängigkeit
Beispiel (Fortsetzung)

Skatspiel mit 32 Karten, Fortsetzung
Offenbar $P(B) > 0$. Es sei eine Herzkarte gezogen worden (Ereignis B also eingetreten). Wahrscheinlichkeit, daß dann der Herzkönig gezogen wurde:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{8} = P(A).$$

Folglich sind nach Definition die Ereignisse A und B voneinander unabhängig.

P_B ist Wahrscheinlichkeit

Satz:
Es seien $A, B \in \mathcal{E}$ zwei Ereignisse, wobei $P(B) > 0$ gelte. Dann genügt die bedingte Wahrscheinlichkeit P_B den Kolmogorov–Axiomen. D.h. das Tripel $(\Omega, \mathcal{E}, P_B)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Beweis: Wir zeigen stellvertretend Axiom 2. Es gilt:

$$\begin{aligned} P_B(\Omega) &= P(\Omega/B) \\ &= \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \end{aligned}$$

Die anderen beiden Axiome (vgl. Definition 7) sind ebenfalls erfüllt. □

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Satz

Es seien $A, B, C \in \mathcal{E}$ drei Ereignisse. Dann gilt:

$$P_B(A/C) = P(A/B \cap C).$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}
P_B(A/C) &= \frac{P_B(A \cap C)}{P_B(C)} \\
&= \frac{P(A \cap C/B)}{P(C/B)} \\
&= \frac{P(A \cap B \cap C) \cdot P(B)}{P(B) \cdot P(B \cap C)} \\
&= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = P(A/B \cap C)
\end{aligned}$$

□

Unabhängigkeit

Fortsetzung (1)

Lemma

Es seien $A, B \in \mathcal{E}$ zwei unabhängige Ereignisse. Dann sind die Ereignisse A und $\overline{B}$ ebenfalls unabhängig. Gleiches gilt für die Ereignisse $\overline{A}$ und B sowie für $\overline{A}$ und $\overline{B}$.

Beweis: Wir zeigen die Aussage am Beispiel der Ereignisse A und $\overline{B}$. Es gilt:

Unabhängigkeit

Fortsetzung (2)

Beweis des Lemma, Fortsetzung

$$\begin{aligned}
P(A/\overline{B}) &= \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} \\
&= \frac{P(A \setminus (A \cap B))}{1 - P(B)} \quad \text{(Folgerung \textbf{??}.1))} \\
&= \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} \quad \text{(Folgerung \textbf{??}.3b))} \\
&= \frac{P(A) - P(A)P(B)}{1 - P(B)} \\
&= \frac{P(A)(1 - P(B))}{1 - P(B)} = P(A)
\end{aligned}$$

Unabhängigkeit

Fortsetzung (3)

Beweis des Lemma, Fortsetzung

Zusammenfassend gilt

$$\begin{aligned}
P(A/B) = P(A) &\iff P(A/\overline{B}) = P(A) \\
&\iff P(\overline{A}/\overline{B}) = P(\overline{A}) \\
&\iff P(\overline{A}/B) = P(\overline{A})
\end{aligned}$$

3.2 Satz der Totalen Wahrscheinlichkeit

Def. 13 (Vollständigkeit)
Es sei $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Folge von Ereignissen

$$\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \; (A_n \in \mathcal{E}, \forall n \in \mathbb{N})$$

heißt vollständig (oder ausschöpfend), falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$;
2. $A_i \cap A_j = \emptyset$, für alle $i \neq j$.

Satz der Totalen Wahrscheinlichkeit

Satz
Es sei $A_1, A_2, \ldots$ eine vollständige Folge von Ereignissen. Weiterhin sei B ein beliebiges Ereignis und es gelte $P(A_i) \neq 0$ für alle i . Dann gilt:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i)P(A_i).$$

Dieser Ausdruck heißt Formel der totalen Wahrscheinlichkeit.

Satz der Totalen Wahrscheinlichkeit
Es sei $A_1, A_2, \ldots$ eine vollständige Folge von Ereignissen. Weiterhin sei B ein beliebiges Ereignis und es gelte $P(A_i) \neq 0$ für alle i . Dann gilt:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i)P(A_i).$$

Beweis: Aus $B = B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty}(B \cap A_i)$ folgt (da die $(B \cap A_i)$ ebenfalls unvereinbar sind):

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(B \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i)P(A_i)$$

□

Satz der Totalen Wahrscheinlichkeit
Beispiel

Binärkanal
Bei der Übertragung auf einem binären Kanal kommen die Zeichen '0' und '1' im Verhältnis 3:4 vor.
Ein '0' wird mit Wahrscheinlichkeit von 0.2 fehlerhaft übertragen
Ein '1' wird mit Wahrscheinlichkeit von 0.3 fehlerhaft übertragen
gesucht:

- Wahrscheinlichkeit für eine fehlerhafte Übertragung?
- Wahrscheinlichkeit, dass ein '0' empfangen wird?

Ereignisse:

- S_0: '0' wird gesendet, $P(S_0) = \frac{3}{7}$
- S_1: '1' wird gesendet, $P(S_1) = \frac{4}{7}$
- E_0: '0' wird empfangen,
- E_1: '1' wird empfangen

Satz der Totalen Wahrscheinlichkeit
Beispiel

Binärkanal, Fortsetzung

$$P(E_1|S_0) = 0.2, \qquad P(E_0|S_1) = 0.3$$

F: Ereignis, das ein Übertragungsfehler vorliegt

$$\begin{aligned}
P(F) &= P(E_1, S_0) + P(E_0, S_1) \\
&= P(E_1|S_0) \cdot P(S_0) + P(E_0|S_1) \cdot P(S_1) \\
&= \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{7} = \frac{18}{70} \approx 0.2571 \\
P(E_0) &= P(E_0|S_0) \cdot P(S_0) + P(E_0|S_1) \cdot P(S_1) \\
&= \frac{8}{10} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{7} = \frac{18}{35} \approx 0.5143
\end{aligned}$$

3.3 Satz von Bayes

Gegeben: $P(A_i)$ und $P(A/A_i)$, $(i \in \mathbb{N})$.

Gesucht: $P(A_i/A)$.

Unter Benutzung der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit und der Formel für die totale Wahrscheinlichkeit erhalten wir:

Satz von Bayes

$$\begin{aligned}
P(A_i/A) &= \frac{P(A_i \cap A)}{P(A)} \\
&= \frac{P(A_i) \cdot P(A/A_i)}{P(A)}
\end{aligned}$$

Wenden die Formel der totalen Wahrscheinlichkeit an,

Satz von Bayes**, Formel von** Bayes

$$P(A_i/A) = \frac{P(A_i) \cdot P(A/A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{\infty} (P(A/A_j) \cdot P(A_j))}$$

Satz von Bayes
Beispiel

Binärkanal, Fortsetzung

$$\begin{aligned}
P(S_0|E_0) &= \frac{P(E_0|S_0)P(S_0)}{P(E_0|S_0)P(S_0) + P(E_0|S_1)P(S_1)} \\
&= \frac{\frac{8}{10} \cdot \frac{3}{7}}{\frac{8}{10} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{7}} = \frac{24}{24+12} = \frac{2}{3} \\
P(S_1|E_1) &= \frac{P(E_1|S_1)P(S_1)}{P(E_1|S_0)P(S_0) + P(E_1|S_1)P(S_1)} \\
&= \frac{\frac{7}{10} \cdot \frac{4}{7}}{\frac{2}{10} \cdot \frac{3}{7} + \frac{7}{10} \cdot \frac{4}{7}} = \frac{28}{28+6} = \frac{14}{17}
\end{aligned}$$

3.4 Anwendung bedingter Wahrscheinlichkeiten

Expertensystem
Aufbau der Wissensbasis:

$$\begin{aligned} K_i &- \text{bestimmte Ereignisse (z.B. Krankheiten)} \\ P_0(K_i) &- \text{a–priori–Wahrscheinlichkeit für } K_i \\ S_j &- \text{bestimmte Symptome} \\ P(S/K) &- \text{Wkt für Symptom } S\text{, falls } K \text{ vorliegt} \\ P(S/\overline{K}) &- \text{Wkt für Symptom } S\text{, falls } K \text{ nicht vorliegt} \end{aligned}$$

Expertensystem (2)
"Inferenzmaschine"

$$\begin{aligned} P(K|S) &= \frac{P(S|K)\cdot P(K)}{P(S)} \\ P(K|\overline{S}) &= \frac{P(\overline{S}|K)\cdot P(K)}{P(\overline{S})} \\ P(S) &= P(S|K)\cdot P(K) + P(S|\overline{K})\cdot P(\overline{K}) \\ P(\overline{S}) &= 1 - P(S) \end{aligned}$$

Expertensystem (3)
Arbeitsweise:

Krankheiten $K_1, \ldots, K_K$

Symptome $S_1, \ldots, S_S$

$I_0 = \{1, \ldots, K\}$ Indexmenge der möglichen Krankheiten (wird laufend aktualisiert)

$J = \{1, \ldots, S\}$ Indexmenge der Symptome
l: laufender Index $l = 0$; ärztliches (Basis-)Wissen $P_0 = P$; $P_0(S|K) = P(S|K), P_0(S|\overline{K}) = P(S|\overline{K})$

Expertensystem (4)

Berechnen der bedingten Wahrscheinlichkeiten
$\forall (i, j) \in I_l \mathrm{x} J$:

$$\begin{aligned} P_l(S_j) &:= P_l(S_j|K_i)\cdot P_l(K_i) + P_l(S_j|\overline{K}_i)\cdot P_l(\overline{K}_i) \\ P_l(K_i|S_j) &= \frac{P(S_j|K_i)\cdot P_l(K_i)}{P(S_j)} \\ P_l(K_i|\overline{S}_j) &= \frac{P_l(\overline{S_j}|K_i)\cdot P_l(K_i)}{P_l(\overline{S}_j)} \end{aligned}$$

Expertensystem (5)

A. Bestimmen des Symptoms, das am besten die Menge der Krankheiten charakterisiert

$$r(j) := \sum_{i\in I_l} |P_l(K_i|S_j) - P(K_i|\overline{S}_j)| \quad \forall \quad j \in J;$$

$j_l := \mathrm{argmax}_{j\in J} r(j)$ das Symptom mit dem größten $r(j)$.

Expertensystem (6)

B. Frage an den Patienten nach Symptom S_{j_l}

$P(K_i)$ wird aktualisiert:

$$P_{l+1}(K_i) = \begin{cases} P_l(K_i|S_{j_l}) & \text{falls JA} \\ P_l(K_i|\overline{S}_{j_l}) & \text{falls NEIN} \\ P_l(K_i) & \text{falls WEIS NICHT} \end{cases}$$

Expertensystem (7)

Aktualisieren der bedingten Wahrscheinlichkeiten.

$\forall (i,j) \in I_l \text{x} J$:

$$\begin{aligned} P_{l+1}(S_j) &:= P(S_j|K_i) \cdot P_{l+1}(K_i) + P(S_j|\overline{K}_i) \cdot P_{l+1}(\overline{K}_i) \\ P_{l+1}(K_i|S_j) &:= \frac{P(S_j|K_i) \cdot P_{l+1}(K_i)}{P(S_j)} \\ P_{l+1}(K_i|\overline{S}_j) &:= \frac{P(\overline{S_j}|K_i) \cdot P_{l+1}(K_i)}{P(\overline{S}_j)} \end{aligned}$$

Expertensystem (8)

C: Bestimmen des Symptoms, das am besten die Krankheit i **charakterisiert**

$$m_i := \max_{j \in J} |P_{l+1}(K_i|S_j) - P_{l+1}(K_i|\overline{S}_j)|, \quad \forall i \in I_l$$

Expertensystem (9)

Krankheiten mit zu kleinen Abständen werden aus der Indexmenge entfernt. Symptom j_l ist abgearbeitet.

$$\begin{aligned} I_{l+1} &= I_l \setminus \{i \in I_l : m_i < c\} \\ J_{l+1} &= J_l \setminus \{j_l\}; \end{aligned}$$

$l := l + 1$; Abbruchbedingung nicht erfüllt: goto A.

Abbruchbedingung, z.B.

$I_l = I_{l+1}, S_{j_l} = S_{j_{l+1}}, I_{l+1} = \{i\}$ oder $J_{l+1} = \emptyset$

end.

Ein–Prozessorsystem mit I/O–Einheit

Langzeitverhalten eines Ein–Prozessorsystems mit einer I/O–Einheit

Wir betrachten ein Ein–Prozessorsystem, das auf folgende Weise arbeiten soll: Wenn ein Programm beendet wird, so wird mit Wahrscheinlichkeit p $(0 < p < 1)$ die I/O–Einheit aktiviert, und mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ erfolgt ein erneuter Programmstart. Nach Beendigung eines I/O–Vorgangs wird immer ein neues Programm gestartet.

Ein–Prozessorsystem mit I/O–Einheit
(2)
Frage: Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich das System im n–ten Zyklus im Programmzustand?

Wir legen fest ($n = 1, 2, 3, \ldots$):

A_n - Ereignis, daß im n–ten Zyklus ein Programm startet

$\overline{A_n}$ - Ereignis, daß im n–ten Zyklus die I/O–Einheit aktiviert wird

gesucht: $P(A_n)$. Langzeitverhalten ($\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$).

Ein–Prozessorsystem mit I/O–Einheit
(3)
$P(A_1) = 1$, denn es wird beim Einschalten des Systems immer mit einem Programm begonnen.

Aus der angegebenen Beschreibung der Arbeitsweise des Systems folgt:

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}/A_n) &= q = 1-p \\ P(\overline{A_{n+1}}/A_n) &= p \\ P(\overline{A_{n+1}}/\overline{A_n}) &= 0 \\ P(A_{n+1}/\overline{A_n}) &= 1 \end{aligned}$$

$q_n := P(A_n)$. Die ersten drei Werte sind:

Einprozessorsystem mit I/O–Einheit
(4)

$$\begin{aligned} q_1 &= P(A_1) = 1 \\ q_2 &= P(A_2) \\ &= P(A_2/A_1) \cdot P(A_1) + \underbrace{P(A_2/\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_1})}_{=0} \quad \text{totale W.} \\ &= q = 1-p \\ q_3 &= P(A_3) \\ &= P(A_3/A_2) \cdot P(A_2) + P(A_3/\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_2}) \\ &= q \cdot q + 1 \cdot (1-q) = (1-p)^2 + p = 1 - p + p^2 \end{aligned}$$

Einprozessorsystem mit I/O–Einheit
(5)
Vermutung:

$$q_n = P(A_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-p)^i.$$

Beweis: (vollständige Induktion):

IA: Es sei $n = 1$: $\quad q_1 = 1$.

IS: Wir nehmen an, daß die Formel für n gilt. Wir zeigen die Gültigkeit für $n+1$:

Einprozessorsystem mit I/O–Einheit

(6)

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= P(A_{n+1}) \\ &= P(A_{n+1}/A_n) \cdot P(A_n) + P(A_{n+1}/\overline{A_n}) \cdot P(\overline{A_n}) \\ &= q \cdot q_n + 1 \cdot (1 - q_n) = 1 + (q-1) \cdot q_n \\ &= 1 - p \cdot q_n \\ &= 1 - p \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (-p)^i \quad \text{(nach IV)} \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{n} (-p)^i = \sum_{i=0}^{n} (-p)^i \end{aligned}$$

Einprozessorsystem I/O–Einheit

(7)

Untersuchen wir noch das Langzeitverhalten:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} P(A_n) &= \lim_{n\to\infty} q_n \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-p)^i \\ &= \frac{1}{1-(-p)} = \frac{1}{1+p}, \end{aligned}$$

geometrische Reihe mit $|-p| < 1$.

Frage: Sind die Ereignisse A_{n+1} und A_n unabhängig?

Einprozessorsystem I/O–Einheit

(8)

Sind die Ereignisse A_{n+1} und A_n unabhängig?[-2ex]

$$\begin{aligned} P(A_{n+1} \cap A_n) &= P(A_{n+1}/A_n) \cdot P(A_n) \\ &= q \cdot q_n \end{aligned}$$

Angenommen, die beiden Ereignisse seien unabhängig,

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}/A_n) &= P(A_{n+1}) \\ q &= q_{n+1} \end{aligned}$$

Aber, für $n \geq 2$ gilt $q \neq q_{n+1}$. Also sind die Ereignisse A_n und A_{n+1} nicht unabhängig.

Einprozessorsystem I/O–Einheit

(9)

Der gesamte Ablauf läßt sich eindeutig in Matrixform darstellen:

	I/O	A
I/O	0	1
A	p	$1-p$

Weitere Anwendungen (1)

Zuverlässigkeitstheorie
Wir betrachten ein Reihen-System mit 2 Bauteilen, die unabhängig voneinander ausfallen,
Angenommen, das System fällt (innerhalb eines bestimmten Zeitraumes) aus.
Wie groß ist Wahrscheinlichkeit, dass genau das erste Bauteil ausgefallen ist?

Zuverlässigkeitstheorie
Beispiel, Fortsetzung

A_i: Ereignis, dass Bauteil i ausfällt.

geg.: $P(A_i) = p_i, i = 1, 2$
ges.: $P(A_1 \cap \overline{A}_2 | A_1 \cup A_2)$?

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap \overline{A}_2 | A_1 \cup A_2) &= \frac{P((A_1 \cap \overline{A}_2) \cap (A_1 \cup A_2))}{P(A_1 \cup A_2)} \\ &= \frac{P(A_1 \cap \overline{A}_2)}{P(A_1 \cup A_2)} \quad \text{Distr.gesetz} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2)}{P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)} \quad \text{UA, Subtraktivität} \\ &= \frac{p_1(1 - p_2)}{p_1 + p_2 - p_1 p_2} \end{aligned}$$

Zuverlässigkeitstheorie
Beispiel, Fortsetzung 2
Analog

$$P(A_2 \cap \overline{A}_1 | A_1 \cup A_2) = \frac{p_2(1 - p_1)}{p_1 + p_2 - p_1 p_2}$$

Wahrscheinlichkeit für Ausfall beider Bauteile: ÜA

Weitere Anwendungen (2)

Münzwurf-Spiel
A und B spielen: Münze wird abwechselnd geworfen. Es gewinnt, wer zuerst Blatt hat.

B: Ereignis, dass bei einem Wurf Blatt kommt Z: Ereignis, dass bei einem Wurf Zahl kommt E: Ereignis, dass A gewinnt F: Ereignis, dass B gewinnt G: Spiel endet nicht.

Münzwurf-Spiel
(Fortsetzung)

Münzwurf-Spiel (Fortsetzung)

$$\begin{aligned} P(E) &= P(B) + P(ZZB) + P(ZZZZB) + \cdots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \cdots = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^i} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(F) &= P(ZB) + P(ZZZB) + P(ZZZZZB) + \cdots \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Weitere Anwendungen

(Fortsetzung, 2)

Münzwurf-Spiel (Fortsetzung)

oder (unter Anwendung der bedingten Wahrscheinlichkeiten.)

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F|B) \cdot P(B) + P(F|Z) \cdot P(Z) \\ &= 0 \cdot \frac{1}{2} + P(E) \cdot \frac{1}{2} \quad \text{2. wird 1. Spieler} \\ P(E) &= P(E|B) \cdot P(B) + P(E|Z) \cdot P(Z) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2} + P(F) \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

lineares Gleichungssystem lösen $\rightarrow$ obiges Ergebnis.

Weitere Anwendungen (3)

Ruin des Spielers[1ex]

Irrfahrt auf der Geraden mit 2 absorbierenden Zuständen, 0 und $a + b$

a: Startkapital Spieler A b: Startkapital Spieler B

Frage: Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird Spieler A ruiniert?

E_k: Ereignis, dass der Spieler, der k Euro besitzt, ruiniert wird, $p_k = P(E_k)$

A_{-1}: Ereignis, im nächsten Schritt einen Euro zu verlieren.

A_{+1}: Ereignis, im nächsten Schritt einen Euro zu gewinnen.

Ruin des Spielers

(Fortsetzung)

Nach dem Satz der Totalen Wahrscheinlichkeit gilt:

$$\begin{aligned} p_k &= P(E_k|A_{-1}) \cdot P(A_{-1}) + P(E_k|A_{+1}) \cdot P(A_{+1}) \\ &= \frac{1}{2}(p_{k-1} + p_{k+1}) \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} 2p_k &= p_{k+1} + p_{k-1} \\ p_{k+1} - p_k &= p_k - p_{k-1} =: d \end{aligned}$$

Ruin des Spielers

(Fortsetzung, 2)

Offenbar: $p_0 = 1, \quad p_{a+b} = 0$

$$\begin{aligned}
p_k &= \underbrace{p_k - p_{k-1}}_{=d} + p_{k-1} - + \cdots + \underbrace{p_1 - p_0}_{=d} + p_0 \\
&= kd + 1 \\
p_{a+b} &= (a+b)d + 1 = 0 \Rightarrow d = -\frac{1}{a+b} \\
p_k &= 1 - \frac{k}{a+b} \\
p_a &= 1 - \frac{a}{a+b} = \frac{b}{a+b} \\
p_b &= \frac{a}{a+b}
\end{aligned}$$

4 Klassische Wahrscheinlichkeitsräume

4.1 Binomiale Wahrscheinlichkeiten

Versuche mit zwei möglichen Ausgängen: A (gut) und $\overline{A}$ (schlecht).

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{A, \overline{A}\} = \{\text{„gut“, „schlecht“}\} \\
\mathcal{E} &= \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\} \\
P(A) &= p \\
P(\overline{A}) &= q = 1 - p
\end{aligned}$$

Beispiele
Münzwurf: $p = \frac{1}{2}$ Würfeln: $p = \frac{1}{6}$ Qualitätskontrolle: $p \cdot 100\%$ die Ausschußquote.

Binomiale Wahrscheinlichkeiten (2)

2–malige Durchführung (unabhängig voneinander)
Elementarereignisse: $(A, A), (A, \overline{A}), (\overline{A}, A), (\overline{A}, \overline{A})$ mit den Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned}
P((A, A)) &= p^2 \\
P((A, \overline{A})) &= p \cdot (1 - p) \\
P((\overline{A}, A)) &= p \cdot (1 - p) \\
P((\overline{A}, \overline{A})) &= (1 - p)^2
\end{aligned}$$

Binomiale Wahrscheinlichkeiten
(Zweifaches Bernoulli-Schema)
B_k: Ereignis, daß A k–mal auftritt, wobei $k = 0, 1, 2$.

$$\begin{aligned}
P(B_0) &= (1 - p)^2 \\
P(B_1) &= 2 \cdot (p \cdot (1 - p)) \\
P(B_2) &= p^2
\end{aligned}$$

bzw.

$$P(B_k) = \binom{2}{k} p^k (1 - p)^{2-k}.$$

Binomiale Wahrscheinlichkeiten
(n-faches Bernoulli-Schema)

Def. 14 (Binomialwahrscheinlichkeit)
Führen das Experiment jetzt n–mal unabhängig voneinander durch. Analog zum vorigen Experiment sei jetzt B_k das Ereignis, daß A genau k–mal auftritt, $k = 0, \ldots, n$

$$\boxed{P(B_k) = \tbinom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.}$$

Formel für das n–fache Bernoulli–Schema.

Bezeichnung: $\mathrm{B}(p, n)$ oder auch $Bi(p, n)$

Die Wahrscheinlichkeiten $P(B_k)$ bezeichnen wir auch als Binomialwahrscheinlichkeiten.

n-faches Bernoulli-Schema (2)
Offenbar:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} P(B_i) &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\ &= (p+1-p)^n = 1\end{aligned}$$

Binomiale Wahrscheinlichkeiten
Beispiel

Fünfmal eine Münze werfen
A: das Ereignis, daß bei einem Wurf „Zahl" fällt, $P(A) = p = \frac{1}{2}$

B_3: Ereignis, daß A genau dreimal auftritt:

$$\begin{aligned}P(B_3) &= \binom{5}{3} \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 \left(1-\tfrac{1}{2}\right)^{5-3} \\ &= \binom{5}{3} \left(\tfrac{1}{2}\right)^5 \\ &= \frac{5}{16}.\end{aligned}$$

4.2 Multinomiale Wahrscheinlichkeiten

Wir betrachten ein zufälliges Experiment mit den Ausgängen $A_1, A_2, \ldots, A_l$. Wir setzen $p_i = P(A_i)$, $\sum_{i=1}^{l} p_i = 1$.

Es sei ein Behälter mit k Kugeln in l verschiedenen Farben gegeben, wobei k_i Kugeln die Farbe i ($i = 1, \ldots, l$) besitzen, $\sum_{i=1}^{l} k_i = k$. Wahrscheinlichkeit, mit der eine Kugel einer bestimmten Farbe aus dem Behälter entnommen wird:

$$P(\text{Kugel der Farbe } i) = p_i = \tfrac{k_i}{k}.$$

Multinomiale Wahrscheinlichkeiten (2)

Def. 15 (Multinomiale Wahrscheinlichkeit)
Das Experiment soll nun n–mal wiederholt werden. $B_{n_1,n_2,\ldots,n_l}$: das Ereignis, daß die Ereignisse A_1 n_1–mal, A_2 n_2–mal, ..., und A_l n_l–mal eintreten.

$$P(B_{n_1,n_2,\ldots,n_l}) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_l!} \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_l^{n_l}.$$

Derartige Wahrscheinlichkeiten bezeichnen wir auch als <u>multinomiale Wahrscheinlichkeiten</u> (polynomiale Wktn.)

Potenzen von Summen
Vergleichen Sie:

$$(a_1 + \ldots + a_l)^n = \sum \frac{n!}{n_1! \cdots n_l!} a_1^{n_1} \cdots a_l^{n_l}$$

wobei die Summe über alle Tupel $(n_1, \ldots, n_l)$ gebildet wird mit $\sum_{i=1}^{l} n_i = n$.

Multinomiale Wahrscheinlichkeiten
Beispiel

Fragebogen
Bei einem Fragebogen wird (u.a.) nach dem Alter der befragten Personen gefragt. Das Alter sei in Klassen eingeteilt, 10-20, 21-40, 41-60, über 60 Jahre. Der Bevölkerungsanteil beträgt jeweils p_i für die i-te Altersklasse, $i = 1, \ldots, 4, \quad \sum_i p_i = 1$.
Es werden n=1000 Personen befragt.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 10% der befragten bis zu 20 Jahre, und außerdem bis zu 10% der Befragten älter als 60 Jahre alt waren?

Multinomiale Wahrscheinlichkeiten
Beispiel, Fortsetzung

Sei $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, X_{i3}, X_{i4})$, wobei $X_{ij} = 1$ falls Person i zur j-ten Altersklasse gehört, und $X_{ij} = 0$ sonst. Dann ist

$$\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{X}_i =: (Y_1, \ldots, Y_4) \sim Mult(n, p_1, p_2, p_3, p_4)$$

Multinomiale Wahrscheinlichkeiten
Beispiel, Fortsetzung
Sei $a := 100$

$P(Y_1, Y_4 \leq a) =$

$$\begin{aligned}
&= P(Y_1 \leq a, Y_2 + Y_3 = n - Y_1 - Y_4, Y_4 \leq a) \\
&= \sum_{i=0}^{a} \sum_{j=0}^{a} P(Y_1 = i, Y_2 + Y_3 = n - i - j, Y_4 = j) \\
&= \sum_{i=0}^{a} \sum_{j=0}^{a} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} p_1^i p_4^j (p_2 + p_3)^{n-i-j}
\end{aligned}$$

4.3 Poisson-Wahrscheinlichkeiten

Beispiele, bei denen POISSON–Wahrscheinlichkeiten auftreten, sind

- die Anzahl von Verkehrsunfällen in einem Ort in einem bestimmten Zeitintervall,
- die Ankünfte von Kunden an einem Schalter oder
- der radioaktive Zerfall von α–Teilchen.
- In einer Telefonzentrale wird ermittelt, wieviel Anrufe in einer bestimmten Zeiteinheit ankommen.

Poisson-Wahrscheinlichkeiten
Elementarereignisse sind hier Anzahlen, z.B. das Ereignis, dass in einer Zeiteinheit genau i Anrufe eintreffen.

Def. 16 (Poisson-Wahrscheinlichkeit)

$$P(\omega_i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}.$$

λ ist dabei ein noch unbestimmter Parameter. Er kann als mittlere Rate aufgefasst werden.

$$P(\Omega) = \sum_{i=0}^{\infty} P(\omega_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!}}_{=e^{\lambda}} = 1$$

Wir werden später sehen, daß diese Verteilung "natürlich" ist.

5 Zufallsvariablen (allgemein)

5.1 Grundbegriffe

Def. 17 (Messbarkeit von Abbildungen)
Es seien $(\Omega_1, \mathcal{E}_1, P_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{E}_2, P_2)$ Wahrscheinlichkeitsräume. Eine Abbildung

$$X : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$$

heißt $\mathcal{E}_1$–$\mathcal{E}_2$–messbar, falls für alle Ereignisse $A \in \mathcal{E}_2$ gilt:

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega_1 : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{E}_1.$$

Bem.: Oftmals wird die Menge $\mathcal{B}^1$ der Borel–Mengen als Ereignisfeld $\mathcal{E}_2$ betrachtet.

Zufällige Variable

Def. 18 (Zufällige Variable, Zufallsgröße)
Es sei $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine $\mathcal{E}$–$\mathcal{B}^1$–meßbare Abbildung X von Ω in $\mathbb{R}$ heißt (reellwertige) zufällige Variable oder Zufallsgröße.

Bem.: $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1, P')$ bildet hier einen zweiten Wahrscheinlichkeitsraum, wobei P' eine Abbildung von $\mathcal{B}^1$ in $\mathbb{R}$ ist, die den Kolmogorov–Axiomen genügt.

Zufällige Variable
Beispiel (1)

Augensumme beim dreimaligen Würfeln
$\Omega = \{(i,j,k), 1 \leq i,j,k \leq 6\}$: Tripel von Augenzahlen $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$: Ereignisfeld $P(\omega) = P(i,j,k) = \frac{1}{6^3}$: Laplace-Wahrscheinlichkeit

$$X : \quad \Omega \to \Omega'$$

$\Omega' = \{S : 3 \leq S \leq 18\}$ oder $\Omega' = \mathbb{R}$, S: Augensumme $\mathcal{E}' = \mathcal{P}(\Omega')$ oder $\mathcal{E}' = \mathcal{B}$: Ereignisfeld

$$P(\omega') = P'(S = s) = \frac{\#(i,j,k) : i+j+k = s}{6^3} = \frac{|X^{-1}(s)|}{6^3}$$

Bedingung z.B.: $X^{-1}(s) \in \mathcal{E}$ oder $X^{-1}(\{s_1, s_2\}) \in \mathcal{E}$

Zufällige Variable
Beispiel (2)

Die Indikatorfunktion ist Zufallsvariable
Sei A ein Ereignis, $\Omega = \{A, \overline{A}\}$ und $\mathcal{E} = \{A, \overline{A}, \emptyset, \Omega\}$. Die Abbildung

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist messbar, und also Zufallsvariable, denn

$$\begin{aligned} I_A^{-1}(1) &= A \in \mathcal{E}, \quad I_A^{-1}(0) = \overline{A} \in \mathcal{E}, \\ I_A^{-1}(\{0,1\}) &= \Omega \in \mathcal{E}, \quad I_A^{-1}(y) = \emptyset \in \mathcal{E}(y \neq 0,1), \end{aligned}$$

Zufällige Variable

Fortsetzung

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ sei eine zufällige Variable, $X : (\Omega, \mathcal{E}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}^1, P_X)$.

Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig, aber fest. Betrachten das zufällige Ereignis

$$B = (-\infty, x) = \{X < x\} := \{\omega \in \Omega \colon X(\omega) < x\} \in \mathcal{B}^1.$$

Für die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses gilt:

$$\begin{aligned} P(X < x) &= P(\{\omega \colon X(\omega) < x\}) = P(\{\omega \colon X(\omega) \in B\}) \\ &= P(X^{-1}(B)) =: P_X(B) \end{aligned}$$

Verteilungsfunktion

Def. 19 (Verteilungsfunktion von X)

$$F_X(x) := P(X < x) = P_X\left((-\infty, x)\right)$$

Bem.: Der Einfachheit halber werden wir die Funktion F_X einfach nur mit F bezeichnen.

Bem.: Manchmal wird die Verteilungsfunktion auch durch

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

definiert (bei SAS oder Mathematica z.B.)

5.2 Diskrete Zufallsvariablen

Eine diskrete Zufallsgröße

$$X \colon \Omega \longrightarrow \{x_i \colon i \in \mathbb{N}\} =: W \subset \mathbb{R}.$$

nimmt höchstens abzählbar viele verschiedene Werte mit positiver Wahrscheinlichkeit an.

Notation:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n & \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n & \ldots \end{pmatrix}$$

$x_i \in \mathbb{R}$: Werte, die die Zufallsgröße annehmen kann p_i: die entsrechenden Wahrscheinlichkeiten.

Diskrete Zufallsvariablen

Fortsetzung

Es gilt:

$$p_i \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1, \qquad p_i = P(X = x_i).$$

Wenn wir Mengen A_i definieren durch

$$A_i := \{\omega \colon X(\omega) = x_i\}, \ \ \forall i \in \mathbb{N},$$

so gilt offenbar: $A_i \cap A_j = \emptyset, \qquad \forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j$. Allgemein gilt dann:

$$P(X = x) = \begin{cases} p_i, & \text{falls } x = x_i \\ 0, & \text{falls } x \neq x_i \end{cases} \qquad \forall x_i \in W, \ i \in \mathbb{N}.$$

Diskrete Zufallsvariablen

Verteilungsfunktion

$$
\begin{aligned}
F(x) &= P(X < x) = P\left(\bigcup_{i:\, x_i < x} A_i\right) \\
&= \sum_{i:\, x_i < x} P(A_i) = \sum_{i:\, x_i < x} p_i
\end{aligned}
$$

D.h.: Eine diskrete Zufallsgröße, die die Werte $\{x_i \colon i \in \mathbb{N}\}$ annimmt, wobei $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ gilt, hat die folgende Verteilungsfunktion:

$$
\boxed{F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \le x_1 \\ \sum\limits_{i:\, x_i < x} p_i, & \text{falls } x_1 < x \end{cases}}
$$

Diskrete Zufallsvariablen

Beispiele (1)

Diskrete Gleichverteilung

$$
X: \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \ldots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}
$$

Diskrete Zufallsvariablen

Beispiele (2)

Binomialverteilung, $X \sim B(p, n)$ *oder* $X \sim Bi(p, n)$.

$$
X: \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & n \\ p_0 & p_1 & \ldots & p_n \end{pmatrix}
$$

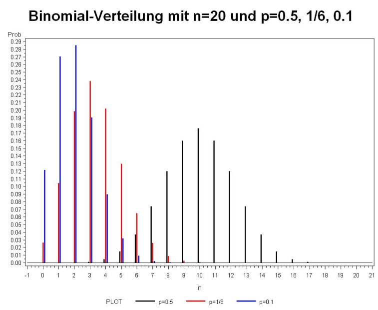
$$
P(X = i) = p_i = \binom{n}{i} p^i \cdot (1-p)^{n-i} > 0, \qquad 0 < p < 1.
$$

Wir haben oben gesehen, dass

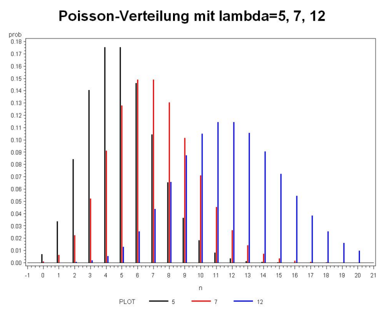
$$
\sum_{i=0}^{n} p_i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = (p + 1 - p)^n = 1.
$$

Diskrete Zufallsvariablen, Wahrscheinlichkeitsfunktionen

Binomial



Poisson



Diskrete Zufallsvariablen

Beispiele (3)

POISSON–*Verteilung*, $X \sim Poi(\lambda)$

Es sei X eine diskrete Zufallsgröße,

$$X: \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n & \dots \\ p_0 & p_1 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

$$P(X = n) = p_n = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0.$$

Wir haben oben gesehen, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}}_{=e^{\lambda}} = 1$$

5.3 Stetige Zufallsvariablen

Def. 20 (Dichtefunktion)

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt <u>Dichtefunktion</u>, falls sie die folgenden Eigenschaften hat:

1. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x) \geq 0$.
2. Es gilt: $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 1$.

Def. 21 (Stetige Zufallsvariable)

Eine zufällige Variable X heißt <u>stetig</u>, falls eine Dichtefunktion f existiert, so dass gilt:

$$P(X < x) = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

Falls die Funktion f stetig ist, gilt: $F'(x) = f(x)$.

Stetige Zufallsvariablen

Bem.: Für die Wahrscheinlichkeit $P(X = x)$ gilt

$$P(X = x) = \int_{x}^{x} f(t)\, dt = 0,$$

sogar wenn X den Wert x tatsächlich annehmen kann! D.h. z.B.

$$P(X \leq x) = P(X < x).$$

Außerdem gilt:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(t)\, dt.$$

Stetige Zufallsvariablen

Veranschaulichung der Dichtefunktion

Es sei X eine stetige Zufallsgröße. Wir teilen den Wertebereich von X in Intervalle I_j ein und beobachten für jeden der Versuche X_i, in welches der Intervalle I_j der Wert X_i $(i = 1, \ldots, n)$ fällt. Es sei $n_j = \#\{X_i \in I_j\}$. Δ_j: Länge eines Intervalls I_j. Sei $\Delta_0 = \max_j \{\Delta_j\}$.

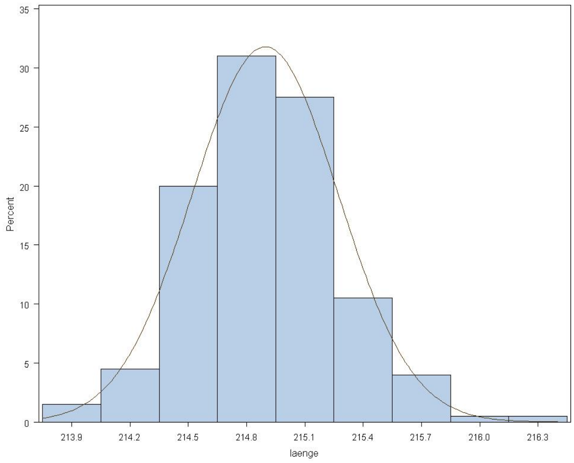
$$f_{emp.}(x) := \frac{\frac{n_j}{n}}{\Delta_j}, \ \forall x \in I_j.$$

Dann gilt:

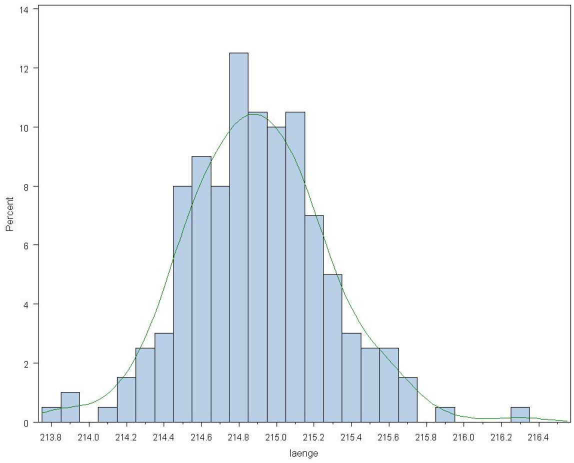
$$f(x) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta_0 \to 0}} f_{emp.}(x).$$

Stetige Zufallsvariablen

Veranschaulichung der Dichtefunktion (2)



Δ_0 groß



Δ_0 klein

Stetige Zufallsvariablen, Beispiele (1)

Gleichverteilung, bez. $X \sim R(0,1)$ oder $X \sim U(0,1)$

Es sei die Zufallsvariable X auf dem Intervall $[0,1[$ definiert mit der Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0 \\ x, & \text{falls } 0 \le x < 1 \\ 1, & \text{falls } x \ge 1 \end{cases}.$$

Die Dichtefunktion ist die Funktion f;

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } 0 \le x < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Stetige Zufallsvariablen, Beispiele (2)

Gleichverteilung, bez. $X \sim R(a,b)$ oder $X \sim U(a,b)$

Sei X gleichverteilt auf dem Intervall $[a,b)$, $X \sim R(a,b)$, dann hat X die Dichtefunktion:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < a \\ \frac{1}{b-a}, & \text{falls } a \le x < b \\ 0, & \text{falls } x \ge b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(\{\omega\colon X(\omega) \in [a,b]) &= P(a \le X \le b) \\ &= \int\limits_a^b f(x)\,dx = \tfrac{1}{b-a}\int_a^b dx = 1 \end{aligned}$$

Stetige Zufallsvariablen, Beispiele (3)

Exponentialverteilung, $X \sim Exp(\lambda)$
Die Zufallsvariable X habe die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \cdot x}, & \text{falls } x \ge 0 \\ 0, & \text{falls } x < 0 \end{cases}.$$

Die Dichtefunktion ist

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}, & \text{falls } x \ge 0 \\ 0, & \text{falls } x < 0 \end{cases}.$$

$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1.$

Stetige Zufallsvariablen,Beispiele (4)

Normalverteilung, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$X: \quad (\Omega, \mathcal{E}, P) \to (\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1, P_X)$$

sei der Messfehler bei Messung einer physikalischen Konstanten.
Der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ ist ein Modell eines im Hintergrund wirkenden Zufallsmechanismus, der nicht näher beschrieben werden kann, Fehler im Meßinstrument; zufällige äußere Einflüsse.
Er enthält alle nicht näher bestimmbaren zufälligen Effekte. Zur Beschreibung dient der Bildraum $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1, P_X)$.

Stetige Zufallsvariablen, Beispiele (4a)

Normalverteilung, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
Die Zufallsvariable X mit der Verteilungsfunktion

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}\,dt.$$

heißt normalverteilt mit den Parametern (μ, σ^2). Die zugehörige Dichtefunktion hat die Form:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad \sigma > 0.$$

Stetige Zufallsvariablen, Beispiele (4b)

Satz: $f(x)$ **ist eine Dichtefunktion**

Offensichtlich ist $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$. Es bleibt zu zeigen

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}\,dt = 1.$$

Wir bezeichnen

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\,dx =: I.$$

Stetige Zufallsvariablen, Beispiele (4c)

$$\begin{aligned}
I^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\,dx\right)^2 \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\,dx\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2}\,dy\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\,dx\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2}\,dy \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2}\,dx\,dy
\end{aligned}$$

Stetige Zufallsvariablen, Beispiele (4d)

Substitution: $s := \frac{x-\mu}{\sigma}$ $\quad t := \frac{y-\mu}{\sigma}$. Dann gilt:

$$x = s\sigma + \mu \qquad y = t\sigma + \mu,$$

$$dx = \sigma\,ds \qquad dy = \sigma\,dt.$$

$$\begin{aligned}
I^2 &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}s^2} e^{-\frac{1}{2}t^2} \sigma^2\,ds\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(s^2+t^2)}\,ds\,dt
\end{aligned}$$

Stetige Zufallsvariablen, Beispiele (4e)

Wir führen eine weitere Substitution durch, Polarkoordinaten:

$$s = r\cos\varphi \qquad t = r\sin\varphi.$$

Dann gilt allgemein nach der Substitutionsregel:

$$\int\int g(s,t)\,ds\,dt = \int\int g(s(r,\varphi), t(r,\varphi)) \det J\,dr\,d\varphi,$$

wobei J die Jacobi-Matrix ist.

Stetige Zufallsvariablen, Beispiele (4f)

$$\begin{aligned}
\det J = |J| &= \begin{vmatrix} \frac{\partial s}{\partial r} & \frac{\partial s}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial t}{\partial r} & \frac{\partial t}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} \\
&= r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi \\
&= r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I^2 &= \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)} r\,dr\,d\varphi \\
&= \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}r^2} r\,dr\,d\varphi
\end{aligned}$$

Stetige Zufallsvariablen, Beispiele (4g)

$$\begin{aligned}
I^2 &= \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}r^2} r\,dr\,d\varphi \\
&= \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big[-e^{-\frac{r^2}{2}}\Big]_0^{\infty}\,d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2\pi}2\pi = 1
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $I = 1$, d.h. f ist eine Dichtefunktion.

Zufallsvariable, Grundbegriffe

Zusammenfassung (1)

Eine Zufallsvariable ist eine (meßbare) Abbildung

$$X: \quad \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

Jedem Element ω des Stichprobenraumes Ω wird eine reelle Zahl zugeordnet.
Die Zufallsvariable X heißt <u>diskret</u>, wenn X nur endlich viele oder abzählbar unendlich viele Werte x_i annehmen kann. Jeder dieser Werte kann mit einer gewissen Wkt. $p_i = P(X = x_i)$ auftreten.

geografische Lage (N,O,S,W); Länge einer Warteschlange; Anzahl der Punkte in der Klausur.

Zufallsvariable, Grundbegriffe

Zusammenfassung (2)

Die Zufallsvariable X heißt <u>stetig</u>, falls X beliebige Werte in einem Intervall $(a,b), [a,b]$, $(a,b], (a,b]$, $(-\infty,a), (b,\infty)$, $(-\infty,a], [b,\infty)$, $(-\infty,\infty)$ annehmen kann.
Bem.: Jeder einzelne Wert $x_i \in (a,b)$ (oder in einem der anderen Intervalle) hat die Wkt. Null.
Die <u>Verteilungsfunktion</u> F wird dann durch die sogen. <u>Dichtefunktion</u> f beschrieben,

$$F(x) = P(X < x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

5.4 Allgemeine Eigenschaften einer Verteilungsfunktion

Satz: Sei X eine Zufallsariable mit der Verteilungsfunktion

$$F(x) = P(X < x) = P(\{\omega\colon X(\omega) < x\}) = P_X((-\infty, x)).$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. Die Funktion $F(x)$ ist monoton wachsend.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.
3. Die Funktion $F(x)$ ist linksseitig stetig. Es gilt also: $\lim\limits_{x\to x_0-} F(x) = F(x_0)$.
4. $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$.

Eigenschaften der Verteilungsfunktion

Beweis des Satzes (1)

1. Es sei $x_1 < x_2 < x$. Wir definieren zwei Mengen:

$$A := \{\omega\colon X(\omega) < x_1\},$$

$$B := \{\omega\colon X(\omega) < x_2\}.$$

Dann gilt:

$$F(x_1) = P(\{\omega\colon X(\omega) < x_1\}) = P(A),$$

$$F(x_2) = P(\{\omega\colon X(\omega) < x_2\}) = P(B).$$

Wegen $A \subseteq B$ folgt: $P(A) \leq P(B)$, d.h.

$$F(x_1) \leq F(x_2),$$

d.h. die Funktion $F(x)$ monoton wachsend.

Eigenschaften der Verteilungsfunktion

Beweis des Satzes (2)

2. Sei (x_n) eine monoton fallende Folge mit $x_n \to -\infty$ und (y_n) eine monoton wachsende Folge mit $y_n \to \infty$. Wir definieren:

$$A_n := \{\omega\colon X(\omega) < x_n\},$$

$$B_n := \{\omega\colon X(\omega) < y_n\}.$$

Für die Folgen (A_n) und $B_n)$ gilt: (A_n) ist monoton fallend $(A_n \supseteq A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N})$, (B_n) monoton wachsend $(B_n \subseteq B_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N})$. Offensichtlich gilt:

$$F(x_n) = P(A_n), \qquad F(y_n) = P(B_n).$$

Eigenschaften der Verteilungsfunktion

Beweis des Satzes (3)

Wegen der Stetigkeit der Wkt. von oben und unten ist

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n) = P(X < -\infty) = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n) = P(\lim_{n\to\infty} B_n) = P(X < +\infty) = 1.$$

Das ist äquivalent zu:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{n\to\infty} F(y_n) = 1.$$

Eigenschaften der Verteilungsfunktion

Beweis des Satzes (4)

3. Wir definieren eine Menge

$$A = \{\omega\colon X(\omega) < x_0\}$$

und eine Folge von Mengen

$$A_n = \{\omega\colon X(\omega) < x_n\},$$

wobei (x_n) eine monotone Folge ist, die von links gegen x_0 konvergiert ($x_n \longrightarrow x_0 - 0$). Offenbar ist die Folge (A_n) monoton wachsend ($A_n \subseteq A_{n+1}$). Außerdem gilt:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A.$$

Eigenschaften der Verteilungsfunktion

Beweis des Satzes (5)

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} F(x_n) &= \lim_{n\to\infty} P(X < x_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) \\
&= P(\lim_{n\to\infty} A_n) = P(A) = P(X < x_0) \\
&= F(x_0)
\end{aligned}$$

D.h.:

$$\lim_{x\to x_0-} F(x) = F(x_0).$$

Eigenschaften der Verteilungsfunktion

Beweis des Satzes (6)

4. Es gilt:

$$\begin{aligned}
P(a \le X < b) &= P(\{X < b\} \setminus \{X < a\}) \\
&= P(X < b) - P(X < a) \\
&\quad \text{(Subtraktivität der Wahrscheinlichkeit)} \\
&= F(b) - F(a)
\end{aligned}$$

6 Diskrete zufällige Variablen

6.1 Allgemeine Übersicht

Erinnerung: Wir beschreiben diskrete Zufallsvariablen durch

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \cdots p_n & \cdots \end{pmatrix}$$

$$p_i = P(X = x_i) > 0, \quad i = 1, 2, 3, \ldots \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

Def. 22 (Wahrscheinlichkeitsfunktion, Zähldichte)
Die Funktion

$$f(x_i) = p_i$$

heißt <u>Wahrscheinlichkeitsfunktion</u>.

Binomialwahrscheinlichkeit

a) Zweimaliges Werfen einer Münze
$\Omega = \{ZZ, ZB, BZ, BB\}$ $X :=$ Anzahl von Blatt

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

b) Erfolge bei n Versuchen
X: Anzahl der "Erfolge" bei n Versuchen, wobei jeder der n Versuche eine Erfolgswahrscheinlichkeit p hat.

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{Binomialwkt.} \\ F_X(k) &= P(X < k) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \end{aligned}$$

Binomialwahrscheinlichkeit, Beispiele (1)

Es seien $p = \frac{1}{2}$ und $n = 5$. Für $x = 2.5$ gilt:

$$\begin{aligned} F(2.5) &= \sum_{i:\, i<2,5} p_i \\ &= p_0 + p_1 + p_2 \\ &= \binom{5}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{5}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{5}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \\ &= \frac{1}{32} + \frac{5}{32} + \frac{10}{32} \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

Binomialwahrscheinlichkeit, Beispiele (2)

Würfeln 20 mal. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für mindestens 4 Sechsen?
X: Anzahl der Sechsen.

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= 1 - P(X < 4) = 1 - F_X(4) \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{3} P(X = i) = \end{aligned}$$

$$1 - \Big(\frac{5}{6}\Big)^{20} - 20\Big(\frac{1}{6}\Big)\Big(\frac{5}{6}\Big)^{19} - \frac{20 \cdot 19}{2}\Big(\frac{1}{6}\Big)^{2}\Big(\frac{5}{6}\Big)^{18} -$$

$$- \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{6}\Big(\frac{1}{6}\Big)^{3}\Big(\frac{5}{6}\Big)^{17}$$

≈ 0.43.

Poisson-Wahrscheinlichkeit

Beispiel

Telefonzentrale, $X \sim Poi(\lambda)$
X: Anzahl der Anrufe, die pro Zeiteinheit von einer Telefonzentrale vermittelt werden.

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \end{pmatrix}$$

$$P(X = i) = p_i = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!}}\, e^{-\lambda} = 1.$$

Binomial und Poisson

Satz: Seien $X_n \sim Bi(n, p)$**,** $Y \sim Poi(\lambda)$
Für $n \cdot p = \lambda$ gilt: $P(X_n = k) \longrightarrow_{n \to \infty} P(Y = k)$.

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\Big(\frac{\lambda}{n}\Big)^k \Big(1 - \frac{\lambda}{n}\Big)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!(n-\lambda)^k} \frac{(n-\lambda)^k \lambda^k}{n^k} \frac{(n-\lambda)^{n-k}}{n^{n-k}} \\ &= \frac{1}{k!} \underbrace{\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(n-\lambda)^k}}_{\longrightarrow 1} \lambda^k \underbrace{\Big(1 - \frac{\lambda}{n}\Big)^n}_{\longrightarrow e^{-\lambda}} \\ &\to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = P(Y = k) \end{aligned}$$

Geometrische Verteilung

d) Münzwurf solange bis B(Blatt) kommt

$\Omega = \{B, ZB, ZZB, ...\}$ $X :=$ Anzahl der Würfe bis zum ersten Blatt.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n & \cdots \\ \frac{1}{2} & (\frac{1}{2})^2 & (\frac{1}{2})^3 & (\frac{1}{2})^4 & \cdots & (\frac{1}{2})^n & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \sum_{i=1}^{\infty} (1/2)^i = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 1$$

geometrische Reihe

geometrische Verteilung mit p=1/2, $p_i = (1/2)^i$.

Geometrische Verteilung

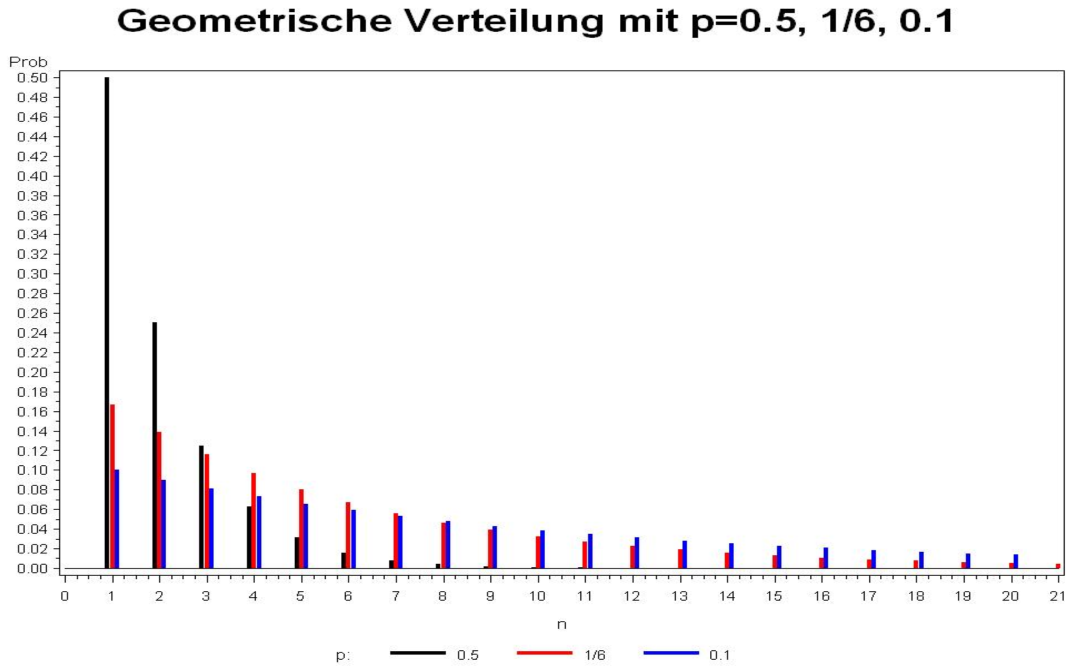
Def. 23 (Geometrische Verteilung)

Eine Zufallsvariable X mit

$$P(X = i) = p(1-p)^{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

heißt geometrisch verteilt, bez. $X \sim Geo(p)$

Anzahl der Schritte bis zum ersten "Erfolg".



Hypergeometrische Verteilung

e) Qualitätskontrolle

Gegeben sei eine Grundgesamtheit (z.B. eine Warenlieferung) mit N Stücken, von denen genau n schlecht seien. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Stichprobe vom Umfang m höchstens k Stück schlecht sind?

X: zufällige Anzahl der schlechten Stücke in der Stichprobe.

$$P(X = x) = \frac{\binom{n}{x} \cdot \binom{N-n}{m-x}}{\binom{N}{m}}$$

Hypergeometrische Verteilung

Fortsetzung

$\binom{N}{m}$: # möglichen Stichproben.

$\binom{n}{x}$: # Möglichkeiten, aus n schlechten Stücken in der Grundgesamtheit x schlechte Stücke zu ziehen.

$\binom{N-n}{m-x}$: # Möglichkeiten, aus $N-n$ guten Stücken in der Grundgesamtheit $m-x$ gute Stücke zu ziehen.
Offenbar: $0 \leq x \leq \min(n, m)$ $m - x \leq N - n$.

Hypergeometrische Verteilung

Def. 24 (Hypergeometrische Verteilung)
Eine Zufallsvariable X mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion

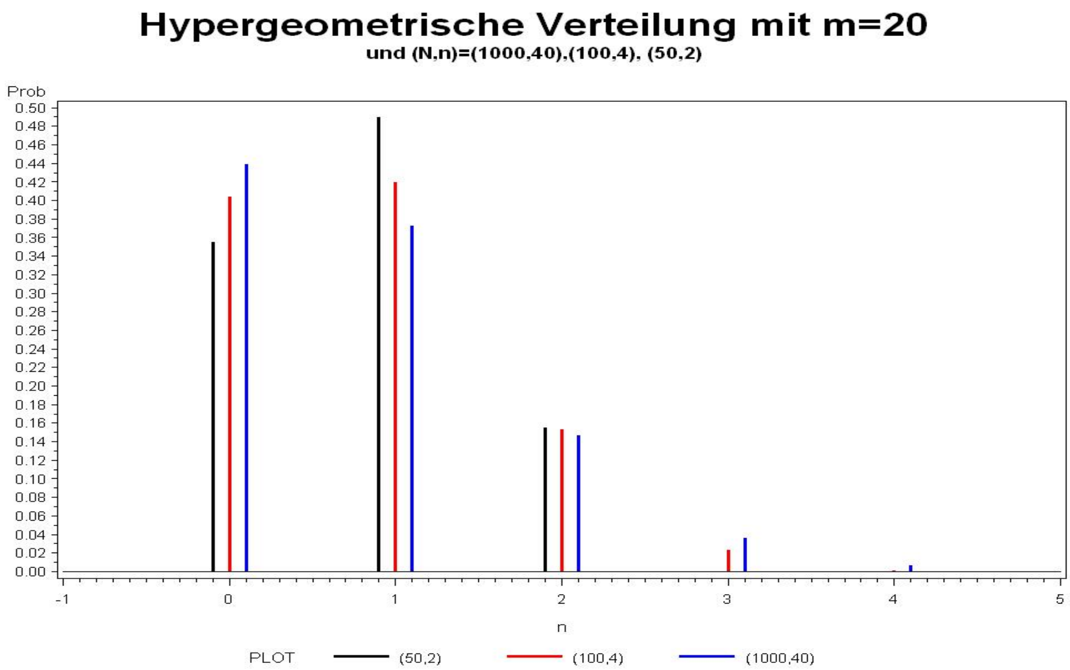
$$f(x|H_{N,n,m}) = \frac{\binom{n}{x} \cdot \binom{N-n}{m-x}}{\binom{N}{m}}$$

heißt hypergeometrisch verteilt.
Bez.: $X \sim H_{N,n,m}$. Verteilungsfunktion:

$$F(k|H_{N,n,m}) = \sum_{x=0}^{k-1} \frac{\binom{n}{x} \cdot \binom{N-n}{m-x}}{\binom{N}{m}}$$

Satz: Für $N \to \infty$, $n \to \infty$, $\frac{n}{N} \to p$ gilt:

$$f(x|H_{N,n,m}) \to \binom{m}{x} p^x (1-p)^{m-x} = f(x|Bi(m,p))$$



6.2 Binomialverteilung

6.2 Binomialverteilung

Weitere Beispiele (1)

Kommunikationskanal

Schicken Binärzahlen durch einen Kommunikationskanal. p: Wahrscheinlichkeit einer fehlerhaften Übertragung n: Anzahl der übertragenen Zeichen X: Anzahl der Fehler:

$$P(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

Binomialverteilung

Weitere Beispiele (2)

Qualitätskontrolle

Stichprobe (hier: mit Zurücklegen) von 10 Computerchips aus einer sehr großen Lieferung (Los). Wenn keine defekt, so wird die Lieferung angenommen, sonst nicht.

p: Wahrscheinlichkeit, ein zufällig ausgewählter Chip ist defekt.
X: Anzahl der intakten Stücke, $X \sim Bi(10, 1-p)$

$$P(\text{Los angenommen}) = P(X = 10) = (1-p)^{10}$$

Binomialverteilung

Weitere Beispiele (3)

k aus n Systeme

Jede Komponente habe die Intaktwahrscheinlichkeit p.
X: Anzahl der ausfallenden i Komponenten.

$$P(X = i) = \binom{n}{i} p^{n-i} (1-p)^i$$

Wahrscheinlichkeit, daß höchstens k Komponenten ausfallen:

$$\begin{aligned} P(X \le k) &= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^{n-i} (1-p)^i \\ &= \sum_{i=n-k}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \end{aligned}$$

6.3 Geometrische Verteilung

Geometrische Verteilung (1)

Sei $Y \sim Geo(p)$, d.h.

$$\begin{aligned} P(Y > s) &= 1 - \sum_{i=1}^{s} (1-p)^{i-1} \cdot p = (1-p)^s \\ P(Y > t) &= 1 - \sum_{i=1}^{t} (1-p)^{i-1} \cdot p = (1-p)^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Y > s) \cdot P(Y > t) &= (1-p)^{s+t} \\ &= P(Y > s+t). \end{aligned}$$

Geometrische Verteilung (2)

also:

$$\begin{aligned} P(Y > s+t | Y > t) &= \frac{P(Y > s+t, Y > t)}{P(Y > t)} \\ &= \frac{P(Y > s+t)}{P(Y > t)} \\ &= P(Y > s) \end{aligned}$$

Def. 25 (Markov-Eigenschaft, Gedächtnislosigkeit)

Verteilungen mit der Markov-Eigenschaft

$$P(Y > s+t | Y > t) = P(Y > s)$$

heißen *gedächtnislos*.

Geometrische Verteilung (3)

Satz: Sei X diskrete Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}^+$

und X habe die Markov-Eigenschaft. Dann ist $X \sim Geo(p)$ für ein $p, p \in (0,1)$

Beweis: Sei

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \ldots \end{pmatrix}$$

Aus der Markov-Eigenschaft folgt:

$$\begin{aligned} P(X > s) \cdot P(X > t) &= P(X > s+t) \quad \forall s, t \\ (1 - \sum_{i=1}^{s} p_i)(1 - \sum_{i=1}^{t} p_i) &= 1 - \sum_{i=1}^{s+t} p_i \end{aligned}$$

Geometrische Verteilung (4)

$$(1 - \sum_{i=1}^{s} p_i)(1 - \sum_{i=1}^{t} p_i) = 1 - \sum_{i=1}^{s+t} p_i$$

Setzen $p := p_1$. Einsetzen von

$s = 1, t = 1$ liefert $(1-p)^2 = (1 - p - p_2)$; $\quad p_2 = p(1-p)$.

$s = 1, t = 2$ liefert $(1-p)(1-p-p_2) = (1-p-p_2-p_3)$; $(1-p-p_2)(1-p-1) = -p_3$; $\quad$ also $p_3 = p(1-p)^2$ $\quad$ usw.

Geometrische Verteilung (5)

Qualitätskontrolle

Wahrscheinlichkeit, daß das i-te Item das erste defekte ist.

Time-sharing computer system

mit festen Zeitscheiben.

Programm wird in der Zeitscheibe vollständig abgearbeitet mit Wahrscheinlichkeit p

Wenn nicht, neuer Versuch in der neuen Zeitscheibe

X: # benötigten Zeitscheiben

$$X \sim Geo(p).$$

Geometrische Verteilung (6)

Repeat-Schleife
A: aussagenlogischer Ausdruck, $A = true$ mit Wahrscheinlichkeit p. `repeat S until` A.
$X = \#$ der Durchläufe von S: $\sim Geo(p)$.

6.4 Poisson-Verteilung

6.4 Poisson-Verteilung
Vorbemerkung, Definition Unabhängigkeit von Zufallsvariablen
Erinnerung: Unabhängigkeit von Ereignissen
Die Ereignisse A und B heißen unabhängig, falls

$$P(A, B) = P(A) \cdot P(B)$$

Def. 26 (Unabhängigkeit von Zufallsvariablen)
Zwei Zufallsvariablen X und Y heißen unabhängig, falls

$$\forall A, B \in \mathcal{B}; \quad P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B)$$

Poisson-Verteilung (2)
Sei $\{N_t\}_{t \in T}$ eine Menge von Zufallsvariablen (ein stochastischer Prozess) mit Werten in $\mathbb{N}$ und mit folgenden Eigenschaften:

V1: Zuwächse sind unabhängig, dh. die Zufallsvariablen

$N_{t+h} - N_t$ und $N_t - N_{t-h}$ sind unabhängig.

V2: es ist egal wo wir Zeitintervall betrachten, dh.

$N_{t+h} - N_t$ und $N_t - N_{t-h}$ haben dieselbe Verteilung

V3: Wahrscheinlichkeit, daß mindestens ein Ereignis in der Zeit h

eintritt, z.B. ein Kunde ankommt.

$p(h) = a \cdot h + o(h), \quad a > 0, h \to 0$

V4: Wahrscheinlichkeit für ≥ 2 Ereignisse in der Zeit h: $o(h)$

Poisson-Verteilung (3)
N_t: Anzahl der bis zum Zeitpunkt t eintretenden Ereignisse (z.B. eingetroffene Kunden, zerfallene Teilchen)

$$\begin{aligned} P_k(t) &:= P(N_t = k), \qquad P_k(t) := 0 \quad \text{für} \quad k < 0 \\ p(h) &:= \sum_{k=1}^{\infty} P_k(h) \qquad \geq 1 \text{Ereignis tritt ein} \\ 1 &= \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V3 &\Rightarrow \quad P_0(h) = 1 - p(h) = 1 - ah + o(h) \\ V4 &\Rightarrow \quad \sum_{k=2}^{\infty} P_k(h) = o(h), \qquad (h \to 0) \end{aligned}$$

Poisson-Verteilung (4)

1. Schritt: Bestimmen $P_0(t)$.

$$\begin{aligned}
P_0(t+h) &= P(N_t = 0, N_{t+h} - N_t = 0) \\
&= P_0(t)P(N_{t+h} - N_t = 0) \quad \text{wegen V1} \\
&= P_0(t)P(N_h - N_0 = 0) \quad \text{wegen V2} \\
&= P_0(t)P_0(h) \quad \text{wegen} \quad N_0 = 0 \\
&= P_0(t)(1 - p(h)) \\
&= P_0(t)(1 - ah + o(h)) \quad \text{wegen V4}
\end{aligned}$$

Poisson-Verteilung (5)

$$P_0(t+h) = P_0(t)(1 - ah + o(h))$$

Nacheinander folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} &= P_0(t)(-a + \frac{o(h)}{h}) \\
\lim_{h\to 0} \frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} &= \lim_{h\to 0} P_0(t)(-a + \frac{o(h)}{h}) \\
P_0'(t) &= -aP_0(t) \\
P_0(t) &= ce^{-at}
\end{aligned}$$

Wegen $P_0(0) = 1$ folgt: $c = 1$ und

$$P_0(t) = e^{-at}$$

Poisson-Verteilung (6)

2. Schritt: Bestimmen $P_k(t)$.

Zerlegen das Ereignis $\{N_{t+h} = k\}$ in disjunkte Teilereignisse.

$$\begin{aligned}
\{N_{t+h} = k\} = \; & \{N_t = 0, N_{t+h} - N_t = k\} \cup \\
& \{N_t = 1, N_{t+h} - N_t = k - 1\} \cup \\
& \{N_t = 2, N_{t+h} - N_t = k - 2\} \cup \ldots \cup \\
& \{N_t = k, N_{t+h} - N_t = 0\}
\end{aligned}$$

Poisson-Verteilung (7)

$$
\begin{aligned}
P_k(t+h) &= \sum_{j=0}^{k} P(N_t = k-j, N_{t+h} - N_t = j) \\
&= \sum_{j=0}^{k} P_{k-j}(t) \underbrace{P(N_{t+h} - N_t = j)}_{=P(N_h - N_0 = j)} \quad \text{wegen V1} \\
&= \sum_{j=0}^{k} P_{k-j}(t) P_j(h) \quad \text{wegen V2} \\
&= P_k(t)P_0(h) + P_{k-1}(t)P_1(h) + \sum_{j=2}^{k} P_{k-j}(t)P_j(h)
\end{aligned}
$$

Poisson-Verteilung (8)

$$
\begin{aligned}
P_1(h) &= \sum_{j=1}^{\infty} P_j(h) - \sum_{j=2}^{\infty} P_j(h) \\
&= p(h) + o(h) \\
&= ah + o(h)
\end{aligned}
$$

$$
\sum_{j=2}^{\infty} P_{k-j}(t)P_j(h) \leq \sum_{j=2}^{\infty} P_j(h) = o(h) \quad \text{wegen V2}
$$

Poisson-Verteilung (9)

Nacheinander folgt:

$$
\begin{aligned}
P_k(t+h) - P_k(t) &= (P_0(h) - 1)P_k(t) + P_{k-1}(t)P_1(h) \\
&\quad + o(h) \\
&= -ahP_k(t) + ahP_{k-1}(t) + o(h) \\
\frac{P_k(t+h) - P_k(t)}{h} &= -aP_k(t) + aP_{k-1}(t) + \frac{o(h)}{h}
\end{aligned}
$$

$$
P_k'(t) = -aP_k(t) + aP_{k-1}(t), \quad P_k(0) = 0
$$

Poisson-Verteilung (10)

$$
\begin{aligned}
Q_k(t) &:= P_k(t)e^{at} \\
Q_k'(t) &= P_k'(t)e^{at} + P_k(t)ae^{at} \\
Q_k'(t) &= e^{at}(\underbrace{-aP_k(t) + aP_{k-1}(t)}_{P_k'(t)} + aP_k(t)) \\
&= aQ_{k-1}(t) \\
Q_1'(t) &= aQ_0(t) = ae^{-at}e^{at} = a \Rightarrow Q_1(t) = at \\
Q_2'(t) &= aQ_1(t) = a^2 t \Rightarrow Q_2(t) = \frac{a^2t^2}{2}
\end{aligned}
$$

Durch vollständige Induktion:

$$
Q_k(t) = \frac{a^k t^k}{k!} \qquad P_k(t) = \frac{a^k t^k}{k!} e^{-at}
$$

Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda = at$.

6.5 Negative Binomialverteilung

Def. 27 (Negative Binomialverteilung)
Eine Zufallsvariable X mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P(X = m + k) = \binom{m+k-1}{m-1} p^m (1-p)^k$$

heißt negativ Binomialverteilt mit Parametern (m, p)

Qualitätskontrolle
Prüfen solange bis wir m defekte Stücke entdecken. Wenn $m + k$ "klein" $\rightarrow$ Los ablehnen Wenn $m + k$ "groß" $\rightarrow$ Los annehmen (hier kann die Prüfung evtl. vorzeitig abgebrochen werden.)

Negative Binomialverteilung (2)
Diese Verteilung entsteht auch, wenn man Poisson-Verteilung mit einer Gamma-Verteilung mischt.
Deshalb wird sie verwendet, wenn sich Zähldaten aus verschiedenen Quellen zusammensetzen (und Poisson nicht geeignet scheint).

File-Dokumentenserver
Die Gesamt-Anzahl der Zugriffe auf ein bestimmtes Dokument setzt sich aus Teil-Anzahlen von vielfältigen Zugriffen aus verschiedenartigen Quellen zusammen.

Bem: In den Wahrscheinlichkeiten können Parameter auftreten, die in der Regel unbekannt sind.

Die Parameter sind anhand der Beobachtungen (der Daten) zu bestimmen/zu <u>schätzen</u>! $\longrightarrow$ Aufgabe der Statistik

7 Charakteristika von Verteilungsfunktionen

7.1 Der Erwartungswert

7. Charakteristika von Verteilungsfunktionen

Eine Münze wird 3 mal geworfen.
Wie oft können wir erwarten, daß Blatt oben liegt? Wie oft wird im Mittel Blatt oben liegen?

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{pmatrix}$$

Erwartungswert: $0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = 1.5$
D.h. bei 10maliger Durchführung des Experiments können wir im Mittel mit 15mal Blatt rechnen.

7.1 Der Erwartungswert
Sei X diskrete Zufallsvariable,

$$X: \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

Def. 28 (Erwartungswert, X diskret)
Die reele Zahl

$$\mathbf{E}X = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i$$

heißt <u>Erwartungswert</u> von X

Der Erwartungswert, Beispiele (1)

a) $X \sim Poisson(\lambda)$

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & ... \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & ... \end{pmatrix}$$

$$p_i = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$$

$$\mathbf{E}X = \sum_{i=0}^{\infty} p_i i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \cdot i = \lambda \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}}_{e^{\lambda}} e^{-\lambda} = \lambda.$$

z.B. mittlere Ankunftsrate.

Der Erwartungswert, Beispiele (2)

b) $X \sim B(n, p)$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \\ &= p \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\ &= p \cdot n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\ &= p \cdot n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^i (1-p)^{n-1-i}, \qquad k = i+1 \\ &= n \cdot p. \end{aligned}$$

Der Erwartungswert, Beispiele (3)

c) $X \sim Geo(p)$

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & k & ... \\ p & pq & pq^2 & ... & pq^{k-1} & ... \end{pmatrix} \qquad q = 1-p$$

$$\mathbf{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} x_k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

Beweis des vorletzten Gleichheitszeichens:

a) durch vollständige Induktion

b) Differenzieren der geometrischen Reihe

Erwartungswert

Def. 29 (Erwartungswert, X stetig)

Sei X stetig mit Dichtefunktion $f(x)$. Die reele Zahl

$$\mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

heißt Erwartungswert von X.

Der Erwartungswert, Beispiele (4)

a) $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}X &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-(\frac{x-\mu}{\sigma})^2/2} dx \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\sigma t + \mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt \\ &= \mu + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma \cdot t \cdot e^{\frac{-t^2}{2}} dt = \mu.\end{aligned}$$

$\frac{x-\mu}{\sigma} = t, \quad dt = \frac{1}{\sigma} dx$

Der Erwartungswert, Beispiele (5)

b) $X \sim Exp(\lambda), \qquad \lambda > 0$

$$\mathbf{E}X = \int\limits_{0}^{\infty} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \, dx = \frac{1}{\lambda}$$

Der Erwartungswert, Beispiele (6)

c) $X \sim R(a, b)$*, gleichverteilt auf dem Intervall (a,b)*

$$\begin{aligned}\mathbf{E}X &= \frac{1}{b-a} \int\limits_{a}^{b} x \, dx = \frac{1}{b-a} \left. \frac{x^2}{2} \right|_a^b \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.\end{aligned}$$

Bemerkung: Die Erwartungswerte sind für stetige und diskrete Zufallsgrößen zweckmäßigerweise unterschiedlich definiert. Sie lässt sich jedoch (maßtheoretisch) vereinheitlichen.

Eigenschaften des Erwartungswertes
Satz

Seien X, X_1 und X_2 zufällige Variablen und $a, b, c \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gelten folgende Aussagen:

1. Wenn $P(X = c) = 1$, d.h. nimmt die zufällige Variable X genau einen festen Wert an, so folgt $\mathbf{E}X = \mathbf{E}c = c$.

2. Wenn $P(X \geq c) = 1$, so $\mathbf{E}X \geq c$.

3. $\mathbf{E}(c \cdot X) = c \cdot \mathbf{E}X$.

4. $\mathbf{E}(X + c) = \mathbf{E}X + \mathbf{E}c = \mathbf{E}X + c$.

5. $\mathbf{E}(a \cdot X_1 + b \cdot X_2) = a \cdot \mathbf{E}X_1 + b \cdot \mathbf{E}X_2$.

Eigenschaften des Erwartungswertes

Beweis des Satzes

Beweis: Wir beweisen stellvertretend Aussage 2.

- Es sei X eine diskrete Zufallsgröße,

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

  Nach Voraussetzung: $c = x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$. Daraus folgt:

$$\mathbf{E}X = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i \cdot p_i \geq \sum_{i \in \mathbb{N}} c \cdot p_i = c \cdot \sum_{i \in \mathbb{N}} p_i = c.$$

□

Eigenschaften des Erwartungswertes

Beweis des Satzes (Fortsetzung)

- Es sei X eine stetige zufällige Variable mit der Dichtefunktion f. Dann gilt:

$$P(X \geq c) = \int_c^{+\infty} f(x)\,dx = 1. \quad \Rightarrow$$

$$P(X < c) = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx = 0. \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_c^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx \geq c \cdot \underbrace{\int_c^{+\infty} f(x)\,dx}_{=1} = c$$

Eigenschaften des Erwartungswertes

Ergänzungen

- Aus Aussage 4 folgt:

$$\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X) = \mathbf{E}X - \mathbf{E}(\mathbf{E}X) = 0.$$

- Aussage 5 besagt, daß der Erwartungswert eine linearer Operator ist.

Erwartungswert von Funktionen von Zufallsvariablen
Frage: Wie berechnen wir $\mathbf{E}(g(X))$?

X **diskret** Dann ist $Y = g(X)$ gegeben durch

$$Y : \begin{pmatrix} g(x_1) & g(x_2) & \dots \\ p_1 & p_2 & \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}(g(X)) = \sum_{i=0}^{\infty} g(x_i) p_i$$

X **stetig** 1. Variante: Dichte f_Y von $Y = g(X)$ ausrechnen. Wie man das macht, sehen wir später. Dann $\mathbf{E}(Y) = \int y\, f_Y(y)\,dy$.

Erwartungswert von Funktionen von Zufallsvariablen (2)

2. Variante: Satz (Regel des Faulen Statistikers)
Seien X und $Y = g(X)$ Zufallsgrößen. Dann gilt:

$$\mathbf{E}(g(X)) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} g(x_i)p_i, & \text{falls X diskret} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,dx, & \text{falls X stetig} \end{cases}$$

vorausgesetzt die Erwartungswerte existieren.

Erwartungswert von Funktionen von Zufallsvariablen (3)
Intuitive Erläuterung: Spiel
wobei wir X zufällig ziehen. Dann zahle ich den 'Gewinn' $Y = g(X)$. Ihr erwartetes Einkommen ist

$$\sum_x g(x)P(X = x) \quad \text{bzw.} \quad \int g(x)f(x)\,dx.$$

Spezialfall: $g(x) = I_A(x)$ **Indikatorfunktion eines Ereignisses** A

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(I_A(X)) &= \int I_A(x)f_X(x)\,dx = \int_A f_X(x)\,dx \\ &= P(X \in A) = P(A). \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit ist ein Speziallfall eines Erwartungswertes!

Regel des Faulen Statistikers
Beispiele (1)

Sei $X \sim R(0,1)$ und $Y = g(X) = e^X$. Dann

$$\mathbf{E}(Y) = \int_0^1 e^x f(x)\,dx = \int_0^1 e^x\,dx = e - 1.$$

Regel des Faulen Statistikers
Beispiele (2)

Stab der Länge 1 zufällig brechen
Sei Y die Länge des längeren Stücks. Gesucht ist die erwartete Länge $\mathbf{E}(Y)$.
Wenn X der zufälllige Bruchpunkt ist, dann $X \sim R(0,1)$ und $Y = g(X) = \max(X, 1-X)$. D.h.

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{falls} \quad 0 < x < 0.5 \\ x & \text{falls} \quad 0.5 < x < 1 \end{cases}$$

$$\mathbf{E}(Y) = \int_0^1 g(x)f(x)\,dx = \int_0^{0.5} (1-x)\,dx + \int_{0.5}^1 x\,dx = \frac{3}{4}.$$

Regel des Faulen Statistikers
Beweis (1)
Wir zeigen die letzte Behauptung unter der Annahme g: $R \to R$ differenzierbar, $g'(x) \neq 0 \quad \forall x$. Wir wollen o.B.d.A. annehmen, dass die Zufallsvariablen X und $g(X)$ auf $(-\infty, \infty)$ definiert sind. Nach der Definition des Erwartungswertes gilt:

$$\mathbf{E}(g(X)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y \cdot h(y)\,dy,$$

wobei $h(y)$ die Dichte von $Y = g(X)$ ist.

Regel des Faulen Statistikers

Beweis (2)

Wir bestimmen jetzt $h(y)$: 1. Fall: Sei g monoton wachsend.

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= F_{g(X)}(t) = \\ P(g(X) < t) &= P(X < g^{-1}(t)) = \int_{-\infty}^{g^{-1}(t)} f(x)\,dx \end{aligned}$$

Substitution: $g(x) = y, \quad g'(x)dx = dy.$

$$F_{g(X)}(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{f(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y))} dy$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y))} = h(y) \qquad \text{ist Dichte von} \quad g(X)$$

Regel des Faulen Statistikers

Beweis (3)

2. Fall: Sei g monoton fallend.

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= F_{g(X)}(t) = \\ P(g(X) < t) &= P(X > g^{-1}(t)) = \int_{g^{-1}(t)}^{\infty} f(x)\,dx \end{aligned}$$

Substitution: $g(x) = y, \quad g'(x)dx = dy, \quad g(\infty) = -\infty$

Regel des Faulen Statistikers

Beweis (4)

$$\begin{aligned} F_{g(X)}(t) &= \int_{t}^{-\infty} \frac{f(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y)} dy = -\int_{t}^{-\infty} \frac{f(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y)|} dy \\ &= \int_{-\infty}^{t} \frac{f(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y)|} dy \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y))|} = h(y) \qquad \text{ist Dichte von} \quad g(X)$$

Regel des Faulen Statistikers

Beweis (5)

$$\Rightarrow \mathbf{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot h(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot \frac{f(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y))|} dy$$

Substitution: $y = g(x), dy = g'(x)dx$

$$\mathbf{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx.$$

Regel des Faulen Statistikers

Beispiele (Fortsetzung). Verwenden die Dichte von $g(X)$.

Fortsetzung von Bsp. $X \sim \mathbf{R}(0,1)$, $Y = g(X) = e^X$

$$g(x) = e^x, \quad g'(x) = e^x, \quad g^{-1}(y) = \ln y$$

Also

$$h(y) = \frac{f(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y))} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}, \quad 1 \le y \le e.$$

$$\mathbf{E}(Y) = \int_1^e y \cdot h(y)\,dy = \int_1^e y \cdot \frac{1}{y}\,dy = \int_1^e 1\,dy = e - 1$$

dasselbe Resultat wie mit der Regel des Faulen Statistikers.

Regel des Faulen Statistikers

Beispiele (Fortsetzung von Bsp. Gebrochener Stab)

Es war $X \sim \mathbf{R}(0,1)$, $Y = g(X) = \max(X, 1-X)$.

$g(x) = \max(x, 1-x)$ ist stückweise differenzierbar.

$$g'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0.5 \\ -1, & x < 0.5. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g^{-1}(y) &= \{y, 1-y\} \\ g'(g^{-1}(y)) &= \{1, -1\} \end{aligned}$$

$$h(y) = \frac{f(y) + f(1-y))}{|g'(g^{-1}(y))|} = \frac{1+1}{1} = 2, \quad y \in (0.5, 1)$$

$$\mathbf{E}(Y) = \int_{0.5}^1 y \cdot h(y)\,dy = \int_{0.5}^1 y \cdot 2\,dy = 2 \cdot \frac{1}{2} y^2|_{0.5}^1 = \frac{3}{4}$$

Also wieder dasselbe Resultat wie mit der Regel des Faulen Statistikers.

7.2 Moment und Varianz

7.2 Moment und Varianz

Es sei X eine zufällige Variable.

Def. 30 (Moment und Zentrales Moment)

Falls $\mathbf{E}(|X|^p) < \infty$, heißt der Erwartungswert $\mathbf{E}X^p$ p–tes Moment

$$\mathbf{E}X^p = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^p \cdot f(x)\,dx, & \text{falls } X \text{ stetig ist} \\ \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} x_i^p \cdot p_i, & \text{falls } X \text{ diskret ist} \end{cases}$$

$\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^p$ heißt p–tes zentrales Moment.

Varianz und Standardabweichung

Def. 31 (Varianz), bez. $\operatorname{Var} X$ **oder** σ_X^2

Das zweite zentrale Moment $\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2$ nennen wir auch Streuung oder Varianz der Zufallsgröße X.

Def. 32 (Standardabweichung), σ, σ_X

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}$$

Bem.: $\operatorname{Var}(X)$: mittlere quadratische Abweichung zwischen X und EX.

Varianz

Satz (Eigenschaften der Varianz):

1. Sei $c \in \mathbb{R}$. Wenn $P(X = c) = 1$, so $\operatorname{Var} X = 0$. Ist umgekehrt $\operatorname{Var} X = 0$, so existiert ein $c \in \mathbb{R}$, so daß gilt: $P(X = c) = 1$.
2. Für beliebige $c \in \mathbb{R}$ gilt: $\operatorname{Var}(X + c) = \operatorname{Var} X$.
3. Für beliebige $a \in \mathbb{R}$ gilt: $\operatorname{Var}(a \cdot X) = a^2 \cdot \operatorname{Var} X$.
4. Für zwei zufällige Variablen X_1 und X_2 gilt: $\operatorname{Var}(X_1 + X_2) = \operatorname{Var} X_1 + \operatorname{Var} X_2 + 2 \cdot \operatorname{cov}(X_1, X_2)$.

Eigenschaften der Varianz

Beweis (1)

Es seien X, X_1 und X_2 beliebige zufällige Variablen. $a, c \in \mathbb{R}$ seien ebenfalls beliebig gewählt. Die folgenden Aussagen folgen aus dem Satz über die Eigenschaften des Erwartungswertes.

1. Es gelte: $P(X = c) = 1$. Daraus folgt $\mathbf{E}X = c$.

$$\operatorname{Var} X = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2 = \mathbf{E}(X - c)^2 = \mathbf{E}(c - c)^2 = 0$$

Es sei nun $\operatorname{Var} X = 0 = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2 = 0$. Allgemein gilt für $c \in \mathbb{R}$: $\mathbf{E}(X - c)^2 \geq 0$. Also, $P(X - EX = 0) = 1$. und $c := \mathbf{E}X$ leistet das Verlangte.

Eigenschaften der Varianz

Beweis (2)

2.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(X + c) &= \mathbf{E}(X + c - \mathbf{E}(X + c))^2 \\
&= \mathbf{E}(X + c - \mathbf{E}X - \mathbf{E}c)^2 \\
&= \mathbf{E}(X + c - \mathbf{E}X - c)^2 \\
&= \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2 = \operatorname{Var} X
\end{aligned}$$

Eigenschaften der Varianz

Beweis (3)

3.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(a \cdot X) &= \mathbf{E}(a \cdot X - \mathbf{E}(a \cdot X))^2 \\
&= \mathbf{E}(a \cdot X - a \cdot \mathbf{E}X)^2 \\
&= \mathbf{E}(a \cdot (X - \mathbf{E}X))^2 \\
&= \mathbf{E}\left(a^2 \cdot (X - \mathbf{E}X)^2\right) \\
&= a^2 \cdot \mathbf{E}(X - EX)^2 \\
&= a^2 \cdot \operatorname{Var} X
\end{aligned}$$

Eigenschaften der Varianz
Beweis (4)

4.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(X_1+X_2) &= \mathbf{E}(X_1+X_2-\mathbf{E}(X_1+X_2))^2\\
&= \mathbf{E}(X_1+X_2-\mathbf{E}X_1-\mathbf{E}X_2)^2\\
&= \mathbf{E}((X_1-\mathbf{E}X_1)+(X_2-\mathbf{E}X_2))^2\\
&= \mathbf{E}((X_1-\mathbf{E}X_1)^2+(X_2-\mathbf{E}X_2)^2\\
&\quad +2\cdot(X_1-\mathbf{E}X_1)\cdot(X_2-\mathbf{E}X_2))\\
&= \mathbf{E}(X_1-\mathbf{E}X_1)^2+\mathbf{E}(X_2-\mathbf{E}X_2)^2\\
&\quad +2\cdot\underbrace{\mathbf{E}((X_1-\mathbf{E}X_1)\cdot(X_2-\mathbf{E}X_2))}
\end{aligned}$$

Kovarianz und Unabhängigkeit

Def. 33 Kovarianz der zufälligen Variablen X_1 und X_2

$$\operatorname{cov}(X_1,X_2) := \mathbf{E}((X_1-\mathbf{E}X_1)\cdot(X_2-\mathbf{E}X_2))$$

$\operatorname{cov}(X_1,X_2) =$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{E}\big((X_1-\mathbf{E}X_1)\cdot(X_2-\mathbf{E}X_2)\big)\\
&= \mathbf{E}(X_1\cdot X_2-X_1\cdot\mathbf{E}X_2-X_2\cdot\mathbf{E}X_1+\mathbf{E}X_1\cdot\mathbf{E}X_2)\\
&= \mathbf{E}(X_1\cdot X_2)-\mathbf{E}(X_1\cdot\mathbf{E}X_2)-\mathbf{E}(X_2\cdot\mathbf{E}X_1)+\mathbf{E}X_1\cdot\mathbf{E}X_2\\
&= \mathbf{E}(X_1\cdot X_2)-\mathbf{E}X_1\cdot\mathbf{E}X_2
\end{aligned}$$

Kovarianz und Unabhängigkeit
Erinnerung:

Def. 34 Unabhängigkeit

Zwei Zufallsvariablen X_1 und X_2 heißen unabhängig, falls für alle $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ gilt:

$$P(X_1 < x_1, X_2 < x_2) = P(X_1 < x_1)\cdot P(X_2 < x_2)$$

Lemma

Es seien X_1 und X_2 zwei unabhängige Zufallsgrößen. Dann gilt:

$$\operatorname{cov}(X_1,X_2) = 0.$$

Def. 35 Zwei Zufallsvariablen X_1 und X_2 heißen unkorreliert

falls $\operatorname{cov}(X_1,X_2) = 0$.

Kovarianz und Unabhängigkeit

Beweis des Lemmas (1)

Beweis: Wir betrachten den zufälligen Vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ und betrachten nur den Fall, dass die beiden Zufallsgrößen X_1 und X_2 stetig sind. Für den diskreten Fall verfährt man analog. Es sei $f(x_1, x_2)$ die Dichtefunktion des zufälligen Vektors $\mathbf{X}$.

Wir definieren eine Funktion $g \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ durch:

$$g(X_1, X_2) := (X_1 - \mathbf{E}X_1) \cdot (X_2 - \mathbf{E}X_2).$$

Offenbar,

$$\operatorname{cov}(X_1, X_2) = \mathbf{E}g(X_1, X_2).$$

Kovarianz und Unabhängigkeit

Beweis des Lemmas (2)

Außerdem ist:

$$\mathbf{E}g(X_1, X_2) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} (x_1 - \mathbf{E}X_1) \cdot (x_2 - \mathbf{E}X_2) \cdot f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2.$$

Nach Voraussetzung sind die zufälligen Variablen X_1 und X_2 unabhängig, also

$$f(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2).$$

(das folgt unmittelbar durch zweimaliges Differenzieren, nach x_1 und nach x_2, der Gleichung $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)$)

Somit gilt dann:

Kovarianz und Unabhängigkeit

Beweis des Lemmas (3)

$\operatorname{cov}(X_1, X_2) =$

$$\begin{aligned}
&= \int\limits_{\mathbb{R}^2} (x_1 - \mathbf{E}X_1) \cdot (x_2 - \mathbf{E}X_2) \cdot f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2)\, dx_1\, dx_2 \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} (x_1 - \mathbf{E}X_1) \cdot f_{X_1}(x_1)\, dx_1 \cdot \int\limits_{\mathbb{R}} (x_2 - \mathbf{E}X_2) \cdot f_{X_2}(x_2)\, dx_2 \\
&= \mathbf{E}(X_1 - \mathbf{E}X_1) \cdot \mathbf{E}(X_2 - \mathbf{E}X_2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Korrelation und Unabhängigkeit

Die Umkehrung der Aussage des Lemmas gilt im allgemeinen nicht, wie das folgende Beispiel zeigt:

Es sei $X_1 \sim R(0, \pi)$

$$f_{X_1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{, falls } 0 \le x < \pi \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}.$$

Die Zufallsgröße X_2 definieren wir durch $X_2 = \sin X_1$. Offenbar, X_1 und X_2 sind streng abhängig. Wir berechnen die Kovarianz.

Korrelation und Unabhängigkeit

Beispiel (Fortsetzung, 1)

Nun gilt für die Erwartungswerte $\mathbf{E}X_1$ und $\mathbf{E}X_2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X_1 &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{X_1}(x)\,dx = \int\limits_0^\pi x \cdot \frac{1}{\pi}\,dx \\ &= \tfrac{1}{\pi} \cdot \left[\tfrac{x^2}{2}\right]_0^\pi = \tfrac{1}{\pi} \cdot \tfrac{\pi^2}{2} = \tfrac{\pi}{2} \\ \mathbf{E}X_2 &= \mathbf{E}(\sin X_1) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x \cdot f_{X_1}(x)\,dx \\ &= \int\limits_0^\pi \sin x \cdot \tfrac{1}{\pi}\,dx = \tfrac{1}{\pi} \cdot [-\cos x]_0^\pi = \tfrac{2}{\pi} \end{aligned}$$

Korrelation und Unabhängigkeit

Beispiel (Fortsetzung, 2)

Für den Erwartungswert $\mathbf{E}(X_1 \cdot X_2)$ gilt nach der Regel des Faulen Statistikers

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X_1 \cdot X_2) &= \mathbf{E}(X_1 \cdot \sin X_1) = \int\limits_0^\pi x \cdot \sin x \cdot \tfrac{1}{\pi}\,dx \\ &= \left[-\tfrac{1}{\pi} \cdot x \cdot \cos x\right]_0^\pi + \tfrac{1}{\pi} \cdot \underbrace{\int\limits_0^\pi \cos x\,dx}_{=0} \\ &= -\tfrac{1}{\pi} \cdot (-1)\pi - 0 = 1 \end{aligned}$$

Wir setzen alle diese Werte in die Ausgangsgleichung ein und erhalten:

Korrelation und Unabhängigkeit

Beispiel (Fortsetzung, 3)

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(X_1, X_2) &= \mathbf{E}(X_1 \cdot X_2) - \mathbf{E}X_1 \cdot \mathbf{E}X_2 \\ &= 1 - \tfrac{\pi}{2} \cdot \tfrac{2}{\pi} = 0 \end{aligned}$$

Trotz der Abhängigkeit der beiden Zufallsgrößen X_1 und X_2 ist ihre Kovarianz gleich Null.

Folgerung

Falls zwei zufällige Variablen X_1 und X_2 unabhängig sind, gilt für die Varianz ihrer Summe:

$$\operatorname{Var}(X_1 + X_2) = \operatorname{Var}(X_1) + \operatorname{Var}(X_2).$$

Varianz, Beispiele (1)

a) Poisson-Verteilung, $X \sim Poi(\lambda)$

$$p_i = P(X = i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\,(X) &= \mathbf{E}(X-\mathbf{E}X)^2 = \sum_{i=0}^{\infty}(i-\lambda)^2 p_i \\
&= \sum_{i=2}^{\infty} i\cdot(i-1)p_i + \sum_{i=0}^{\infty} ip_i - 2\lambda\sum_{i=0}^{\infty} ip_i + \lambda^2\sum_{i=0}^{\infty} p_i \\
&= \lambda^2\sum_{i=2}^{\infty}\frac{\lambda^{i-2}}{(i-2)!}e^{-\lambda} + \lambda - 2\lambda^2 + \lambda^2 = \lambda.
\end{aligned}$$

Varianz, Beispiele (2)

b) Binomialverteilung, $X \sim B(n,p)$.

$$\mathrm{Var}\,(X) = np(1-p).$$

(ohne Beweis, ÜA)

Varianz, Beispiele (3)

c) Gleichverteilung auf (a,b), $X \sim R(a,b)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in (a,b) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\mathbf{E}X = \frac{a+b}{2}.$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X^2 &= \int_a^b x^2\frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_a^b \cdot \frac{1}{b-a} \\
&= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}. \\
\mathrm{Var}\,(X) &= \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 \\
&= \frac{1}{12}(4a^2+4ab+4b^2-3a^2-6ab-3b^2) \\
&= \frac{1}{12}(a^2-2ab+b^2) = \frac{(b-a)^2}{12}.
\end{aligned}$$

Varianz, Beispiele (4)

d) Exponentialverteilung

$$\begin{aligned}
f(x) &= \begin{cases} \lambda e^{-\lambda\cdot x} & \text{falls } x \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \\
\mathbf{E}X &= \frac{1}{\lambda}. \\
\mathbf{E}X^2 &= \int_0^{\infty} x^2\lambda e^{-\lambda\cdot x}\,dx = \frac{2}{\lambda^2} \quad \text{(ÜA)}. \\
\mathrm{Var}\,(X) &= \frac{1}{\lambda^2}.
\end{aligned}$$

Varianz, Beispiele (5a)

e) Normalverteilung

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} \\
\mathbf{E}(X-\mu)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}\, dx \\
&= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \\
&= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} (-t)(-t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}})\, dt
\end{aligned}$$

Varianz, Beispiele (5b)

e) Normalverteilung

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \big(-te^{-t^2/2}\big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} (-1) e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt\big) \\
&= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \\
&= \sigma^2.
\end{aligned}$$

$$t = \tfrac{x-\mu}{\sigma}, \qquad \sigma\, dt = dx$$

Bei Normalverteilung sind also die Parameter μ und σ^2 Erwartungswert und Varianz.

7.3 Schiefe und Exzess

7.3 Schiefe und Exzess

Angenommen, das 4. Moment existiert.

Def. 36 (Schiefe und Kurtosis)

$$\begin{aligned}
\sigma_X &= \sqrt{Var(X)} \quad \text{(Standardabweichung)} \\
\text{Schiefe} \quad \gamma_1 &= \frac{\mathbf{E}(X-\mathbf{E}X)^3}{(\mathrm{Var}X)^{3/2}} \\
\text{Kurtosis} \quad \gamma_2 &= \frac{\mathbf{E}(X-\mathbf{E}X)^4}{(\mathrm{Var}X)^2}
\end{aligned}$$

Exzess: $\gamma_2 - 3$.

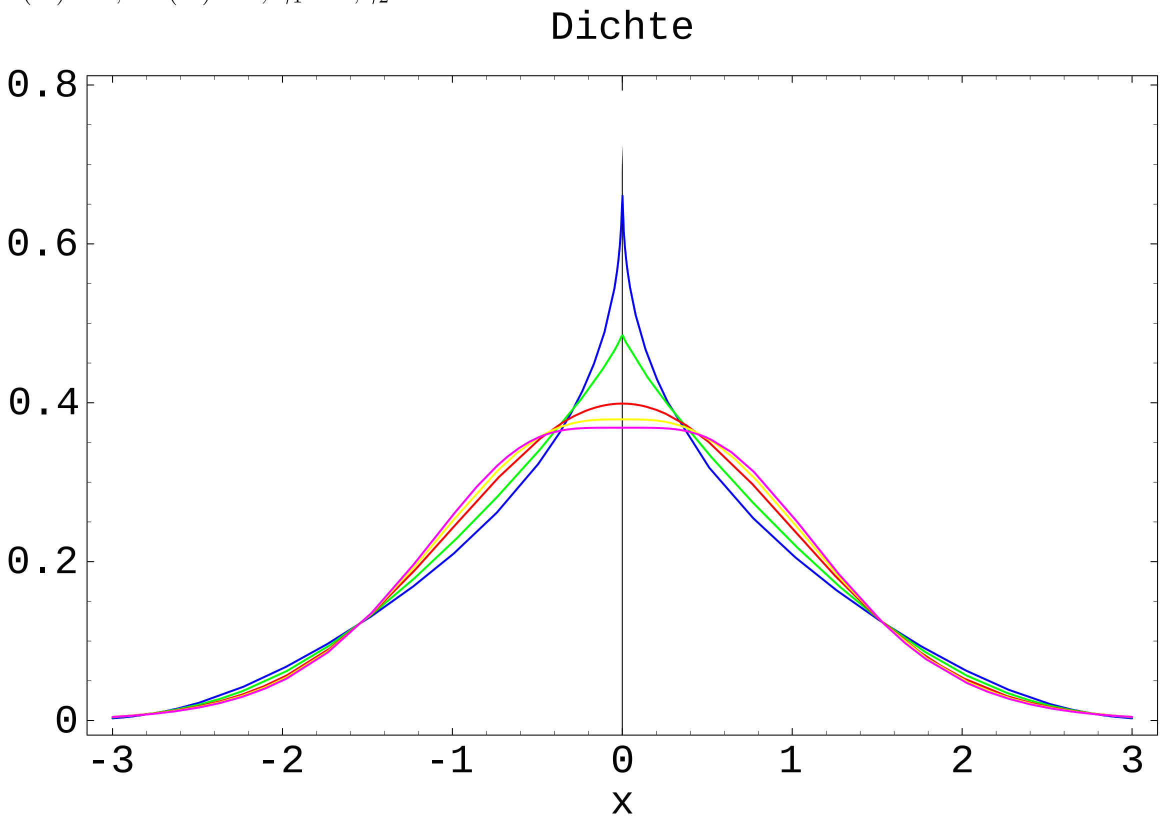
Schiefe und Exzess, Versuch einer Klassifikation

$\gamma_1 > 0$: rechtsschiefe Verteilung
$\gamma_1 = 0$: symmetrische Verteilung
$\gamma_1 < 0$: linksschiefe Verteilung
$\gamma_2 > 3$: starke Tails
$\gamma_2 = 3$: Wölbung wie bei NV
$\gamma_2 < 3$: schwache Tails

Bem.: Diese Klassifikation ist recht vage. Es gibt mehrere Verteilungen mit gleichem Erwartungswert, gleicher Varianz, gleicher Schiefe und gleicher Kurtosis, die aber recht unterschiedlich aussehen.

Schiefe und Exess

$\mathbf{E}(X) = 0, var(X) = 1,\ \gamma_1 = 0, \gamma_2 = 3$



7.4 Charakteristische Funktionen

Charakteristische Funktionen werden wir brauchen um einen wichtigen Satz, den Zentralen Grenzwertsatz (siehe unten), zu beweisen.
Sei X Zufallsvariable mit Dichtefunktion f_X (falls X stetig) oder Wkt.funktion p_j (falls X diskret).

Def. 37 (charakteristische Funktion von X)

$$\phi_X(t) := \mathbf{E}e^{itX} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x)\,dx & \text{falls } X \text{ stetig} \\ \sum_{j=1}^{\infty} e^{itx_j} p_j & \text{falls } X \text{ diskret} \end{cases}$$

Bem.: Die Funktion ϕ_X ist (bis auf den Faktor $\sqrt{2\pi}$) die Fourier-Transformierte von f_X.
Bem.: Die charakterische Funktion existiert.

Charakteristische Funktionen
Satz (Eigenschaften)

(i) $\phi_X(t)$ ist in $-\infty < t < \infty$ gleichmäßig stetig.

$$\begin{aligned} |\phi_X(t)| &\leq 1 \qquad \phi_X(0) = 1 \\ \phi_X(-t) &= \overline{\phi_X(t)} \end{aligned}$$

(ii) Die Zufallsvariable $Y = aX + b$ hat die charakteristische Funktion

$$\phi_Y(t) = \phi_X(at)e^{ibt}$$

(iii) $\phi_X(t)$ ist reellwertig $\Leftrightarrow$ X bzgl. $x = 0$ symmetrisch ist.

Beweis: ÜA, Eigenschaften der Fkt. e^{it}. □

Charakteristische Funktionen

Satz (Multiplikationssatz)
Seien die Zufallsvariablen X_1 und X_2 unabhängig mit den charakteristischen Funktionen ϕ_1 und ϕ_2. Dann hat die Zufallsvariable $X_1 + X_2$ die charakteristische Funktion $\phi_1 \cdot \phi_2$.

Beweis: Es gilt:

$$\phi_{X_1+X_2}(t) = \mathbf{E}e^{it(X_1+X_2)} = \mathbf{E}e^{itX_1} \cdot \mathbf{E}e^{itX_2} = \phi_1(t) \cdot \phi_2(t)$$

□

Charakteristische Funktionen

Satz (Eindeutigkeitssatz)
Die Beziehung $F_X \Leftrightarrow \phi_X$ ist eineindeutig. Für X stetig gilt:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \phi_X(t)\,dt$$

Für X diskret gilt:

$$p_j = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} e^{-itx_j} \phi_X(t)\,dt$$

Beweis: siehe z.B. Günther, Grundkurs Analysis, Teil 3. □

Charakteristische Funktionen

Satz (Konvergenzsatz)
Seien X_n Zufallsvariablen mit $X_n \sim F_n$. Dann gilt

$$F_n \to F \quad \Leftrightarrow \quad \phi_n \to \phi, \quad \phi \quad \text{stetig in} \quad t = 0.$$

Charakteristische Funktionen
Wozu brauchen wir sie?

Zum Beweis des Zentralen Grenzwertsatzes:
Die Summe von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsgrößen ist (oft) asymptotisch normalverteilt (siehe Abschnitt Grenzwertsätze).

- 1. charakteristische Funktion der Summe (Multiplikationssatz)
- 2. diese konvergiert gegen charakteristische Funktion der Normalverteilung (s. unten)
- 3. Konvergenz der Summe folgt aus dem Konvergenzsatz

Charakteristische Funktionen

Satz (Erzeugung der Momente)
Sei $\mathbf{E}X^k < \infty$. Dann gilt:

$$\alpha_k := \mathbf{E}X^k = \frac{1}{i^k}\phi_X^{(k)}(0)$$

Beweis: Vertauschen von Integration und Differentiation. □
Die charakteristische Funktion hat also die Taylor-Entwicklung

$$\phi_X(t) = \mathbf{E}e^{itX} = \mathbf{E}\big(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(it)^j}{j!} X^j\big) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \frac{(it)^j}{j!} + o(t^k), \quad t \to 0.$$

Charakteristische Funktionen

$X \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}e^{itX} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2-2itx+(it)^2-(it)^2}{2}}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}}\, dx \qquad z = x - it \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty+it}^{\infty+it} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = e^{-\frac{t^2}{2}}.
\end{aligned}$$

$Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$:

$$\mathbf{E}e^{itY} = \mathbf{E}e^{it(\sigma X+\mu)} = e^{it\mu}\phi_X(\sigma t)$$

8 Die Exponentialverteilung

8.1 Einführung

Def. 38 (Exponentialverteilung), $X \sim EX(\lambda)$
Sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $[0, \infty)$. Sie heißt exponentialverteilt mit dem Parameter λ, $\lambda > 0$, falls die Verteilungsfunktion beschrieben wird durch

$$F(t) = P(X < t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{falls} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Dichte der Exponentialverteilung ist

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{falls} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Exponentialverteilung
Erwartungswert

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X &= \int_0^\infty x \cdot f(x)\,dx = \int_0^\infty \underset{u}{x} \cdot \underset{v'}{\lambda e^{-\lambda x}}\,dx \\ &= \underset{u}{x} \cdot \underset{v}{(-e^{-\lambda x})}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \underset{u'}{1} \cdot \underset{v}{(-e^{-\lambda x})}\,dx \\ &= 0 + \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,dx = \frac{-1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Die Exponentialverteilung
Varianz, Schiefe, Exzess

$$\begin{aligned} \text{Var}X &= \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \\ \sigma_X &= \frac{1}{\lambda} \quad \text{(Standardabweichung)} \\ \text{Schiefe} &= \frac{\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^3}{(\text{Var}X)^{3/2}} = 2 \\ \text{Kurtosis} &= \frac{\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^4}{(\text{Var}X)^2} = 9 \end{aligned}$$

Die Exponentialverteilung
Beispiel

Die zufällige Wartezeit eines Kunden
am Schalter sei exponentialverteilt mit einem Erwartungswert von 10 min.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie mindestens 15 min. warten müssen?

X: zufällige Wartezeit eines Kunden am Schalter, $X \sim Exp(\lambda)$, $\lambda = \frac{1}{10}$. Frage: $P(X > 15)$?

$$\begin{aligned} P(X > 15) &= e^{-15\lambda} \\ &= e^{-1.5} \approx 0.220. \end{aligned}$$

8.2 Gedächtnislosigkeit

Def. 39 (Gedächtnislosigkeit)
Eine Verteilung P (mit Verteilungsfunktion F) heißt gedächtnislos, wenn für alle $s, t \geq 0$, gilt:

$$P(X > s + t | X > t) = P(X > s).$$

Bem.: Bei stetigen Verteilungen ist das äquivalent zu

$$P(X \geq s + t | X \geq t) = P(X \geq s).$$

Es gilt (Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit)

$$\begin{aligned} P(X \geq s + t | X \geq t) &= \frac{P(\{X \geq s + t\} \cap \{X \geq t\})}{P(X \geq t)} \\ &= \frac{P(X \geq s + t)}{P(X \geq t)}. \end{aligned}$$

Gedächtnislosigkeit (2)
Eine Verteilung(sfunktion) ist also gedächtnislos, genau dann wenn

$$\frac{P(X \geq s + t)}{P(X \geq t)} = P(X \geq s)$$

bzw.

$$\frac{1 - F(s + t)}{1 - F(t)} = 1 - F(s).$$

Def. 40 Überlebensfunktion (oder Zuverlässigkeitsfunktion)

$$G(t) = 1 - F(t)$$

Gedächtnislosigkeit (3)
Die Verteilungsfunktion F (mit der Überlebensfunktion G) ist also gedächtnislos genau dann wenn

$$G(s + t) = G(s) \cdot G(t) \quad \text{für alle} \quad s, t \geq 0$$

Cauchy- Funktionalgleichung

Gedächtnislosigkeit (4)

Satz: Die Exponentialverteilung ist gedächtnislos.
Beweis: Die Verteilungsfunktion ist

$$F(t) = P(X < t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{falls} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und die Überlebensfunktion

$$G(t) = 1 - F(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}.$$

Folglich erhalten wir

$$G(s + t) = e^{-\lambda(s+t)} = e^{-\lambda s} e^{-\lambda t} = G(s) \cdot G(t).$$

□

Gedächtnislosigkeit (5)

Satz: Sei F eine stetige Verteilungsfunktion mit $F(0) = 0$ **und** $G(t) = 1 - F(t)$**.**
Es gelte die Cauchy-Funktionalgleichung

$$G(s + t) = G(s) \cdot G(t) \quad \text{für alle} \quad s, t \geq 0. \tag{1}$$

Dann gilt für alle t, $t > 0$,

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

wobei $\lambda > 0$. D.h. F ist Exponential-Verteilungsfunktion.

Gedächtnislosigkeit (6)

Beweis des Satzes

1. Es gilt:

   $$G(t) = G(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}) = \big(G(\frac{t}{2})\big)^2 \geq 0,$$

   d.h. $G(t) \geq 0$ für alle t.

   Angenommen, es existiert ein t_0 mit $G(t_0) = 0$, dann folgt:

   $$G(t) = G(t - t_0 + t_0) = G(t - t_0) \cdot G(t_0) = 0$$

   für alle t, d.h. wir erhalten die triviale Lösung für die obige Cauchy-Funktionalgleichung, die jedoch wegen $G(0) = 1 - F(0) = 1$ nicht zugelassen ist.

Gedächtnislosigkeit (7)

2. Es gilt also $G(t) > 0$ für alle t.

   Sei m, $m > 0$, eine natürliche Zahl. Dann folgt aus (1) für alle $t > 0$:

   $$G(t) \quad = \quad G(\underbrace{\frac{t}{m} + \ldots + \frac{t}{m}}_{m \text{ mal}}) = \big(G(\frac{t}{m})\big)^m,$$

   insbesondere

   $$G(1) = \big(G(\frac{1}{m})\big)^m \qquad \text{oder} \qquad G(\frac{1}{m}) = \big(G(1)\big)^{\frac{1}{m}}$$

Gedächtnislosigkeit (8)

3. Für rationale Zahlen $r = \frac{n}{m}$ erhalten wir

   $$\begin{aligned} G(r) &= G(\frac{n}{m}) = G(\underbrace{\frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{m}}_{n \text{ mal}}) \\ &= \big(G(\frac{1}{m})\big)^n \\ &= \big(G(1)\big)^{\frac{n}{m}} \\ &= \big(G(1)\big)^r. \end{aligned}$$

Gedächtnislosigkeit (9)

4. Da die Funktion $(G(1))^t$ stetig ist auf $\mathbb{R}^+$ folgt für alle $t > 0$:

$$G(t) = G(1)^t = e^{t \cdot \ln(G(1))}$$

5. Wir setzen $\lambda := -\ln G(1)$.

   Da F als Verteilungsfunktion monoton wachsend ist, ist G monoton fallend, d.h. $\ln G(1) < 0$ und $\lambda > 0$. Wir erhalten demnach

$$G(t) = e^{-\lambda \cdot t},$$

   also

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda \cdot t}.$$

Gedächtnislosigkeit (10)

Bem.: Unter den diskreten Verteilungen hat nur die geometrische Verteilung diese Eigenschaft (siehe dort)

Fortsetzung von Beispiel 1
Der Kunde hat schon 10 min. gewartet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er insgesamt länger als 15 min. warten muss?

$$\begin{aligned} P(X > 15|X > 10) = P(X > 5) &= e^{-5\lambda} = e^{-0.5} \\ &\approx 0.604. \end{aligned}$$

Gedächtnislosigkeit (12)

Postschalter mit 2 Personen besetzt. Die Bedienungszeit sei zufällig, exponential verteilt, mit Erwartungswert $\frac{1}{\lambda}$. Es werden gerade zwei Kunden bedient, Sie sind der nächste.
Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sie nicht der letzte der 3 Kunden sind? Antwort: Sie werden bedient, sobald der erste Platz frei wird. Wegen der Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung hat die Bedienungszeit des anderen Kunden dieselbe Verteilung wie Ihre.

$$P = 0.5.$$

8.3 Zuverlässigkeitsmodelle

Def. 41 Die Zuverlässigkeit eines Systems ζ
ist die Wahrscheinlichkeit, dass das System zum Zeitpunkt t intakt ist:

$$\text{Rel}(\zeta) = P(X \geq t).$$

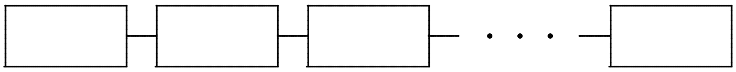
Annahmen: Das System besteht aus mehreren Komponenten Die Komponenten sind unabhängig $X_i \sim Exp(\lambda_i)$.

Zuverlässigkeitsmodelle

- Reihensystem
- Parallelsystem
- k aus n System
- Proversionswahrscheinlichkeit
- Faltung

Zuverlässigkeitsmodelle

Reihensystem ζ_R



$G_1(t)$ $\qquad$ $G_n(t)$

$$\begin{aligned}\mathrm{Rel}(\zeta_R) &= P(X_R \geq t) = P(X_1 \geq t, \dots, X_n \geq t) = \\ &= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \geq t) = \prod_{i=1}^{n} G_i(t) = \\ &= \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i t} = \exp\Big(-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i t\Big).\end{aligned}$$

Reihensystem

Die zufällige Lebensdauer X_R des Reihensystems ist

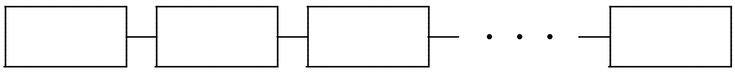
$$X_R \sim Exp\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\Big).$$

Die mittlere Lebensdauer des Reihensystems ist

$$\mathbf{E}X_R = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}.$$

Zuverlässigkeitsmodelle

Reihensystem:



$$\mathrm{Rel}(\zeta_R) = e^{\left(-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i t\right)},$$

$$\begin{aligned} n \to \infty, \lambda_i = \lambda: \quad & \mathrm{Rel}(\zeta_R) && \to 0. \\ n \to \infty, \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,n} \to \lambda < \infty: \quad & \mathrm{Rel}(\zeta_R) && \to e^{-\lambda t}\end{aligned}$$

Die Lebensdauer X_R des Reihensystems ist asymptotisch wieder exponentialverteilt.

Die Exponentialverteilung ist eine sogenannte Extremwertverteilung.

Zuverlässigkeitsmodelle

Reihensystem

Bem.: Die Lebensdauer X_R des Reihensystems kann beschrieben werden durch

$$X_R = \min_i X_i.$$

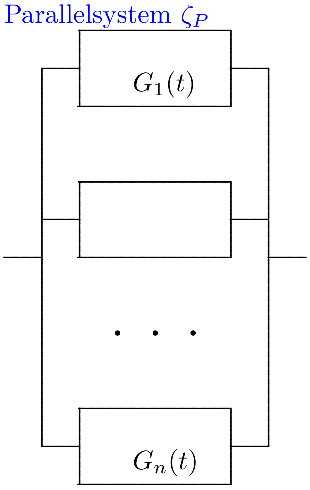
Die Zufallsvariable X_R hat oft (auch dann wenn nicht $X_i \sim Exp(\lambda)$) asymptotisch eine Weibull-Verteilung mit der Dichte

$$f(t) = b(\lambda t)^{b-1} e^{-(\lambda t)^b}, \quad t > 0, b > 0, \lambda > 0.$$

Das ist dann der Fall, wenn die Dichte der unabhängig und identisch verteilten Zufallsvariablen X_i 'kurze' Tails hat.

Zuverlässigkeitsmodelle

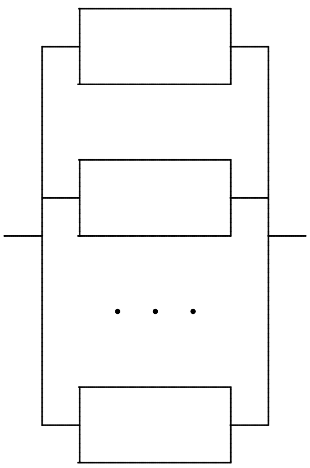
Parallelsystem ζ_P



Parallelsystem

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rel}(\zeta_P) &= P(X_P \geq t) = 1 - P(X_P < t) \\
&= 1 - \underbrace{P(X_1 < t, \ldots, X_n < t)}_{\substack{\text{alle Komponenten sind} \\ \text{vor dem Zeitpunkt } t \\ \text{ausgefallen}}} = \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i < t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} F_i(t) \\
&= 1 - (1 - e^{-\lambda t})^n \quad \text{wenn} \quad \lambda_i = \lambda \quad \forall i
\end{aligned}$$

Parallelsystem



Parallelsystem

$$\mathrm{Rel}(\zeta_P) = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^n$$

Parallelsystem

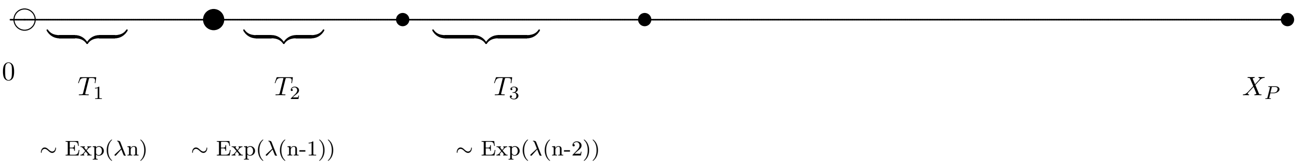
$$n \to \infty, \lambda_i = \lambda: \quad \mathrm{Rel}(\zeta_P) \quad \to 1$$

Bem.: Die Lebensdauer X_P des Parallelsystems kann beschrieben werden durch

$$X_P = \max_i X_i.$$

Zuverlässigkeitsmodelle

Mittlere Lebensdauer des Parallelsystems ($\lambda_i = \lambda$)



T_1: Wartezeit bis zum 1. Ausfall einer Komponente

T_i: Wartezeit zwischen $(i-1)$-tem und i-tem Ausfall einer Komponente

$$X_P = \sum_{i=1}^{n} T_i.$$

Parallelsystem

mittlere Lebensdauer (2)

Zwischen $(i-1)$-tem und i-tem Ausfall einer Komponente arbeiten genau $n-i+1$ Komponenten gleichzeitig. Die Lebensdauer dieses Teilsystems aus $n-i+1$ Komponenten (Reihensystem) hat eine Exponentialverteilung mit Parameter $\mu_i = (n-i+1)\cdot\lambda$,

$$\mathbf{E}T_i = \frac{1}{\mu_i} = \frac{1}{n-i+1}\cdot\frac{1}{\lambda}$$

$$\mathbf{E}X_P = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\mu_i} = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-i+1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}.$$

Zuverlässigkeitsmodelle

k aus n Systeme

Das System fällt aus, wenn k Komponenten ausgefallen sind.
Lebensdauer: $T = \sum_{i=1}^{k} T_i$.
Mittlere Lebensdauer:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}T &= \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\mu_i} = \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n-i+1}\\ &= \frac{1}{\lambda}\Big(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots \frac{1}{n-k+1}\Big).\end{aligned}$$

n aus n-System: Parallelsystem [-0.5ex] 1 aus n-System: Reihensystem

Zuverlässigkeitsmodelle

Proversionswahrscheinlichkeiten

Problem: Reihensystem mit 2 Komponenten und der zufälligen Lebensdauer X_1, X_2: $X_1 \sim Exp(\lambda_1), \quad X_2 \sim Exp(\lambda_2)$.
System fällt aus.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt das an der ersten Komponente?

Proversionswahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} P(X_1 < X_2) &= \int_0^\infty P(X_1 < X_2 | X_2 = t) f_2(t) dt \\ &= \int_0^\infty P(X_1 < t) \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \, dt \\ &= \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda_1 t}) \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \, dt \\ &= 1 - \int_0^\infty \lambda_2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) t} \, dt \\ & \quad 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}. \end{aligned}$$

Proversionswahrscheinlichkeiten

bei Exponentialverteilung

$$P(X_1 < X_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

$\frac{1}{\lambda_1} = 1000h, \frac{1}{\lambda_2} = 500h$:

$$P(X_1 < X_2) = \frac{1}{3}.$$

Faltung der Exponentialverteilung

System mit 2 Komponenten: Zunächst ist nur die erste Komponente eingeschaltet. Wenn diese ausfällt, wird automatisch die 2. Komponente zugeschaltet. Das System fällt aus, wenn beide Komponenten defekt sind.

Die Lebensdauern X_1, X_2 seien unabhängig und exponential, $X_1, X_2 \sim Exp(\lambda)$ verteilt.
Frage: Wahrscheinlichkeit für Systemausfall?

Faltung der Exponentialverteilung

$$\begin{aligned} F_{X_1+X_2}(t) &= P(X_1 + X_2 < t) \\ &= \int_0^\infty P(X_1 + X_2 < t | X_2 = s) f(s) ds \\ &= \int_0^\infty P(X_1 < t - s) f(s) ds \\ &= \int_0^\infty F(t - s) f(s) ds \\ &= \int_0^t \left(1 - e^{-\lambda(t-s)}\right) \lambda e^{-\lambda s} \, ds \\ &= \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} \, ds - \int_0^t \lambda e^{-\lambda t} \, ds \\ &= 1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Faltung der Exponentialverteilung

Erlang-Verteilung

Dichte ($t > 0$):

$$\begin{aligned} f(t) = F'(t) &= \lambda e^{-\lambda t} + \lambda^2 t e^{-\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t} \\ &= \lambda^2 \cdot t \cdot e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Erlang-Verteilung mit Parameter $(2, \lambda)$.

Satz: Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig, $X_i \sim Exp(\lambda)$

Dann ist

$$X_1 + X_2 + \cdots X_n \sim \text{Erlang}(n, \lambda),$$

Erlang verteilt mit Parametern (n, λ) und Dichte:

$$f_{Erl}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Beweis: durch Induktion. □

Zuverlässigkeitsmodelle

Ausfallrate

Def. 42 Ausfallrate-Funktion (oder Hazardrate-Funktion)

$$\mu(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

(F eine Verteilungsfunktion mit Dichte f)

Interpretation: Die Zufallsvariable X habe bereits die Zeit t überlebt. Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass X den Zeitraum $[t, t + dt]$ nicht überlebt

Ausfallrate-Funktion (2)

Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass X den Zeitraum $[t, t + dt]$ nicht überlebt, also

$$\begin{aligned} P(X \leq t + dt | X > t) &= \frac{P(X \in [t, t + dt])}{P(X > t)} \\ &= \frac{\int_t^{t+dt} f(x)dx}{1 - F(t)} \\ &= \frac{F(t + dt) - F(t)}{1 - F(t)} \\ &\approx \frac{f(t)dt}{1 - F(t)} = \mu(t)dt. \end{aligned}$$

$\mu(t)$: Rate mit der ein Bauteil, das t alt ist, ausfällt.

Ausfallrate-Funktion (3)

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$\mu(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda.$$

Bei Exponentialverteilung ist die Ausfallrate konstant, sie hängt nicht vom Zeitpunkt ab!

ÜA: Sei F eine stetige Verteilungsfunktion mit Dichte f und konstanter Ausfallrate. Zeigen Sie, dass f Exponential-Dichte ist. Hinweis: Setzen Sie $u(t) := 1 - F(t)$ und lösen Sie die Differentialgleichung $u' + \lambda u = 0$.

Ausfallrate-Funktion (4)

Def. 43 (IFR, DFR)

- Eine Verteilungsfunktion F hat Increasing Failure Rate (IFR), falls $\mu(t)$ monoton wachsend ist.
- F hat Decreasing Failure Rate (DFR), falls $\mu(t)$ monoton fallend ist.

Weibull-Verteilung

$$\begin{aligned} \text{Verteilungsfunktion:} \quad & F(t) = 1 - e^{-(\lambda t)^b}, \quad t, \lambda, b > 0, \\ \text{Dichtefunktion:} \quad & f(t) = b\lambda^b t^{b-1} e^{-(\lambda t)^b} \end{aligned}$$

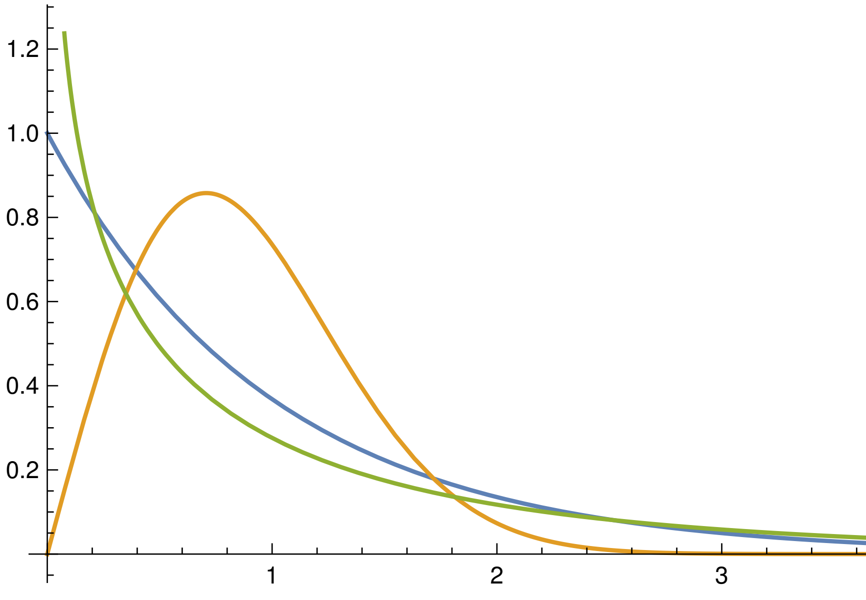
Ausfallrate-Funktion (5)

Weibull-Verteilung

$$\mu(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{b\lambda^b t^{b-1} e^{-(\lambda t)^b}}{e^{-(\lambda t)^b}} = b\lambda^b t^{b-1}$$

IFR	falls	$b > 1$	
IFR, DFR	falls	$b = 1$	(exp)
DFR	falls	$b < 1$	

- System mit verdeckten Mängeln, aber langsamen "Altern" $\rightarrow$ Ausfallrate sinkt $\rightarrow$ Weibull, $b < 1$
- System mit wenig verdeckten Mängeln, aber schnellem "Altern" $\rightarrow$ Ausfallrate steigt $\rightarrow$ Weibull, $b > 1$



Weibull Dichten (grün: $b < 1$, blau: $b = 1$, gelb: $b > 1$)

Ausfallrate-Funktion

Hjorth-Verteilung

$$\begin{aligned} \text{Verteilungsfkt.:} \quad F(t) &= 1 - \frac{e^{-\lambda t^2/2}}{(1+bt)^{\gamma/b}}, \quad t, \lambda, \gamma, b > 0, \\ \text{Dichtefkt.:} \quad f(t) &= \frac{\lambda t(1+bt) + \gamma}{(1+bt)^{\gamma/b+1}} e^{-\lambda t^2/2} \end{aligned}$$

$$\mu(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \lambda t + \frac{\gamma}{1 + bt}$$

fallend für $\lambda = 0$ badewannenförmig für $0 < \lambda < b\gamma$.

Ausfallrate-Funktion
Die Hjorth-Verteilung modelliert also badewannenförmige Ausfallraten.

- zunächst fallen viele Objekte aus (Kinderkrankheiten)
- dann Ausfallrate zeitweilig konstant
- schließlich mehren sich die Ausfälle aufgrund von Alterungserscheiningen.

Kumulierte Hazardfunktion

$$H(t) = \int_0^t \mu(s)\, ds = -\log G(t)$$

“Ansammlung” von Risiko (Hazard).

8.4 Bedienungstheorie

Es werden ganz kurz einige Fragestellungen skizziert.

M/M/s - Wartesystem

- $X \sim Exp(\lambda)$ Zeit zwischen Ankünften/Anforderungen
- Forderungen reihen sich in eine Warteschlange ein.
- $B \sim Exp(\mu)$ Bedienungszeiten, unabhängig
- s parallele Bedienungsplätze
- Bei frei werdendem Bedienungsplatz wird die nächste Forderung sofort bedient.

M/M/s - Wartesystem
Fragestellungen:

- Mittlere Anzahl der Forderungen im System
- Mittlere Warteschlangenlänge
- Mittlere Wartezeit $\mathbf{E}W$
- Besetztwahrscheinlichkeit P_B
- Wartezeitverteilung (ohne Beweis)

$$P(W \leq u) = 1 - P_B e^{-(s\mu-\lambda)u}$$

$$\mathbf{E}W = \frac{P_B}{s\mu - \lambda}.$$

Stationärer Fall, wenn $\frac{1}{s\mu} < \frac{1}{\lambda}$.

Bedienungstheorie
M/M/s - Verlustsystem

- $X \sim Exp(\lambda)$ Zeit zwischen Ankünften/Anforderungen
- Eine ankommende Forderung wird sofort bedient, wenn ein Bedienungsplatz frei ist, ansonsten geht sie verloren.
- $B \sim Exp(\mu)$ Bedienungszeiten, unabhängig
- s parallele Bedienungsplätze

Fragestellungen:

- Verlustwahrscheinlichkeit
- Mittlere Anzahl der besetzten Bedienungsplätze

8.5 Zusammenfassung (Exponentialverteilung)

- Exponentialdichte

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{if} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

- Erwartungswert

$$\mathbf{E}X = \frac{1}{\lambda}.$$

- Überlebensfunktion

$$G(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}.$$

- Cauchy-Funktionalgleichung

$$G(s+t) = G(s) \cdot G(t).$$

Zusammenfassung (Exponentialverteilung, 2)

- Die Exponential-Verteilung ist gedächtnislos.
- Die einzige gedächtnislose stetige Verteilung ist die Exponential-Verteilung
- Exponential-Verteilung ist eine Extremwertverteilung.
- Anwendungen in der Zuverlässigkeitstheorie Reihensystem, Parallelsystem
- Ausfallrate-Funktion

$$\mu(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}.$$

- Die Ausfallratefunktion der Exponentialverteilung ist konstant.

Ergänzung (Exponentialverteilung)
Satz: Sei **X** Zufallsvariable auf $[0, \infty)$ mit $\mathbf{E}(X) = \lambda$.
Dann ist die Entropie

$$H(p) = -\int_0^\infty p(x) \log(p(x))\, dx$$

maximal, falls

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

d.h. p(x) ist Exponentialdichte.
Beweis: der Beweis ist analog zu dem entsprechenden Satz bei Normalverteilung, siehe Abschnitt Normalverteilung. (Man setzt dort $\log q(x) = \alpha + \beta x$.)

9 Die Normalverteilung

9.1 Standard-Normalverteilung

Def. 44 (Dichte)

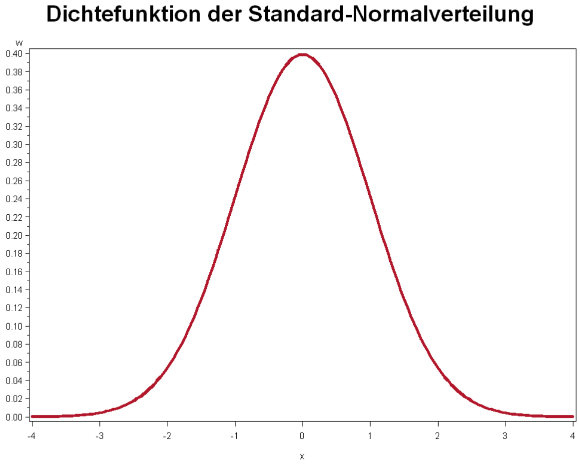
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \qquad \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

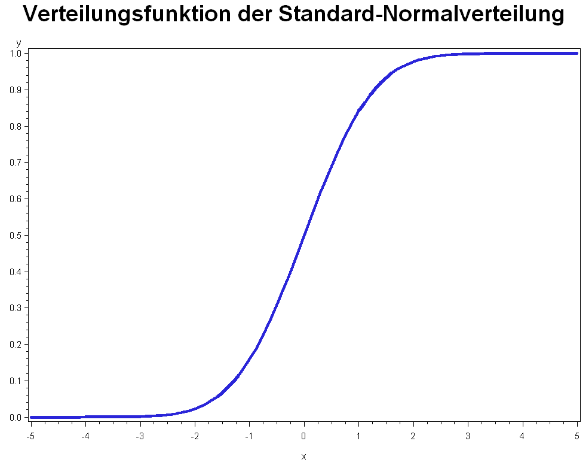
Def. 45 (Standard-Normaldichte, $\mu = 0, \quad \sigma^2 = 1$)

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2} && \text{Dichte} \\ \Phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt && \text{Verteilungsfunktion} \end{aligned}$$

$\varphi(x), \Phi(x)$ sind tabelliert!

$$\varphi(x) = \varphi(-x) \qquad \Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$





$$X \sim \mathcal{N}(0,1): \qquad P(a < X < b) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Frage: Für welches x gilt: $\Phi(x) = \alpha$?

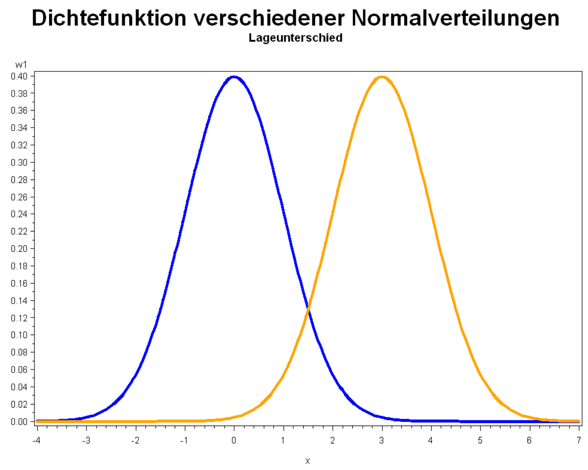
$x = \Phi^{-1}(\alpha) \quad \alpha$-Quantil. $\Phi^{-1}(\alpha)$ als Funktion: Quantilfunktion

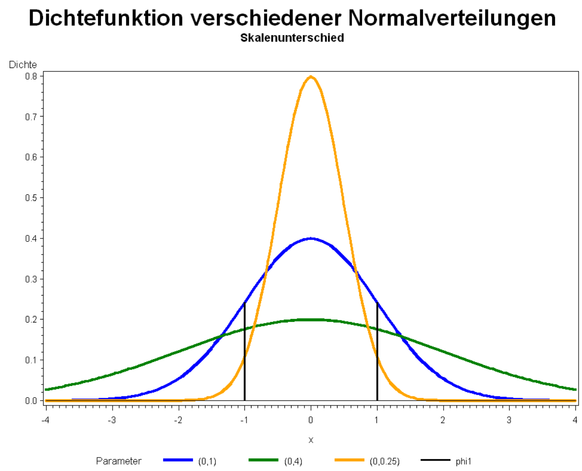
Die Normalverteilung

Vergleichen Sie

a) σ^2 fest, μ verschieden

b) μ fest, σ^2 verschieden





Die Normalverteilung

Satz: Es gilt:

$$\begin{aligned}
X \sim \mathcal{N}(0,1) &\iff \sigma X + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \\
X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) &\iff \alpha X + \beta \sim \mathcal{N}(\alpha\mu + \beta, \alpha^2\sigma^2) \\
X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) &\iff \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)
\end{aligned}$$

Beweis: : Wir zeigen nur 1. ($\rightarrow$). Sei $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

$$\begin{aligned}
P(\sigma X + \mu \le x) &= P(X \le \frac{x-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}) \\
= \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(u-\mu)^2/(2\sigma^2)}\, du
\end{aligned}$$

$\frac{u-\mu}{\sigma} = t, \quad \frac{1}{\sigma} du = dt.$ □

9.2 Berechnen von Wahrscheinlichkeiten

Satz: Sei $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_1^2), X_2 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_2^2)$,
$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ und $a > 0$. Dann gilt: $P(\mu - a < X_1 < \mu + a) > P(\mu - a < X_2 < \mu + a)$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
P(\mu - a < X_1 < \mu + a) &= P(\frac{-a}{\sigma_1} < \frac{X_1 - \mu}{\sigma_1} < \frac{a}{\sigma_1}) \\
&= \Phi(\frac{a}{\sigma_1}) - \Phi(-\frac{a}{\sigma_1}) \\
&> \Phi(\frac{a}{\sigma_2}) - \Phi(-\frac{a}{\sigma_2}) \\
&= P(\mu - a < X_2 < \mu + a).
\end{aligned}$$

□

Beispiel

$X_1 \sim \mathcal{N}(10, 4), X_2 \sim \mathcal{N}(10, 9), a = 1.$

$P(9 < X_1 < 11) =$

$$\begin{aligned}
&= \Phi(\tfrac{11-10}{2}) - \Phi(\tfrac{9-10}{2})\\
&= \Phi(\tfrac{1}{2}) - \Phi(-\tfrac{1}{2})\\
&= \Phi(\tfrac{1}{2}) - (1-\Phi(\tfrac{1}{2}))\\
&= 2\cdot\Phi(\tfrac{1}{2}) - 1\\
&= 2\cdot 0.6915 - 1 = 0.383.
\end{aligned}$$

$P(9 < X_2 < 11) =$

$$\begin{aligned}
&= \Phi(\tfrac{11-10}{3}) - \Phi(\tfrac{9-10}{3})\\
&= \Phi(\tfrac{1}{3}) - \Phi(-\tfrac{1}{3})\\
&= \Phi(\tfrac{1}{3}) - (1-\Phi(\tfrac{1}{3}))\\
&= 2\cdot\Phi(\tfrac{1}{3}) - 1\\
&= 2\cdot 0.63056 - 1 = 0.26112.
\end{aligned}$$

Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten $\Phi(x)$ existieren Programme und Tabellen.

- $x \geq 0$. In diesem Fall kann der Wert für $P(X < x)$ direkt aus der Tabelle abgelesen werden.
- $x < 0$. $P(X < x) = \Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$, z.B.

$$P(X < -1) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) \approx 0.15.$$

- $P(a < X < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$, z.B.

$$\begin{aligned}
P(-1 \leq x \leq 1) &= \Phi(1) - \Phi(-1) =\\
= \Phi(1) - (1-\Phi(1)) &= 2\Phi(1) - 1 \approx 0.68.
\end{aligned}$$

Berechnen von Wahrscheinlichkeiten

Beispiele

- $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$: $P(Y < 0) = \frac{1}{2}$ (lt. Tabelle);
- $X \sim \mathcal{N}(1,2^2)$: $P(X < 0) = \Phi\left(\frac{0-1}{2}\right) = \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\right) \approx 1 - 0.691 = 0.309.$

Berechnen von Wahrscheinlichkeiten

Def. 46 (p-Quantil)
Sei die Verteilungsfunktion F und die Wahrscheinlichkeiten p gegeben. Ein Wert x_p mit

$$p = P(X < x_p) = F(x_p)$$

heißt p-Quantil der Zufallsvariablen X, der Verteilungsfunktion (oder nur der Verteilung) F.

Sei $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.
Gesucht ist das $p = 0.95$-Quantil von Y.
Tabelle für $p = 0.95$: $x_p(0,1) \approx 1.645$

Berechnen von Wahrscheinlichkeiten
Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Bestimmen das p-Quantil $x_p(\mu, \sigma^2)$:

$$\begin{aligned} p &= P(X < x_p(\mu,\sigma)) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{x_p(\mu,\sigma)-\mu}{\sigma}\right) \\ &= P(Y < x_p(0,1)), \qquad Y \sim \mathcal{N}(0,1). \end{aligned}$$

D.h.

$$x_p(0,1) = \frac{x_p(\mu,\sigma)-\mu}{\sigma},$$

woraus durch Umstellen folgt:

$$x_p(\mu,\sigma) = \sigma \cdot x_p(0,1) + \mu.$$

9.3 $k \cdot \sigma$–Intervalle

Def. 47 ($k \cdot \sigma$–Intervalle)
Für eine normalverteilte Zufallsvariable $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ist $[\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]$ ein $\underline{k \cdot \sigma\text{–Intervall}}$, $k \in \mathbb{Z}^+$. Interessant sind dabei die Wahrscheinlichkeiten:

$$P(\mu - k\sigma \leq X \leq \mu + k\sigma).$$

$$\begin{aligned} P(X \in [\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]) &= \Phi\left(\tfrac{\mu+k\sigma-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\tfrac{\mu-k\sigma-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi(k) - \Phi(-k) \\ &= \Phi(k) - (1 - \Phi(k)) \\ &= 2 \cdot \Phi(k) - 1 \end{aligned}$$

$k \cdot \sigma$–Intervalle

$k \cdot \sigma$–Intervalle für $k = 1, \ldots, 5$

k	$2 \cdot \Phi(k) - 1$
1	0.6827
2	0.9545
3	0.9973
4	0.99997
5	0.9999994
6	0.999999998

$k \cdot \sigma$–Intervalle

Ein Zeitungsverkäufer sieht die Nachfrage X nach einer Tageszeitung als angenähert normalverteilt an. Das $2 \cdot \sigma$–Intervall sei $[322, 408]$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 400 Exemplare der Zeitung verkauft werden?

Die Frage ist also: $P(X \geq 400) = ?$ Nach Voraussetzung gilt:

$$322 = \mu - 2\sigma, \quad 408 = \mu + 2\sigma.$$

Lösung des linearen Gleichungssystems liefert

$$730 = 2\mu \quad \Rightarrow \quad \mu = 365, \quad 86 = 4\sigma \quad \Rightarrow \quad \sigma = 21,5.$$

$k \cdot \sigma$**–Intervalle**

$$\begin{aligned} P(X \geq 400) &= 1 - P(X < 400) = 1 - \Phi\left(\tfrac{400-\mu}{\sigma}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\tfrac{400-365}{21.5}\right) \approx 1 - \Phi(1.63) \\ &\approx 1 - 0.95 = 0.05 \end{aligned}$$

Hat man ein $k \cdot \sigma$–Intervall gegeben (und es wird Normalverteilung angenommen), so ist es möglich, jede andere Wahrscheinlichkeit auszurechnen.

Anwendung z.B. bei der Untersuchung von Toleranzen bei Werkstückmaßen oder bei Gewichtseinlagen von Gerichten.

9.4 Zentraler Grenzwertsatz

Zentraler Grenzwertsatz
Seien X_i unabhängig, identisch verteilt,

$\mathbf{E}X_i = \mu, \operatorname{Var} X_i = \sigma^2$.

$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$

$$Z_n := \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma} \to_{n\to\infty} Z, \quad Z \sim \mathcal{N}0,1).$$

Beweis: siehe Grenzwertsätze.

9.5 Fehlertheorie

Satz
Fehler sind unter folgenden Annahmen (asymptotisch) normalverteilt:

V1: Jeder Fehler ist Summe einer sehr großen Anzahl sehr kleiner, gleich großer Fehler, die verschiedene Ursachen haben.

V2: Die verschiedenen Fehlerkomponenten sind unabhängig.

V3: Jede Fehlerkomponente ist mit Wkt. 0.5 positiv und mit Wkt. 0.5 negativ.

Fehlertheorie
Beweis des Satzes
Seien ϵ_j, $j = 1, \ldots, n$ die Fehlerkomponenten.
V3 $\Rightarrow P(\epsilon_j = \pm\epsilon) = \frac{1}{2}$, d.h. $\mathbf{E}\epsilon_j = 0, \quad \text{var}\epsilon_j = \epsilon^2$

V1 $\Rightarrow$ Gesamtfehler $X = \sum_j \epsilon_j$, also

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X) &= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}(\epsilon_j) = 0 \\ \operatorname{var}(X) &= \sum_{j=1}^{n} \operatorname{var}(\epsilon_j) = n\epsilon^2 =: \sigma^2 \end{aligned}$$

Fehlertheorie

Beweis des Satzes (2)

Charakteristische Funktion von ϵ_j:

$$\phi_{\epsilon_j}(t) = \mathbf{E}(e^{it\epsilon_j}) = \frac{1}{2}(e^{it\epsilon} + e^{-it\epsilon}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it\epsilon)^{2k}}{(2k)!}$$

Charakteristische Funktion von X:

$$\begin{aligned} \phi_X(t) &= \prod_{j=1}^{n} \phi_{\epsilon_j}(t) = (1 - \frac{t^2}{2!}\epsilon^2 + \frac{t^4}{4!}\epsilon^4 - + \cdots)^n \\ &= \big(1 - \frac{t^2}{2!}\frac{\sigma^2}{n} + o(\frac{1}{n})\big)^n \\ \to_{n\to\infty} & \quad e^{-t^2\sigma^2/2} \end{aligned}$$

Das ist die charakteristische Funktion von $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Fehlertheorie

Beweis des Satzes (3)

Den Grenzwert kann mich sich wie folgt überlegen:

Sei $a_n = 1 - \frac{t^2\sigma^2/2!}{n}$ und $b_n = o(\frac{1}{n})$. Dann ist

$$\begin{aligned} \log \phi_X(t) &= \log(a_n + b_n)^n = n \log(a_n + b_n) \\ &= n(\log(a_n + b_n) - \log a_n + \log a_n) \\ &= \underbrace{nb_n}_{o(1)} \underbrace{\frac{\log(a_n + b_n) - \log a_n}{b_n}}_{\approx 1/a_n} + n \log a_n \\ &= o(1) + n \log a_n \\ \phi_X(t) &= \underbrace{e^{o(1)}}_{\to 1} \cdot a_n^n \to e^{-t^2\sigma^2/2} \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt dann aus dem Konvergenzsatz.

9.6 Maximale Entropie

Def. 48 (Entropie)

$$H(f) := -\int f(x) \log f(x)\, dx$$

Maximale Entropie bei gegebenen Erwartungswert μ und Varianz σ^2.

f: Wahrscheinlichkeitsdichte auf $(-\infty, \infty)$.

$$(*) \qquad \int x\, f(x)\, dx = \mu, \qquad \int (x - \mu)^2 f(x)\, dx = \sigma^2$$

Die Entropie ist zu maximieren unter den obigen Bedingungen (*).

Maximale Entropie (2)

Satz:
Eine Dichtefunktion, die die Entropie unter den obigen Bedingungen maximiert ist normal.

Zum Beweis verwenden wir die Jensensche Ungleichung:

Jensensche Ungleichung für konkave Funktionen
Es sei g eine differenzierbare und konkave Funktion, und sei X eine zufällige Variable. Dann gilt:

$$\mathbf{E}g(X) \le g(\mathbf{E}X).$$

Maximale Entropie
Beweis der Jensenschen Ungleichung
Beweis: Sei $T(x)$ die Tangente an die Kurve der Funktion g im Punkt x_0,

$$g(x) \le T(x) = g(x_0) + \underbrace{g'(x_0)}_{\text{Anstieg der Kurve in } x_0} \cdot (x - x_0).$$

Wir setzen nun $x := X$ und $x_0 := \mathbf{E}X$ und erhalten:

$$g(X) \le g(\mathbf{E}X) + g'(\mathbf{E}X) \cdot (X - \mathbf{E}X).$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}g(X) &\le \mathbf{E}(g(\mathbf{E}X) + g'(\mathbf{E}X) \cdot (X - \mathbf{E}X)) \\ &= g(\mathbf{E}X) + g'(\mathbf{E}X) \cdot \underbrace{\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)}_{=0} = g(\mathbf{E}X) \end{aligned}$$

Maximale Entropie
Beweis des Satzes
Seien p und q beliebige Dichten. Da die Logarithmus-Funktion konkav ist folgt aus der Jensenschen Ungleichung:

$$\begin{aligned} \int \ln\big(\frac{q}{p}(x)\big)p(x)\,dx &= \mathbf{E}_p \ln\big(\frac{q}{p}(X)\big) \\ &\le \ln \mathbf{E}_p\big(\frac{q}{p}(X)\big) \\ &= \ln \int \big(\frac{q}{p}(x)\big)p(x)\,dx \\ &= \ln\Big(\int q(x)\,dx\Big) = \ln 1 = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

Maximale Entropie
Beweis des Satzes (2)

$$H(p) = -\int p \ln p \, dx \le -\int p \ln q \, dx$$

Sei q wie folgt definiert:

$$\ln q = \alpha + \beta(x - \mu) + \gamma(x - \mu)^2,$$

wobei α, β, γ so dass q Dichte, $q \sim (\mu, \sigma^2)$.

$$\begin{aligned} H(p) &\leq -\int p \ln q \, dx \\ &= -\int p(x)\big(\alpha + \beta(x-\mu) + \gamma(x-\mu)^2\big) \, dx \\ &= -(\alpha + \gamma\sigma^2) \end{aligned}$$

feste obere Schranke für die Entropie.

Maximale Entropie
Beweis des Satzes (3)
Diese Schranke wird angenommen für $p = q$, also

$$\begin{aligned} \ln p &= \alpha + \beta(x-\mu) + \gamma(x-\mu)^2 \\ p &= e^{\alpha + \beta(x-\mu) + \gamma(x-\mu)^2} \end{aligned}$$

Offen: Gibt es α, β, γ mit p Dichte und $p \sim (\mu, \sigma^2)$?

Antwort: ja, $\alpha = -\ln(\sqrt{2\pi}\sigma), \beta = 0, \gamma = -\frac{1}{2\sigma^2}$.

Die Lösung ist auch (i.W.) eindeutig, da in der Jensenschen Ungleichung das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn fast überall $\frac{p}{q} = 1$ gilt.

9.7 Summe normalverteilter Zufallsvariablen

Satz: Seien $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2) \qquad X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$
unabhängig. Dann:

$$X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Beweis: : (allgemeiner für n Zufallsvariablen)
Seien X_j u.a. Zufallsvariablen mit $X_j \sim \mathcal{N}(\mu_j, \sigma_j^2)$.
Charakteristische Funktion von $X = \sum_{j=1}^n X_j$:

$$\phi_X(t) = \prod_{j=1}^n e^{it\mu_j - \sigma_j^2 t^2/2} = e^{it\mu - \sigma^2 t^2/2}$$

wobei $\mu = \sum \mu_j, \sigma^2 = \sum \sigma_j^2 \Rightarrow X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ □

9.8 Treffen einer Zielscheibe

Satz: Sei (X, Y) **zweidimensionale Zufallsvariable.**
Folgende Annahmen seien erfüllt:

- V1: Die Randverteilungen von X und Y seien stetig.
- V2: Die Dichte $h(x, y)$ von (X, Y) hängt nur vom Abstand $\sqrt{x^2 + y^2}$ vom Nullpunkt ab (Radialsymmetrie).
- V3: Die Fehler in x- und y-Richtung sind unabhängig.

Treffen einer Zielscheibe

Sei Z die zufällige Abweichung in beliebiger Richtung. Dann gilt

$$Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Beweis: siehe Abschnitt Transformationsformel $\square$

.

10 Transformation von Zufallsvariablen

Sei $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F_X(x) = P(X < x)$.
Wir betrachten eine Funktion $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und eine Zufallsvariable $Y\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $Y = g(X)$.

$$Y: \quad \Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}.$$

$$Y(\omega) = g(X(\omega)), \forall \omega \in \Omega.$$

Transformation von Zufallsvariablen
Die zufällige Variable $Y = g(X)$ besitzt die Verteilungsfunktion

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y < y) = P(\{\omega\colon Y(\omega) < y\}) \\ &= P(\{\omega\colon g(X(\omega)) < y\}) \\ &= P(X \in \underbrace{\{x\colon g(x) < y\}}_{\in \mathcal{B}^1}) = P(g(X) < y) \end{aligned}$$

Bem.: $\{x\colon g(x) < y\} \in \mathcal{B}^1$ gilt, wenn die Funktion g messbar ist.

Transformation von Zufallsvariablen

Frage: Wie berechnen wir $F_Y(y)$?
Fall 1: F diskret.

$$\begin{aligned} P(Y = y) &= P(g(X) = y) \\ &= P(x : g(x) = y) \\ &= P(x : x = g^{-1}(y)) \\ &= P(X \in g^{-1}(y)) \\ &= P(g^{-1}(y)) \end{aligned}$$

Transformation von Zufallsvariablen
F diskret, Beispiel

Sei $Y = X^2$, wobei

$$X = \begin{cases} 1 & \text{mit Wkt. } \frac{1}{4} \\ 0 & \text{mit Wkt. } \frac{1}{2} \\ -1 & \text{mit Wkt. } \frac{1}{4} \end{cases}$$

also $g(x) = x^2, g^{-1}(y) = \pm\sqrt{y} = \{-\sqrt{y}, \sqrt{y}\}$.

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= P(X = 0) = \frac{1}{2} \\ P(Y = 1) &= P(X \in \sqrt{1}) = P(X = 1 \vee X = -1) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Transformation von Zufallsvariablen

Fall 2: F stetig.

1. Finde für jedes y:

$$A_y = \{x : g(x) < y\}.$$

2. Die Verteilungsfunktion von Y ist

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y < y) = P(g(X) < y) \\ &= P(x : g(x) < y) = P(A_y) = \int_{A_y} f_X(x)\,dx \end{aligned}$$

3. Dichte von Y:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y).$$

Transformation von Zufallsvariablen

Beispiel 1

$X \sim R(0, \frac{\pi}{2})$.*, d.h. X hat die Dichte*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} & \text{, falls } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} .$$

Welche Verteilung hat die Zufallsvariable $Y = \sin(X)$?

1. Finde für jedes y, $y \in (0,1)$

$$\begin{aligned} A_y &= \{x : g(x) < y\} = \{x : \sin(x) < y\} \\ &= \{x : x < \arcsin(y)\} \end{aligned}$$

Offenbar $A_y = \emptyset$ für $y \leq 0$ und $A_y = \mathbb{R}$ für $y \geq 1$

Transformation von Zufallsvariablen

Beispiel 1 (Fortsetzung)

2. Die Verteilungsfunktion von Y ist

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y < y) = \int_{A_y} f_X(x)\,dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\arcsin(y)} dx = \frac{2}{\pi} \arcsin(y) \end{aligned}$$

3. Dichte von Y:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} & y \in (0,1) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Transformation von Zufallsvariablen

Beispiel 2

Sei X stetig und $X \sim F_X$ mit Dichte f_X.

Welche Verteilung hat die Zufallsvariable $Y = F_X(X)$?

1. $A_y = \{x : F_X(x) < y\} = \{x : x < F_X^{-1}(y)\}$ Offenbar $A_y = \emptyset$ für $y \leq 0$ und $A_y = \mathbb{R}$ für $y \geq 1$

2.

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y < y) = P(F_X(X) < y) = P(X < F_X^{-1}(y)) \\
&= \int_{A_y} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{F_X^{-1}(y)} f_X(x)\,dx \\
&= F_X(F_X^{-1}(y)) - F_X(-\infty) = y
\end{aligned}
$$

Transformation von Zufallsvariablen
Beispiel 2 (Fortsetzung)

3. Dichte von Y:

$$
f_Y(y) = \begin{cases} 1 & y \in (0,1) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}
$$

D.h. $Y \sim R(0,1)$

Transformation von Zufallsvariablen
Beispiel 3

Sei umgekehrt $U \sim R(0,1)$ und F eine Verteilungsfunktion mit Dichte f.
Welche Verteilung hat die Zufallsvariable $Y = F^{-1}(U)$?

1. Finde für jedes y

$$
\begin{aligned}
A_y &= \{u : F^{-1}(u) < y\} \\
&= \{u : u < F(y)\} = (0, F(y)).
\end{aligned}
$$

Transformation von Zufallsvariablen
Beispiel 3 (Fortsetzung)

2. Die Verteilungsfunktion von Y ist

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y < y) = P(F^{-1}(U) < y)) \\
&= P(U < F(y)) \\
&= \int_{A_y} f_U(u)\,du = \int_0^{F(y)} f_U(u)\,du \\
&= \int_0^{F(y)} du = F(y).
\end{aligned}
$$

Also $Y \sim F$.

Transformation von Zufallsvariablen
Unter gewissen Zusatzannahmen gilt

Transformationssatz:
Sei X eine, auf (a,b) definierte ($a = -\infty, b = +\infty$ ist erlaubt) Zufallsgröße mit Dichtefunktion f. Die Funktion $g:\ (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann hat die zufällige Variable $Y = g(X)$ auf dem Definitionsbereich von g^{-1} die Dichtefunktion

$$
h(y) = f(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{dg^{-1}}{dy}(y) \right| = \frac{f(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y))|}.
$$

Transformationssatz

Beweis, Fall 1: $g'(x) > 0$

Bem.: Die Voraussetzung $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ bewirkt, dass die Funktion g auf dem Intervall (a, b) streng monoton ist.

Fall 1: Es sei $g'(x) > 0 \ \forall \ x \in (a, b)$ und $y \in Db(g^{-1})$. Da g streng monoton wachsend ist, ist die Menge $A_y = (a, g^{-1}(y))$ ein Intervall und die Dichte von Y ist gegeben durch

$$\frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy}(F_X(g^{-1}(y)) - F_X(-\infty)).$$

Anwendung der Kettenregel liefert die Behauptung.

Transformationssatz

Beweis, Fall 2: $g'(x) < 0$

Fall 2: Es gilt $g'(x) < 0$, für alle $x \in (a, b)$, Da also die Funktion g streng monoton fallend ist, ist die Menge $A_y = (g^{-1}(y), b)$ ein Intervall und die Dichte von Y ist gegeben durch

$$\frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy}(F_X(\infty) - F_X(g^{-1}(y)).$$

Anwendung der Kettenregel liefert die Behauptung.

Bem.: Beachten Sie, dass in der Formel des Satzes Betragsstriche stehen.

Transformationsformel

Beispiel 1

Die folgenden drei Beispiele wurden bereits oben behandelt. Sie folgen jetzt nochmal, diesmal direkte Anwendung des Satzes.

Es sei $X \sim R(0, \frac{\pi}{2})$., d.h. X hat die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} & \text{, falls } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}.$$

$$y = g(x) = \sin x.$$

Für alle $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ gilt: $0 \leq g(x) < 1, \quad g^{-1}(y) = \arcsin y.$

Transformationsformel

Beispiel 1 (Fortsetzung)

Die Dichte von $Y = \sin X$ ist nach Transformationsformel

$$\begin{aligned} h(y) &= f(\arcsin y) \cdot \left| \frac{d \arcsin}{dy}(y) \right| \\ &= f(\arcsin y) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} & \text{, falls } 0 \leq y < 1 \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Transformationsformel

Beispiel 2

Es sei X Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F(x) = P(X < x) \in [0, 1[$ und Dichte f.
Die Dichte der Zufallsvariablen $Y = F(X)$ ist mittels Transformationsformel ($y \in (0, 1)$)

$$\begin{aligned} h(y) &= f(F^{-1}(y)) \cdot \frac{dF^{-1}}{dy}(y) \\ &= f(F^{-1}(y)) \cdot \frac{1}{F'(F^{-1}(y))} \\ &= \frac{f(F^{-1}(y))}{f(F^{-1}(y))} = 1 \end{aligned}$$

Folglich gilt: $Y \sim R(0, 1)$

Transformationsformel

Beispiel 2 (Fortsetzung)

Bem.: Wir haben also gezeigt: Wenn $X \sim F$ so ist die transformierte Zufallsvariable

$$Y = F(X) \sim R(0, 1)$$

Umgekehrt gilt: Ist $U \sim R(0, 1)$ und ist F eine beliebige Verteilungsfunktion, so ist $Y = F^{-1}(U) \sim F$.
Anwendung: Zufallszahlen (siehe später).

Transformationsformel

Beispiel 4

Es sei $X : \quad \Omega \to \mathbb{R}$ mit $X \sim Exp(\lambda)$, d.h.

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda \cdot x}, \qquad x \geq 0.$$

Wegen $U := F(X) \sim R(0, 1)$ erhalten wir eine exponentialverteilte Zufallsvariable wie folgt:

$$\begin{aligned} u &= F(x) = 1 - e^{-\lambda \cdot x} \\ e^{-\lambda \cdot x} &= 1 - u \\ x &= -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u) \end{aligned}$$

Die Zufallsgröße $\quad X = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U) \sim Exp(\lambda), \quad$ d.h. X ist exponentialverteilt mit dem Parameter λ.

Transformationsformel

Beipiel 5

Es sei X eine Zufallsgröße mit der Dichtefunktion f.
Weiter sei g die wie folgt definierte Funktion:

$$g(x) = ax + b.$$

Wir betrachten die Zufallsgröße Y,

$$Y = g(X) = aX + b, \quad a \neq 0$$

und bezeichnen $y := g(x)$. Dann gilt:

$$g^{-1}(y) = x = \frac{y - b}{a}.$$

Transformationsformel

Beipiel 5 (Fortsetzung)

Für die Dichte der Zufallsvariable Y gilt nach dem Transformationssatz

$$h(y) \quad = \quad f(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{dg^{-1}}{dy}(y) \right| = f\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{|a|}$$

Bem.: Im Fall der Normalverteilung, $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2),\ \sigma > 0$, haben wir dieses Ergebnis bereits früher erhalten.

Transformationsformel

Lineare Transformation, Normal

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Es sei ($a = \frac{1}{\sigma}, b = \frac{\mu}{\sigma}$)

$$Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \quad \text{bzw.} \quad X = \sigma Y + \mu.$$

Nach der in diesem Abschnitt hergeleiteten Formel ergibt sich die Dichtefunktion h der Zufallsgröße Y:

$$\begin{aligned} h(y) \quad &= \quad \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y-b}{a}\right) = \frac{1}{\left|\frac{1}{\sigma}\right|} f\left(\frac{y+\frac{\mu}{\sigma}}{\frac{1}{\sigma}}\right) = \sigma f(\sigma y + \mu) \\ &= \quad \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma y + \mu - \mu}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \end{aligned}$$

Dichtefunktion einer Normal mit $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$.

Transformationsformel

Lineare Transformation, Normal (Fortsetzung)

D.h. Eine normalverteilte Zufallsgröße wird in eine standard–normalverteilte Zufallsgröße transformiert, indem der Parameter μ subtrahiert und anschließend durch den Parameter σ dividiert wird. Sei also $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$,

$$\begin{aligned} F(x) \quad &= \quad P(X < x) = P\left(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{=Y} < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \quad P\left(Y < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Es gilt: $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$. (vgl. auch Abschnitt Normalverteilung)

11 Zufallsvektoren

11.1 Begriffe

Def. 49 (zufälliger Vektor)
Es seien X_i, $i = 1, \ldots, p$, reellwertige, zufällige Variablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{E}, P)$. Dann heißt

$$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)^T: \quad \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

zufälliger Vektor.

Er transformiert den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ in den Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{R}^p, \mathcal{B}^p, P_X)$, wobei $\mathcal{B}^p$ die σ–Algebra der p–dimensionalen Borelmengen ist.

Mehrdimensionale Zufallsvariablen

Def. 50 (Mehrdimensionale Verteilungsfunktion)
Die Funktion

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_p) := P(\{\omega \colon X_1(\omega) < x_1, \ldots, X_p(\omega) < x_p\})$$

heißt Verteilungsfunktion des zufälligen Vektors $\mathbf{X}$. Sie wird auch mit $F_{X_1,\ldots,X_p}(x_1, \ldots, x_p)$ bezeichnet.

Es gilt:

$$F_{X_1,\ldots,X_p}(x_1, \ldots, x_p) = P\left(\bigcap_{i=1}^{p} \{\omega \in \Omega \colon X_i(\omega) < x_i\}\right).$$

Mehrdimensionale Zufallsvariablen

Eigenschaften der Verteilungsfunktion

1. Invarianz gegenüber Permutationen, d.h.

$$F_{X_1,\ldots,X_p}(x_1, \ldots, x_p) = F_{X_{i_1},\ldots,X_{i_p}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_p})$$

2. $\lim\limits_{x_p \to \infty} F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_p) = F_{X_1,\ldots,X_{p-1}}(x_1, \ldots, x_{p-1})$;
   $F_X(x_1, \ldots, x_p) = P(\underbrace{\{X_1 < x_1, \ldots, X_{p-1} < x_{p-1}\}}_{=:A} \cap \underbrace{X_p < x_p}_{\longrightarrow_{x_p \to \infty} \Omega})$.

$$\begin{aligned} \lim_{x_p \to \infty} F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_p) &= P(A \cap \Omega) = P(A) \\ &= F_{X_1,\ldots,X_{p-1}}(x_1, \ldots, x_{p-1}). \end{aligned}$$

Mehrdimensionale Zufallsvariablen

Eigenschaften der Verteilungsfunktion (2)

3. $\lim\limits_{x_p \to -\infty} F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_p) = 0$;

   Bem.: Man kann wegen 1. auch jede beliebige Komponente wählen!

4. $\lim\limits_{(x_1,\ldots,x_p) \to (\infty,\ldots,\infty)} F_X(x_1, \ldots, x_p) = 1$;

5. $F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_p)$ ist in jedem Argument monoton wachsend;

6. $F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_p)$ ist in jedem Argument linksseitig stetig.

Mehrdimensionale Zufallsvariablen

Stetige Verteilung

Def. 51 Ein zufälliger Vektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)^T$ **heißt stetig,**
wenn seine Verteilungsfunktion charakterisiert ist durch:

$$F(x_1, \ldots, x_p) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \ldots \int\limits_{-\infty}^{x_p} \underbrace{f(t_1, \ldots, t_p)}_{\text{Dichtefunktion}} \; dt_p \ldots dt_1,$$

wobei für die Funktion f gilt:

1. $f(x_1, \ldots, x_p) \geq 0, \ \forall x_1, \ldots, x_p$;
2. $\int\limits_{\mathbb{R}^p} f(x_1, \ldots, x_p)\, dx_1 \ldots dx_p = 1$.

Mehrdimensionale Zufallsvariablen

Stetige Verteilung (2)

Die Funktion $f(x_1, \ldots, x_p)$ heißt dann Dichtefunktion des zufälligen Vektors $\mathbf{X}$.
Falls die Dichtefunktion $f(x_1, \ldots, x_p)$ stetig ist, so gilt:

$$f(x_1, \ldots, x_p) = \frac{\partial^p F_X(x_1, \ldots, x_p)}{\partial x_1 \ldots \partial x_p}.$$

Mehrdimensionale Zufallsvariablen

Def. 52 Ein zufälliger Vektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)^T$
heißt

- diskret, falls jede Komponente von $\mathbf{X}$ diskret ist, d.h. jedes X_i besitzt höchstens abzählbar viele Argumente.
- gemischt, falls einige seiner Komponenten diskret, die restlichen dagegen stetig sind.
- stetig, falls alle Komponenten von $\mathbf{X}$ stetige Zufallsgrößen sind.

Mehrdimensionale Zufallsvariablen

X diskret

Es sei $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)^T$ ein diskreter zufälliger Vektor. Für $i = 1, \ldots, p$ habe X_i den Wertevorrat $\{x_{i1}, \ldots, x_{ik}, \ldots\}$.
Dann definieren wir:

$$p_{j \ldots k} = P(X_1 = x_{1j}, \ldots, X_p = x_{pk}).$$

Verteilungsfunktion des zufälligen Vektors $\mathbf{X}$:

$$\begin{aligned} F(x_1, \ldots, x_p) &= P\left(\bigcap_{i=1}^{p} \{\omega \in \Omega \colon X_i(\omega) < x_i\}\right) \\ &= \sum_{j\,:\,x_{1j} < x_1} \ \sum_{\ldots} \ \sum_{k\,:\,x_{pk} < x_p} p_{j \ldots k} \end{aligned}$$

Mehrdimensionale Zufallsvariablen

X diskret, $p=2$

Es sei $p=2$ und $\mathbf{X}=(X_1,X_2)^T$.

$$X_1:\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

$$X_2:\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & \dots \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n & \dots \end{pmatrix}$$

$$p_{ij}=P(X_1=x_i,X_2=y_j)=P(\mathbf{X}=(x_i,y_j)).$$

Mehrdimensionale Zufallsvariablen

X diskret, $p=2$ (2)

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} P(X_1\in\{x_i\colon i\in\mathbb{N}\}) &= 1\\ P(X_2\in\{y_j\colon j\in\mathbb{N}\}) &= 1 \end{aligned}$$

Wir bezeichnen:

$$\mathcal{X}:=\{x_i\colon i\in\mathbb{N}\},\qquad \mathcal{Y}:=\{y_j\colon j\in\mathbb{N}\}.$$

Der zufällige Vektor $\mathbf{X}$ kann Werte der Form $(x_i,y_j)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ annehmen,

$$P(\mathbf{X}\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y})=P(X_1\in\mathcal{X},X_2\in\mathcal{Y})=\sum_{i,j\in\mathbb{N}}p_{ij}=1.$$

Mehrdimensionale Zufallsvariablen

X diskret, $p=2$ (3)

$$\begin{aligned} & P(X_1=x_i)=\\ =\ & P(\{X_1=x_i\}\cap\Omega)\\ =\ & P(\{X_1=x_i\}\cap\underbrace{\{(X_2=y_1)\vee(X_2=y_2)\vee\ldots\vee(X_2=y_n)\vee\ldots\}}_{=\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\{X_2=y_j\}=\Omega})\\ =\ & P(\{X_1=x_i\}\cap\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\{X_2=y_j\}\right)\\ =\ & P\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}}\{(X_1=x_i)\ \wedge\ (X_2=y_j)\}\right)=\sum_{j\in\mathbb{N}}p_{ij}=:p_{i\cdot} \end{aligned}$$

Mehrdimensionale Zufallsvariablen

X diskret, $p = 2$ (4)

Wir erhalten also:

$$p_{i\cdot} = P(X_1 = x_i).$$

Analog:

$$p_{\cdot j} = P(X_2 = y_j).$$

Def. 53 (Randwahrscheinlichkeiten)

Die Wahrscheinlichkeiten $p_{i\cdot}$ bzw. $p_{\cdot j}$ $(i, j \in \mathbb{N})$ nennen wir die Randwahrscheinlichkeiten des zufälligen Vektors $X = (X_1, X_2)^T$.

Die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Wahrscheinlichkeiten werden in einer Kontingenztafel schematisiert.

Mehrdimensionale Zufallsvariablen

Kontingenztafel

$X_1 \backslash X_2$	y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_j	$\dots$	y_n	$\dots$	$\sum$
x_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	$\dots$	p_{1j}	$\dots$	p_{1n}	$\dots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	$\dots$	p_{2j}	$\dots$	p_{2n}	$\dots$	$p_{2\cdot}$
x_3	p_{31}	p_{32}	p_{33}	$\dots$	p_{3j}	$\dots$	p_{3n}	$\dots$	$p_{3\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	p_{i3}	$\dots$	p_{ij}	$\dots$	p_{in}	$\dots$	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\sum$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$p_{\cdot 3}$	$\dots$	$p_{\cdot j}$	$\dots$	$p_{\cdot n}$	$\dots$	1

Mehrdimensionale Zufallsvariablen

Beispiel 1

Umfrage zum Thema "Sport"

Dabei werden Männer und Frauen darüber befragt, ob sie Sportler oder Nichtsportler sind. Das ergibt die beiden folgenden Zufallsvariablen:

$$X_1 = \begin{cases} 1 & \text{, falls weiblich} \\ 2 & \text{, falls männlich} \end{cases}$$

$$X_2 = \begin{cases} 1 & \text{, falls Sportler} \\ 2 & \text{, falls Nichtsportler} \end{cases}$$

Mehrdimensionale Zufallsvariablen

Beispiel 1 (Fortsetzung)

Schema für den zufälligen Vektor

$X = (X_1, X_2)^T$:

$X_1 \backslash X_2$	1	2	
1	p_{11}	p_{12}	$p_{1.}$
2	p_{21}	p_{22}	$p_{2.}$
	$p_{.1}$	$p_{.2}$	1

2×2–Kontingenztafel:

$X_1 \backslash X_2$	1	2	
1	n_{11}	n_{12}	$n_{1.}$
2	n_{21}	n_{22}	$n_{2.}$
	$n_{.1}$	$n_{.2}$	$n_{..}$

Dabei bedeuten:

Mehrdimensionale Zufallsvariablen

Beispiel 1 (Fortsetzung, 2)

n_{ij} – die Anzahl der Personen mit dem Geschlecht i und dem Sportverhalten j;

$n_{.1}$ – die Anzahl der Sportler;

$n_{.2}$ – die Anzahl der Nichtsportler;

$n_{1.}$ – die Anzahl der Frauen;

$n_{2.}$ – die Anzahl der Männer;

$n_{..}$ – die Gesamtzahl der Befragten.

Mit $\hat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_{..}}$ ergibt sich nun eine Schätzung für die Wahrscheinlichkeit p_{ij}.

Mehrdimensionale Zufallsvariablen

Beispiel 2

Werfen zweier Würfel

Wir betrachten den zufälligen Vektor $X = (X_1, X_2)^T$, wobei X_1 die Augenzahl des ersten Würfels ist und X_2 die des zweiten. Für die zufälligen Variablen X_1 und X_2 gilt:

$$X_1, X_2 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Da die Würfel voneinander unabhängig sind, gilt

$$p_{ij} = P(X_1 = i, X_2 = j) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Mehrdimensionale Zufallsvariablen

Beispiel 2 (Fortsetzung)

Damit erhalten wir das folgende Schema:

$X_1 \backslash X_2$	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

Mehrdimensionale Zufallsvariablen

Beispiel 2 (Fortsetzung)

$$P(X_1 < 4, X_2 < 3) = \sum_{i<4;\, j<3} p_{ij} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Die hier addierten Wahrscheinlichkeiten sind in dem oben angegebenen Schema eingerahmt.

Die Aussagen zu zweidimensionalen zufälligen Vektoren, die wir bis hierher gemacht haben, gelten analog erweitert auch für höherdimensionale zufällige Vektoren.

Mehrdimensionale Zufallsvariablen

X stetig, $p = 2$

Zweidimensionale Dichtefunktion $f(x, y)$

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1;$
2. $f(x, y) \geq 0,\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$

Zweidimensionale Verteilungsfunktion

$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v)\, du\, dv = P(X_1 < x, X_2 < y).$

Da $f(x, y)$ stetig ist, gilt weiterhin:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y}.$$

Mehrdimensionale Zufallsvariablen

X stetig, $p = 2$ (Fortsetzung)

$$\begin{aligned} \lim_{y \to \infty} F(x, y) &= F_{X_1}(x) = P(X_1 < x). \\ \lim_{x \to \infty} F(x, y) &= F_{X_2}(y) = P(X_2 < y). \end{aligned}$$

Randverteilungen, Randverteilungsfunktionen

Die Verteilungsfunktionen F_{X_1} und F_{X_2} bezeichnen wir als Randverteilungen von X_1 bzw. X_2.

Mehrdimensionale Zufallsvariablen

X stetig, $p = 2$ (Fortsetzung)

Integrieren wir die Dichtefunktion nur nach einer der beiden Variablen, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy &= \frac{dF_{X_1}(x)}{dx} =: f_{X_1}(x) \\
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx &= \frac{dF_{X_2}(y)}{dy} =: f_{X_2}(y)
\end{aligned}$$

Mehrdimensionale Zufallsvariablen

X stetig, $p = 2$ (Fortsetzung, 2)

Def. 54 (Randdichten)

Die Funktionen f_{X_1} und f_{X_2} bezeichnen wir als Randdichten von X_1 bzw. X_2.

Offenbar,

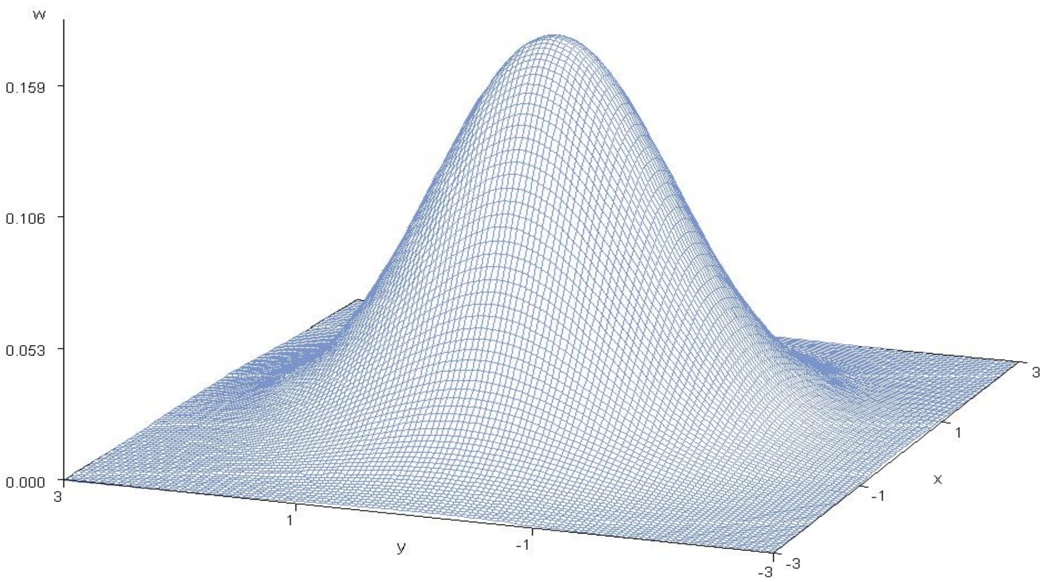
$$\begin{aligned}
F_{X_1}(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_{X_1}(t)\,dt \\
F_{X_2}(y) &= \int_{-\infty}^{y} f_{X_2}(t)\,dt
\end{aligned}$$

Mehrdimensionale Zufallsvariablen

X stetig, $p = 2$ (Fortsetzung)

Zweidimensionale Normalverteilung

Dichtefunktion der 2-dimensionalen Standard-Normalverteilung



11.2 Unabhängigkeit von Zufallsgrößen

Def. 55 (Unabhängigkeit)
Es seien X_1 und X_2 zwei zufällige Variablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{E}, P)$. Diese beiden zufälligen Variablen X_1 und X_2 heißen stochastisch unabhängig, wenn für alle $A, B \in \mathcal{B}^1$ gilt:

- $P(X_1 \in A, X_2 \in B) = P(X_1 \in A) \cdot P(X_2 \in B)$; oder kürzer:
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Unabhängigkeit von Zufallsgrößen
Verteilungsfunktion
Es sei $X = (X_1, X_2)^T$ ein zufälliger Vektor, deren Komponenten X_1 und X_2 stochastisch unabhängig sind. Dann gilt:

$$\begin{aligned} F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &= P(X_1 < x_1, X_2 < x_2) \\ &= P(X_1 \in \underbrace{(-\infty, x_1)}_{A \in \mathcal{B}^1}, X_2 \in \underbrace{(-\infty, x_2)}_{B \in \mathcal{B}^1}) \\ &= P(X_1 \in (-\infty, x_1)) \cdot P(X_2 \in (-\infty, x_2)) \\ &= F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2) \end{aligned}$$

Unabhängigkeit von Zufallsgrößen
F stetig
Sei F stetig mit Dichte $f_{\mathbf{X}}(t_1, t_2)$.
Aus der letzten Aussage folgt:

$$\int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f_{\mathbf{X}}(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2 = \int_{-\infty}^{x_1} f_{X_1}(t_1)\, dt_1 \int_{-\infty}^{x_2} f_{X_2}(t_2)\, dt_2$$

$$\int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} (f_{\mathbf{X}}(t_1, t_2) - f_{X_1}(t_1) f_{X_2}(t_2))\, dt_1\, dt_2 = 0 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

D.h. $\quad f_{\mathbf{X}}(t_1, t_2) = f_{X_1}(t_1) f_{X_2}(t_2) \quad \forall t_1, t_2$

Unabhängigkeit von Zufallsgrößen

- Ist der zufällige Vektor $X = (X_1, X_2)^T$ stetig, so

$$\underbrace{f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)}_{\substack{\text{zweidimensio–} \\ \text{nale Dichte}}} = \underbrace{f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2)}_{\text{Randdichten}}.$$

- Ist der zufällige Vektor $X = (X_1, X_2)^T$ diskret, so folgt für alle $i, j = 1, \ldots$:

$$p_{ij} = p_{i.} \cdot p_{.j}.$$

Unabhängigkeit von Zufallsgrößen

Beispiel

Es seien einige Einzelwahrscheinlichkeiten p_{ij} einer diskreten zweidimensionalen Zufallsvariablen (X, Y) bekannt (fett eingetragen).

Die Komponenten X und Y seien unabhängig. Bestimmen Sie die restlichen Einträge!

$X \setminus Y$	1	2	3	$p_{i.}$
-1	0.02	**0.06**	0.12	0.20
0	**0.03**	0.09	0.18	0.30
1	0.05	0.15	0.30	**0.50**
$p_{.j}$	0.10	**0.30**	0.60	1

Unabhängigkeit von Zufallsgrößen

Beispiel (Fortsetzung)

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X &= -1 \cdot 0.2 + 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.5 = 0.3 \\
\mathbf{E}Y &= 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.6 = 2.5 \\
\mathbf{E}(X \cdot Y) &= -0.02 - 2 \cdot 0.06 - 3 \cdot 0.12 + 0 \cdot (\ldots) \\
&\quad +1 \cdot 0.05 + 2 \cdot 0.15 + 3 \cdot 0.3 = 0.75 \\
cov(X, Y) &= \mathbf{E}(X \cdot Y) - (\mathbf{E}X)(\mathbf{E}Y) = 0.75 - 0.75 = 0.
\end{aligned}$$

Merkwürdig?

Unabhängigkeit von Zufallsgrößen

Satz

Es seien X_1 und X_2 zwei zufällige Variablen. φ und ψ seien zwei beliebige ($\mathcal{B}^1$–messbare) Transformationen dieser beiden Variablen,

$$X_1' = \varphi(X_1), \quad X_2' = \psi(X_2).$$

Die zufälligen Variablen X_1 und X_2 sind genau dann stochastisch unabhängig, wenn die Zufallsgrößen X_1' und X_2', für alle Transformationen φ und ψ, unabhängig sind.

Unabhängigkeit von Zufallsgrößen

Beweis des Satzes, Anmerkungen

Die Funktionen φ und ψ seien auf der Menge $\mathbb{R}$ definiert und reellwertig. Dann gilt für die jeweilige Umkehrfunktion genau dann

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(A) &= \{x \colon \varphi(x) \in A\} \in \mathcal{B}^1, \quad \forall A \in \mathcal{B}^1 \\
\psi^{-1}(B) &= \{y \colon \psi(y) \in B\} \in \mathcal{B}^1, \quad \forall B \in \mathcal{B}^1,
\end{aligned}$$

wenn φ und ψ $\mathcal{B}^1$–messbar sind.

Unabhängigkeit von Zufallsgrößen

Beweis des Satzes ($\Longrightarrow$)

Es seien die zufälligen Variablen X_1 und X_2 stochastisch unabhängig. Wir zeigen, dass $\varphi(X_1)$ und $\psi(X_2)$ unabhängig sind. Da die Funktionen φ und ψ $\mathcal{B}^1$–messbar sind, gilt

$P(\varphi(X_1) \in A, \psi(X_2) \in B)$

$$\begin{aligned} &= P(X_1 \in \varphi^{-1}(A), X_2 \in \psi^{-1}(B)) \\ &= P(X_1 \in \varphi^{-1}(A)) \cdot P(X_2 \in \psi^{-1}(B)) \\ &= P(\varphi(X_1) \in A) \cdot P(\psi(X_2) \in B) \end{aligned}$$

D.h. die zufälligen Variablen $\varphi(X_1)$ und $\psi(X_2)$ sind unabhängig.

Unabhängigkeit von Zufallsgrößen

Beweis des Satzes ($\Longleftarrow$)

Es gelte also, daß für alle $\mathcal{B}^1$–messbaren Funktionen φ und ψ die zufälligen Variablen $\varphi(X_1)$ und $\psi(X_2)$ unabhängig sind. Insbesondere ist das dann auch der Fall für die Funktionen $\varphi(x) \equiv \psi(x) \equiv x$. D.h.

$$X_1 = \varphi(X_1), \quad X_2 = \psi(X_2).$$

Folglich sind auch die zufälligen Variablen X_1 und X_2 unabhängig.

Unabhängigkeit von Zufallsgrößen

Beispiel 2

Sei $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

- X und $Y = X^2$ sind nicht unabhängig, sogar funktional abhängig
- X und Y sind unkorreliert, wegen $\mathbf{E}X = 0$ und

  $$cov(X,Y) = \mathbf{E}(X \cdot X^2) - \mathbf{E}X \cdot \mathbf{E}Y = \mathbf{E}X^3 = 0,$$

  da X symmetrisch ist.

Die Aussage gilt also für beliebige symmetrische Zufallsvariablen X mit endlicher Varianz.

11.3 Transformationssatz für Zufallsvektoren

Es sei $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)^T$ ein zufälliger Vektor mit der Dichtefunktion $f(x_1, \ldots, x_p)$. Es sei $g\colon \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^p$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung. Sie ordnet einem Vektor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_p)^T$ einen Vektor $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_p)^T$ zu und besteht aus Teilabbildungen $g_1, \ldots, g_p$ mit $g_i\colon \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ (für alle $i = 1, \ldots, p$).

Beispiel

$\mathbf{y} = g(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, wobei $\mathbf{A}$ reguläre (p,p)–Matrix.

Transformationssatz für Zufallsvektoren (2)

Die Umkehrabbildung $g^{-1}\colon \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^p$ ist durch Funktionen $x_i = \psi_i(y_1, \ldots, y_p)$ definiert $(i = 1, \ldots, p)$. Die Funktionen ψ_i $(i = 1, \ldots, p)$ existieren wegen der umkehrbaren Eindeutigkeit der Funktion g.

$$\begin{aligned} g^{-1}(\mathbf{y}) &= g^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1(y_1, \ldots, y_p) \\ \vdots \\ \psi_p(y_1, \ldots, y_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \\ g^{-1}(\mathbf{y}) &= (\psi_1(\mathbf{y}), \ldots, \psi_p(\mathbf{y}))^T = \mathbf{x} \qquad \text{Kurzform} \end{aligned}$$

Transformationssatz für Zufallsvektoren (3)
Wir definieren einen weiteren zufälligen Vektor $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_p)^T$ wie folgt:

$$\mathbf{Y} = g(\mathbf{X}) := (g_1(X_1, \ldots, X_p), \ldots, g_p(X_1, \ldots, X_p))^T$$

und nehmen an, die g_i $(i = 1, \ldots, p)$ besitzen stetige partielle Ableitungen nach allen Argumenten. Für den zufälligen Vektor $\mathbf{X}$ gilt umgekehrt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} &= (X_1, \ldots, X_p)^T \\
&= (\psi_1(Y_1, \ldots, Y_p), \ldots, \psi_p(Y_1, \ldots, Y_p))^T \\
&= g^{-1}(Y_1, \ldots, Y_p) = g^{-1}(\mathbf{Y}).
\end{aligned}$$

Transformationssatz für Zufallsvektoren (4)
Satz (Dichte von $\mathbf{Y} = g(\mathbf{X})$), ohne Beweis
Die Zufallsvariable $\mathbf{X}$ habe die Dichte f. Die Dichte der Zufallsvariablen $\mathbf{Y} = g(\mathbf{X})$ ist

$$h_Y(y_1, \ldots, y_p) = f(\psi_1(y_1, \ldots, y_p), \ldots, \psi_p(y_1, \ldots, y_p)) \cdot |J|,$$

wobei

$$J = \det \left(\frac{\partial \psi_i(y_1, \ldots, y_p)}{\partial y_j} \right)_{i,j=1,\ldots,p}$$

die sogenannte Jacobi-Determinante ist.

11.4 Box-Müller Transformation

BOX–MÜLLER–*Transformation*
Es seien U_1 und U_2 zwei unabhängige, über dem Intervall $[0, 1[$ gleichverteilte Zufallsgrößen ($U_i \sim R(0, 1)$, $i = 1, 2$), $\mathbf{U} = (U_1, U_2)^T$ ein zufälliger Vektor. Wir betrachten den zufälligen Vektor $\mathbf{V} = g(\mathbf{U}) = (X, Y)^T$, wobei:

$$\begin{aligned}
X = g_1(U_1, U_2) &= \sqrt{-2 \ln U_1} \cdot \cos 2\pi U_2 \\
Y = g_2(U_1, U_2) &= \sqrt{-2 \ln U_1} \cdot \sin 2\pi U_2
\end{aligned}$$

Wir suchen die Dichtefunktionen für die zufälligen Variablen X und Y.

Box-Müller Transformation (2)
Wir bestimmen zunächst die Umkehrfunktion zur Abbildung g. Es gilt:

$$\mathbf{U} = g^{-1}(\mathbf{V}) = (\psi_1(X, Y), \psi_2(X, Y)).$$

Zur Bestimmung der ψ_1 und ψ_2 berechnen wir

$$\begin{aligned}
X^2 + Y^2 &= (-2 \ln U_1 \cdot \cos^2(2\pi U_2)) + \\
&\quad (-2 \ln U_1 \cdot \sin^2(2\pi U_2)) \\
&= (-2 \ln U_1) \cdot (\cos^2(2\pi U_2) + \sin^2(2\pi U_2)) \\
&= -2 \ln U_1
\end{aligned}$$

Box-Müller Transformation (3)
Durch Umstellen erhalten wir:

$$U_1 = \psi_1(X,Y) = e^{-\frac{1}{2}(X^2+Y^2)}.$$

Die zweite Komponente erhalten wir durch

$$\frac{Y}{X} = \tan 2\pi U_2.$$

Daraus folgt:

$$U_2 = \psi_2(X,Y) = \frac{1}{2\pi}\arctan\left(\frac{Y}{X}\right).$$

Box-Müller Transformation (4)
Bestimmung von $|J|$.

$$\begin{aligned}
|J| = & \left\|\begin{matrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x} & \frac{\partial\psi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x} & \frac{\partial\psi_2}{\partial y}\end{matrix}\right\| \\
= & \left\|\begin{matrix} -x\cdot\exp(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)) & -y\cdot\exp(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)) \\ \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{-y}{\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\cdot x^2} & \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\cdot x}\end{matrix}\right\| \\
= & \left|-\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)\cdot\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)\right| \\
= & \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}
\end{aligned}$$

Box-Müller Transformation (5)
Für die Dichtefunktion des zufälligen Vektors $\mathbf{V}$ gilt nach der Transformationsformel:

$$f_{\mathbf{V}}(x,y) = f_{\mathbf{U}}(\psi_1(x,y),\psi_2(x,y))\cdot|J|.$$

Da die Zufallsgrößen U_1 und U_2 unabhängig sind, gilt:

$$f_{\mathbf{V}}(x,y) = f_{U_1}(\psi_1(x,y))\cdot f_{U_2}(\psi_2(x,y))\cdot|J|.$$

Nun sind $U_1, U_2 \sim R(0,1)$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
f_{\mathbf{V}}(x,y) &= |J| = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2} \\
&= f_X(x)\cdot f_Y(y).
\end{aligned}$$

Box-Müller Transformation (6)
mit

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2} \\
f_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}
\end{aligned}$$

d.h. die Zufallsgrößen X und Y sind unabhängig und standardnormalverteilt,

$$X \sim \mathcal{N}(0,1), \quad Y \sim \mathcal{N}(0,1).$$

11.5 Treffen einer Zielscheibe

Transformationssatz
*Treffen einer Zielscheibe**

Es seien folgende Bedingungen erfüllt

- V1: Die Randverteilungen von X und Y seien stetig
- V2: Die Dichte $h(x, y)$ von (X, Y) hängt nur vom Abstand $\sqrt{x^2 + y^2}$ vom Nullpunkt ab (Radialsymmetrie)
- V3: Die Fehler in x- und y-Richtung sind unabhängig.

Sei Z die zufällige Abweichung in beliebiger Richtung. Dann ist $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Treffen einer Zielscheibe, Beweis des Satzes (1)
Seien $p(x)$ und $q(y)$ Randdichten von (X, Y). Aus V2 und V3 folgt

$$p(x)q(y) = s(r), \quad r^2 = x^2 + y^2 \tag{2}$$

Substitutionsmethode: $x = 0$: $p(0)q(y) = s(y), \quad p(0) \neq 0$ $y = 0$: $q(0)p(x) = s(x), \quad q(0) \neq 0$
$x \neq y$: $p(x)q(y) = p(y)q(x) \quad \forall x, y,$ und damit $p(x) = q(x)$ und $p(0)p(y) = s(y)$.
Teilen obige Funktionalgleichung durch $p(0)^2$,

$$\frac{p(x)}{p(0)}\frac{p(y)}{p(0)} = \frac{s(r)}{p(0)^2} = \frac{p(r)}{p(0)}$$

Treffen einer Zielscheibe
Beweis des Satzes (2)
Logarithmieren

$$\ln(\frac{p(x)}{p(0)}) + \ln(\frac{p(y)}{p(0)}) = \ln(\frac{p(r)}{p(0)})$$

Mit $f(x) := \ln(\frac{p(x)}{p(0)})$:

$$f(x) + f(y) = f(r), \quad r^2 = x^2 + y^2$$

weiter Substitutionsmethode.
$y = 0$: $f(-x) = f(|x|)$ wegen $f(0) = 0$.

Treffen einer Zielscheibe
Beweis des Satzes (3)
$x^2 = x_1^2 + x_2^2$:

$$f(r) = f(y) + f(x_1) + f(x_2), \quad r^2 = y^2 + x_1^2 + x_2^2$$

Wiederholtes Einsetzen:

$$f(r) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_k), \quad r^2 = \sum_{i=1}^{k} x_i^2$$

$k = n^2, x = x_1 = \ldots = x_k$:

$$f(nx) = n^2 f(x) \Rightarrow_{x=1} f(n) = n^2 f(1)$$

$x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}$:

$$n^2 f(\frac{m}{n}) = f(n\frac{m}{n}) = f(m) = m^2 f(1)$$

Treffen einer Zielscheibe

Beweis des Satzes (4)

$\Rightarrow f(\frac{m}{n}) = f(1)\big(\frac{m}{n}\big)^2 \Rightarrow$

$$f(x) = cx^2, \quad c = f(1)$$

für alle rationalen x. Wegen der Stetigkeit (V1) folgt diese Relation für alle $x \in \mathbb{R}$.

$$p(x) = p(0)e^{cx^2}$$

$p(x) > 0$ da Wkt.dichte, $\quad c < 0$, $c := -\frac{1}{2\sigma^2}$.

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = p(0)\int_{-\infty}^{\infty} e^{cx^2}\,dx = p(0)\sigma\sqrt{2\pi}$$

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Treffen einer Zielscheibe

Beweis des Satzes (5)

Gemeinsame Dichte von (X, Y):

$$p(x)p(y) = \frac{1}{\sigma^2 2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}.$$

Fehler in einer beliebigen Richtung θ, $0 \le \theta \le 2\pi$: $Z = X\cos(\theta) + Y\sin(\theta)$

Variablentransformation

$$\begin{aligned} z &= x\cos(\theta) + y\sin(\theta) \\ u &= x\sin(\theta) - y\cos(\theta) \end{aligned}$$

$$\text{Jacobi-Determinante} \quad J = \left\| \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{vmatrix} \right\| = |-1| = 1$$

Treffen einer Zielscheibe

Beweis des Satzes (6)

Quadrieren von z und u liefert

$$\begin{aligned} z^2 &= x^2\cos^2(\theta) + y^2\sin^2(\theta) + 2xy\cos(\theta)\sin(\theta) \\ u^2 &= x^2\sin^2(\theta) + y^2\cos^2(\theta) - 2xy\cos(\theta)\sin(\theta) \end{aligned}$$

Addition: $x^2 + y^2 = z^2 + u^2$ also gemeinsame Dichte von (Z, U):

$$h_1(z,u) = \frac{1}{\sigma^2 2\pi}e^{-\frac{z^2+u^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}$$

d.h. Z und U sind unabhängig, $h_1(z,u) = h_Z(z)h_U(u)$ und

$$h_Z(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$$

11.6 Faltung

Wir leiten die Faltungsformel zunächst mit Hilfe des Transformationssatzes her. Später werden wir noch einen anderen Beweis kennen lernen, der den Satz der Totalen Wahrscheinlichkeit für stetige Zufallsvariablen verwendet.

Faltung

Es sei $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ ein zufälliger Vektor ($p = 2$), mit unabhängigen Komponenten X_1 und X_2. Die Dichte f_{X_1,X_2} von $\mathbf{X}$ ist $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2)$. Es sei $\mathbf{Y} = g(\mathbf{X})$,

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(X_1, X_2) \\ g_2(X_1, X_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 + X_2 \\ X_2 \end{pmatrix}.$$

Faltung (2)

Wir suchen die Dichte des zufälligen Vektors $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)$. Die beiden Teilkomponenten von g sind

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2) &= y_1 = x_1 + x_2 \\ g_2(x_1, x_2) &= y_2 = x_2 \end{aligned}$$

Die Umkehrfunktion g^{-1} besteht aus den beiden Teilfunktionen:

$$\begin{aligned} \psi_1(y_1, y_2) &= x_1 = y_1 - y_2 \\ \psi_2(y_1, y_2) &= x_2 = y_2 \end{aligned}$$

$$|J| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 1$$

Faltung (3)

Dichte des zufälligen Vektors $\mathbf{Y} = (X_1 + X_2, X_2)$:

$$\begin{aligned} h_{\mathbf{Y}}(y_1, y_2) &= f_{X_1,X_2}(\psi_1(y_1, y_2), \psi_2(y_1, y_2)) \cdot |J| \\ &= f_{X_1,X_2}(y_1 - y_2, y_2) \\ &= f_{X_1}(y_1 - y_2) \cdot f_{X_2}(y_2) \end{aligned}$$

Randdichte für $Y_1 = X_1 + X_2$:

$$\begin{aligned} h_{\mathbf{Y}_1}(y_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h_{\mathbf{Y}}(y_1, y_2)\, dy_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(y_1 - y_2) \cdot f_{X_2}(y_2)\, dy_2 =: f_{X_1} * f_{X_2}(y) \end{aligned}$$

Faltung (4)

Def. 56 (Faltung)
Die Verknüpfung $f_{X_1} * f_{X_2}$ zweier Funktionen f_1 und f_2 heißt Faltung aus f_1 und f_2.

Bem.: Die Dichte der Summe zweier unabhängiger Zufallsvariablen ist Faltung der beiden Einzeldichten.

$X_1, X_2 \sim R(0,1)$, $\mathbf{Y}$ *wie im letzten Beispiel*
Dichtefunktion von $Y_1 = X_1 + X_2$:

$$h_{Y_1}(y) = \int_0^1 f_{X_1}(y-x) \cdot \underbrace{f_{X_2}(x)}_{\equiv 1}\, dx = \int_0^1 f_{X_1}(y-x)\, dx$$

Faltung (5)
Es gilt: $0 \le X_i < 1, \quad i = 1, 2.$, d.h.

$$0 \le X_1 + X_2 = Y_1 < 2.$$

und für die Funktion f_{X_1}:

$$\begin{aligned}
f_{X_1}(y-x) &= \begin{cases} 1 & \text{, falls } 0 \le y - x \le 1 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{, falls } 0 \le x < y \le 1 \\ 1 & \text{, falls } 0 \le y-1 \le x \le 1 < y \\ 0 & \text{, falls } y - x \notin [0,1[\end{cases}
\end{aligned}$$

Faltung (6)
Randdichte Y_1 *von* $\mathbf{Y}$

$$\begin{aligned}
h_{Y_1}(y) &= \int_0^1 f_{X_1}(y-x)\, dx \\
&= \begin{cases} \int_0^y dx & \text{, falls } 0 \le y \le 1 \\ \int_{y-1}^1 dx & \text{, falls } 1 < y < 2 \\ 0 & \text{, falls } y \notin [0,2[\end{cases} \\
&= \begin{cases} y & \text{, falls } 0 \le y \le 1 \\ 2-y & \text{, falls } 1 < y < 2 \\ 0 & \text{, falls } y \notin [0,2[\end{cases}
\end{aligned}$$

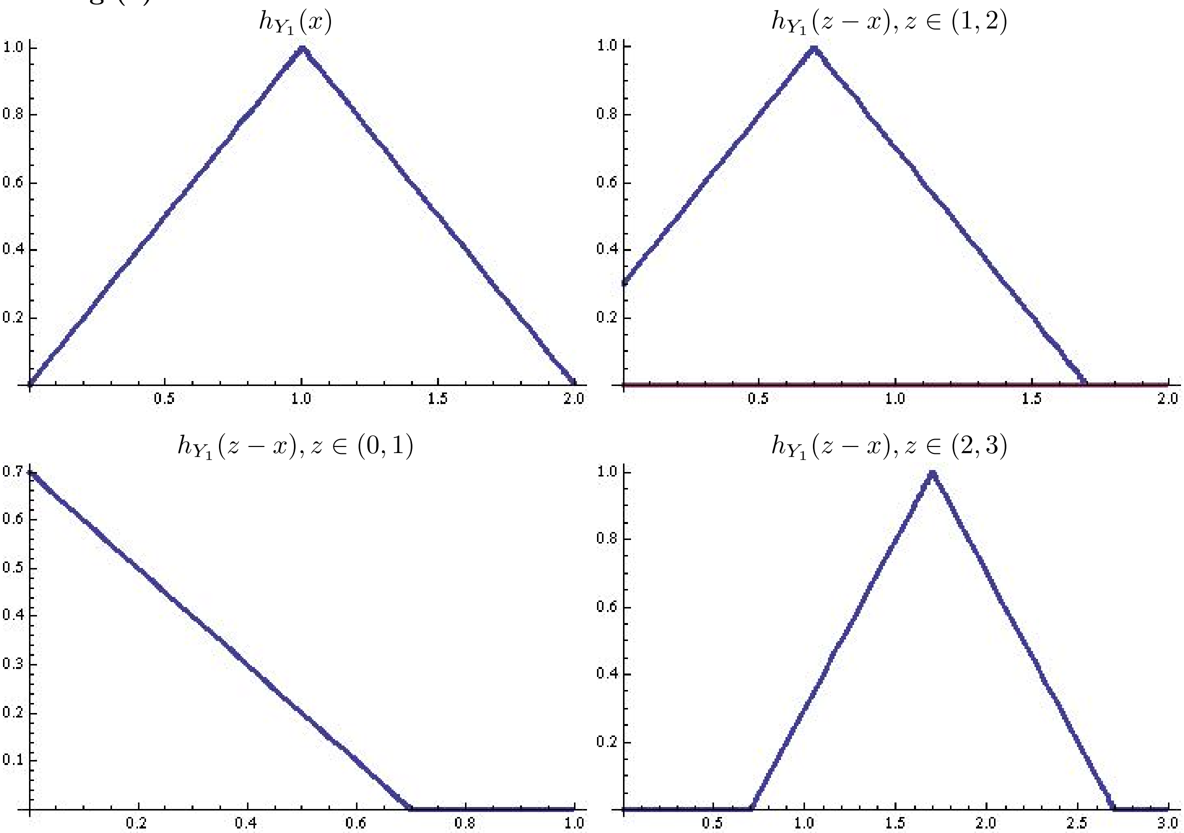
Faltung (7)
Wir addieren drei zufällige Variablen X_1, X_2, X_3, $X_i \sim R(0,1)$,

$$Y_3 = (X_1 + X_2) + X_3.$$

Für die Dichtefunktion der Zufallsgröße Y_3 gilt dann nach der Faltungsformel:

$$\begin{aligned} h_{Y_3}(z) &= h_{Y_1} * f_{X_3}(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h_{Y_1}(z-x) \cdot f_{X_3}(x)\, dx \\ &= \int\limits_{0}^{1} h_{Y_1}(z-x) \cdot f_{X_3}(x)\, dx = \int\limits_{0}^{1} h_{Y_1}(z-x)\, dx \end{aligned}$$

Faltung (8)



Faltung (9)

Das letzte Integral ist gleich

1. Fall 1: $0 < z < 1$ $\quad = \int_0^z (z-x)\, dx = \frac{z^2}{2}$
2. Fall 2: $1 < z < 2$

$$\begin{aligned} & \int_0^{z-1} (2-z+x)\, dx + \int_{z-1}^{1} (z-x)\, dx \\ = & \int_{2-z}^{1} t\, dt - \int_{1}^{z-1} t\, dt \\ = & \frac{1}{2}(1-(2-z)^2-(z-1)^2+1) \end{aligned}$$

3. Fall 3: $2 < z < 3$

$$\int_{z-2}^{1} (x-(z-2))\, dx = \int_0^{3-z} t\, dt = \frac{(3-z)^2}{2}$$

Faltung (10)

Wegen $0 \leq X_i < 1$ folgt dann:

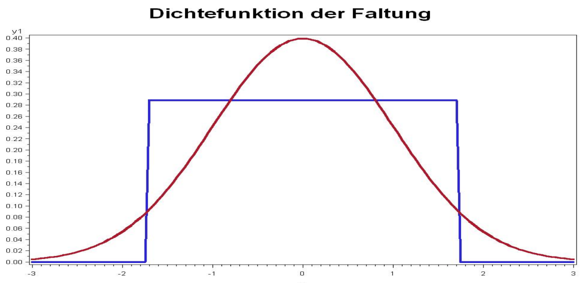
$$0 \leq (X_1 + X_2) + X_3 = Y_1 + X_3 = Y_3 < 3.$$

Für die Dichte der Summe der drei Zufallsgrößen X_1, X_2 und X_3 gilt also:

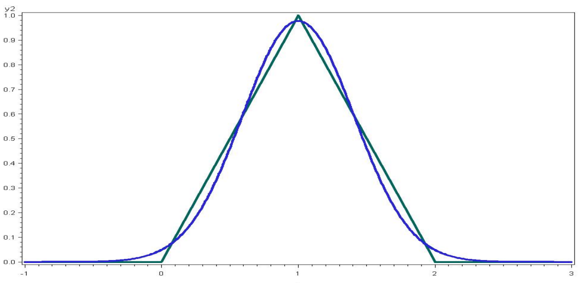
$$h_{Y_3}(z) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } z \notin [0,3[\\ \frac{z^2}{2} & \text{, falls } 0 \leq z \leq 1 \\ 1 - \frac{(z-1)^2}{2} - \frac{(2-z)^2}{2} & \text{, falls } 1 < z \leq 2 \\ \frac{(3-z)^2}{2} & \text{, falls } 2 < z < 3 \end{cases}$$

Faltung (Veranschaulichung)

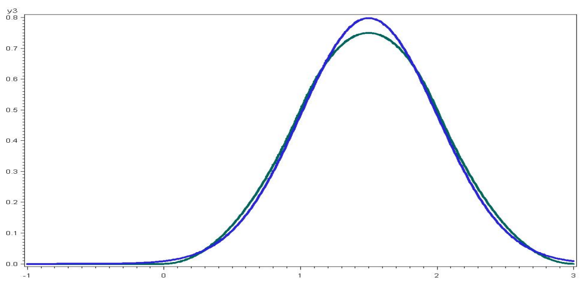
Seien $X_i \sim R(0,1), i = 1,2,3.$ Verteilungsfunktion von $\sum_{i=1}^n X_i$:



$n = 1$



$n = 2$



$n = 3$

Faltung (10)

Vermutung:

Die Summe unabhängiger Zufallsgrößen nähert sich bei wachsender Zahl der Zufallsgrößen einer Normalverteilung.

Diese Vermutung ist richtig.

Sie gilt sogar (unter sehr allgemeinen Voraussetzungen, wie $var(X_i) < \infty$) unabhängig davon, welche Verteilung diese Zufallsgrößen vorher hatten (Normal–, Gleich–, Exponentialverteilung oder diskret). Wir kommen später beim Zentralen Grenzwertsatz noch einmal darauf zurück.

Satz der Totalen Wahrscheinlichkeit

für stetige Zufallsvariablen

Sei A ein Ereignis, das (unter Umständen) von den Werten der stetigen Zufallsvariable X mit Dichte f_X abhängt. Dann gilt

Satz der Totalen Wahrscheinlichkeit für stetige Zufallsvariablen

$$P(A) = \int P(A|X = t) f_X(t)\, dt,$$

wobei über den Definitionsbereich von f_X integriert wird.

Beweis: Sei F_X die Verteilungsfunktion von X und $a_0 < a_{1,n} < \cdots < a_{n,n}$ eine Zerlegung des Definitionsbereiches ($a_o = -\infty, a_n = \infty$ ist erlaubt). Sei $\forall i = 1, \ldots, n-2$: $a_{i+1} - a_i = \Delta t$. Dann gilt nach dem Satz der Totalen Wahrscheinlichkeit

Satz der Totalen Wahrscheinlichkeit
für stetige Zufallsvariablen, Beweis, 2

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \sum_{i=0}^{n-1} P(A|X \in [a_{i,n}, a_{i+1,n}])P(X \in [a_{i,n}, a_{i+1,n}]) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} P(A|X \in [a_{i,n}, a_{i+1,n}])(F_X(a_{i+1,n} - F_X(a_{i,n})) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} P(A|X \in [a_{i,n}, a_{i+1,n}])f_X(t^*_{i,n})(a_{i+1,n} - a_{i,n}) \quad t^*_{i,n} \in [a_{i,n}, a_{i+1,n}] \quad \text{MWS} \\
&= \lim_{n\to\infty, \Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} P(A|X \in [a_{i,n}, a_{i+1,n}])f_X(t^*_{i,n})\Delta t \\
&= \int P(A|X = t)f_X(t)\, dt.
\end{aligned}
$$

Anwendung auf Faltung
Seien f_{X_1} und f_{X_2} Dichten von X_1 bzw. X_2 und sei das Ereignis $A := \{X_1 + X_2 < t\}$, X_1 und X_2 unabhängig.

$$
\begin{aligned}
F_{X_1+X_2}(t) &= P(A) = \int P(A|X_2 = s)f_{X_2}(s)\, ds \\
&= \int P(X_1 + X_2 < t|X_2 = s)f_{X_2}(s)\, ds \\
&= \int P(X_1 < t - s)f_{X_2}(s)\, ds \quad X_1, X_2 \text{ unabhängig} \\
f_{X_1+X_2}(t) &= \frac{d}{dt}F_{X_1+X_2}(t) = \int \frac{d}{dt}F_{X_1}(t-s)f_{X_2}(s)\, ds \\
&= \int f_{X_1}(t-s)f_{X_2}(s)\, ds
\end{aligned}
$$

11.7 Transformationssatz für Erwartungswerte

Satz. Es sei $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)^T$ ein zufälliger Vektor und $g\colon \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung.
a) $\mathbf{X}$ diskret mit Wkt.funktion (Zähldichte) f. Falls

$$\sum_{\mathbf{x}} |g(\mathbf{x})|f(\mathbf{x}) < \infty \qquad \text{so:} \qquad \mathbf{E}(g(\mathbf{X})) = \sum_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x})f(\mathbf{x}).$$

b) $\mathbf{X}$ stetig mit Dichtefunktion f.

$$\mathbf{E}g(X) = \int_{\mathbb{R}^p} g(x_1, \ldots, x_p) \cdot f(x_1, \ldots, x_p)\, dx_1 \ldots dx_p,$$

falls das Integral $\int |g(\mathbf{x})|f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ existiert.

Transformationssatz für Erwartungswerte

Beispiel

Es sei $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ *ein stetiger zufälliger Vektor mit Dichtefunktion* $f(x_1, x_2)$*. Wir definieren die Funktion* $g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *durch* $g(\mathbf{X}) := X_1 + X_2$*. Dann gilt:*

$$\mathbf{E}(X_1 + X_2) = \mathbf{E}X_1 + \mathbf{E}X_2$$

Allgemeiner,

$$\mathbf{E}(c \cdot X_1 + d \cdot X_2) = c \cdot \mathbf{E}X_1 + d \cdot \mathbf{E}X_2.$$

Transformationssatz für Erwartungswerte

Beispiel (Fortsetzung)

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}g(\mathbf{X}) &= \mathbf{E}(X_1 + X_2) = \int_{\mathbb{R}^2} g(x_1, x_2) \cdot f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 + x_2) \cdot f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} x_1 f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 + \int_{\mathbb{R}^2} x_2 f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\, dx_2 \right) dx_1 + \int_{-\infty}^{\infty} x_2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\, dx_1 \right) dx_2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 \cdot f_{X_1}(x_1)\, dx_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} x_2 \cdot f_{X_2}(x_2)\, dx_2 = \mathbf{E}X_1 + \mathbf{E}X_2
\end{aligned}$$

12 Korrelation

Def. 57 (Korrelationskoeffizient)
Es seien X_1 und X_2 zwei zufällige Variablen, für die gilt: $0 < \sigma_{X_1}, \sigma_{X_2} < \infty$. Dann heißt der Quotient

$$\varrho(X_1, X_2) = \frac{\operatorname{cov}(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2}}$$

Korrelationskoeffizient der Zufallsgrößen X_1 und X_2.
Ist $\operatorname{cov}(X_1, X_2) = 0$ dann heißen die beiden Zufallsgrößen unkorreliert.

Bem.: X_1 und X_2 unabhängig $\Rightarrow \operatorname{cov}(X_1, X_2) = 0$. Die Umkehrung der Aussage gilt i.a. nicht.

Korrelation

2x2 Tafel

Y X	0(Sportler)	1(Nichtsportler)	Summe
0(w)	p_{11}	p_{12}	$p_{1.}$
1(m)	p_{21}	p_{22}	$p_{2.}$
Summe	$p_{.1}$	$p_{.2}$	1

$$X \sim Bi(1, p_{.2}) \qquad Y \sim Bi(1, p_{2.})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X) &= p_{.2} \qquad var(X) = p_{.2}(1 - p_{.2}) = p_{.2}p_{.1} \\ \mathbf{E}(Y) &= p_{2.} \qquad var(Y) = p_{2.}(1 - p_{2.}) = p_{2.}p_{1.} \end{aligned}$$

Korrelation
2x2 Tafel

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbf{E}(X \cdot Y) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = p_{22} - p_{.2}p_{2.}$$

Korrelationskoeffizient:

$$\rho = \frac{p_{22} - p_{.2}p_{2.}}{\sqrt{p_{.2}p_{1.}p_{2.}p_{.1}}} = \frac{p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21}}{\sqrt{p_{.2}p_{2.}p_{1.}p_{.1}}}$$

$$\begin{aligned} p_{22} - p_{2.}p_{.2} &= p_{22} - (p_{21} + p_{22})(p_{12} + p_{22}) \\ &= p_{22} - (p_{21}p_{12} + p_{22}p_{12} + p_{21}p_{22} + p_{22}^2) \\ &= p_{22}(1 - p_{12} - p_{21} - p_{22}) - p_{21}p_{12} \\ &= p_{22}p_{11} - p_{21}p_{12} \end{aligned}$$

Korrelationskoeffizient

Satz
Es seien X_1 und X_2 zwei Zufallsgrößen mit $\sigma_{X_1}, \sigma_{X_2} > 0$. Dann gilt für den Korrelationskoeffizienten:

$$-1 \leq \varrho(X_1, X_2) \leq 1.$$

Beweis: Wir definieren eine Funktion A wie folgt:

$$A(t, u) := \mathbf{E}[t \cdot (X_1 - \mathbf{E}X_1) + u \cdot (X_2 - \mathbf{E}X_2)]^2 \geq 0.$$

Es gilt für alle $t, u \in \mathbb{R}$:

Korrelationskoeffizient

Beweis des Satzes (Fortsetzung,1)

$$\begin{aligned}
0 &\le A(t,u) = \mathbf{E}[t\cdot(X_1-\mathbf{E}X_1)+u\cdot(X_2-\mathbf{E}X_2)]^2\\
&= \mathbf{E}(t^2(X_1-\mathbf{E}X_1)^2+u^2(X_2-\mathbf{E}X_2)^2)\\
&\quad +2tu\mathbf{E}(X_1-\mathbf{E}X_1)(X_2-\mathbf{E}X_2)\\
&= t^2\mathbf{E}(X_1-\mathbf{E}X_1)^2+u^2\mathbf{E}(X_2-\mathbf{E}X_2)^2\\
&\quad +2tu\mathbf{E}((X_1-\mathbf{E}X_1)(X_2-\mathbf{E}X_2))\\
&= t^2\mathrm{Var}\,X_1+2\cdot t\cdot u\cdot \mathrm{cov}\,(X_1,X_2)+u^2\mathrm{Var}\,X_2
\end{aligned}$$

Korrelationskoeffizient

Beweis des Satzes (Fortsetzung,2)

Wir setzen $t := \sigma_{X_2}$, $u := \sigma_{X_1}$ und dividieren durch $\sigma_{X_1}\cdot\sigma_{X_2}$:

$$\begin{aligned}
\frac{A(\sigma_{X_2},\sigma_{X_1})}{\sigma_{X_1}\cdot\sigma_{X_2}} &= \frac{\sigma_{X_2}^2\sigma_{X_1}^2+2\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}\mathrm{cov}\,(X_1,X_2)+\sigma_{X_1}^2\sigma_{X_2}^2}{\sigma_{X_1}\cdot\sigma_{X_2}}\\
&= \sigma_{X_1}\cdot\sigma_{X_2}+2\cdot\mathrm{cov}\,(X_1,X_2)+\sigma_{X_1}\cdot\sigma_{X_2}\\
&= 2\cdot\sigma_{X_1}\cdot\sigma_{X_2}+2\cdot\mathrm{cov}\,(X_1,X_2)\ge 0
\end{aligned}$$

Also:

$$\underline{\sigma_{X_1}\cdot\sigma_{X_2}+\mathrm{cov}\,(X_1,X_2)\ge 0}.$$

Andererseits gilt aber auch mit $t := -\sigma_{X_2}$ und $u := \sigma_{X_1}$ sowie derselben Herleitung wie oben:

Korrelationskoeffizient

Beweis des Satzes (Fortsetzung,3)

$$\begin{aligned}
\frac{A(-\sigma_{X_2},\sigma_{X_1})}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} &= \frac{\sigma_{X_2}^2\sigma_{X_1}^2-2\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}\cdot\mathrm{cov}\,(X_1,X_2)+\sigma_{X_1}^2\sigma_{X_2}^2}{\sigma_{X_1}\cdot\sigma_{X_2}}\\
&= 2\cdot\sigma_{X_1}\cdot\sigma_{X_2}-2\cdot\mathrm{cov}\,(X_1,X_2)\ge 0
\end{aligned}$$

Also:

$$\underline{\sigma_{X_1}\cdot\sigma_{X_2}-\mathrm{cov}\,(X_1,X_2)\ge 0}.$$

Beides zusammen ergibt

$$-\sigma_{X_1}\cdot\sigma_{X_2}\le \mathrm{cov}\,(X_1,X_2)\le\sigma_{X_1}\cdot\sigma_{X_2}.$$

Wir stellen etwas um und erhalten:

$$-1\le\frac{\mathrm{cov}\,(X_1,X_2)}{\sigma_{X_1}\cdot\sigma_{X_2}}=\varrho(X_1,X_2)\le 1.$$

Korrelationskoeffizient

Bem.: Die Ungleichung kann auch direkt aus der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung hergeleitet werden.

Satz

Es seien X_1 und X_2 zwei Zufallsgrößen, für die $\sigma_{X_1},\sigma_{X_2}>0$ ist. Dann gilt $|\varrho(X_1,X_2)|=1$ genau dann, wenn es Zahlen $a,b\in\mathbb{R}$ $(a\neq 0)$ gibt, so daß gilt: $P(X_1=a\cdot X_2+b)=1$.

Korrelationskoeffizient

Beweis des Satzes ($\Longleftarrow$)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ so, daß $P(X_1 = a \cdot X_2 + b) = 1$. Für Erwartungswert und Varianz von X_1 gilt dann:

$$\mathbf{E}X_1 = \mathbf{E}(a \cdot X_2 + b) = a \cdot \mathbf{E}X_2 + b, \quad \sigma^2_{X_1} = a^2 \cdot \sigma^2_{X_2}$$

$$\begin{aligned}
\varrho(X_1, X_2) &= \frac{\operatorname{cov}(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2}} = \frac{\mathbf{E}((X_1 - \mathbf{E}X_1)(X_2 - \mathbf{E}X_2))}{|a| \cdot \sigma_{X_2} \cdot \sigma_{X_2}} \\
&= \frac{\mathbf{E}([(aX_2 + b) - (a\mathbf{E}X_2 + b)](X_2 - \mathbf{E}X_2))}{|a| \cdot \sigma^2_{X_2}} \\
&= \frac{a \cdot \mathbf{E}(X_2 - \mathbf{E}X_2)^2}{|a| \cdot \sigma^2_{X_2}} = \begin{cases} 1 & \text{, falls } a > 0 \\ -1 & \text{, falls } a < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Korrelationskoeffizient

Beweis des Satzes ($\Longrightarrow$)

Es gelte $|\varrho(X_1, X_2)| = 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\varrho(X_1, X_2) &= \frac{\operatorname{cov}(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2}} = \frac{\mathbf{E}((X_1 - \mathbf{E}X_1) \cdot (X_2 - \mathbf{E}X_2))}{\sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2}} \\
&= \mathbf{E}\left(\frac{X_1 - \mathbf{E}X_1}{\sigma_{X_1}} \cdot \frac{X_2 - \mathbf{E}X_2}{\sigma_{X_2}}\right) = \mathbf{E}(X_1^* \cdot X_2^*),
\end{aligned}$$

wobei

$$X_1^* := \frac{X_1 - \mathbf{E}X_1}{\sigma_{X_1}}, \qquad X_2^* := \frac{X_2 - \mathbf{E}X_2}{\sigma_{X_2}}.$$

Für die Varianz der Zufallsgrößen X_i^* $(i = 1, 2)$ gilt:

Korrelationskoeffizient

Beweis des Satzes ($\Longrightarrow$) (2)

$$\begin{aligned}
\sigma^2_{X_i^*} &= \mathbf{E}\,(X_i^* - \mathbf{E}X_i^*)^2 = \mathbf{E}\,(X_i^*)^2 - (\mathbf{E}X_i^*)^2 \\
&= \mathbf{E}\left(\frac{X_i - \mathbf{E}X_i}{\sigma_{X_i}}\right)^2 - \left(E\left(\frac{X_i - \mathbf{E}X_i}{\sigma_{X_i}}\right)\right)^2 \\
&= \frac{1}{\sigma^2_{X_i}} \cdot \left(\mathbf{E}(X_i - \mathbf{E}X_i)^2 - (\mathbf{E}(X_i - \mathbf{E}X_i))^2\right) \\
&= \frac{1}{\sigma^2_{X_i}} \cdot \sigma^2_{X_i - \mathbf{E}X_i} = \frac{1}{\sigma^2_{X_i}} \cdot \sigma^2_{X_i} = 1
\end{aligned}$$

Korrelationskoeffizient

Beweis des Satzes ($\Longrightarrow$), (3)

Offenbar gilt für die Erwartungswerte $(i = 1, 2)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X_i^* &= \mathbf{E}\left(\frac{X_i - \mathbf{E}X_i}{\sigma_{X_i}}\right) = \frac{1}{\sigma_{X_i}} \cdot (\mathbf{E}X_i - \mathbf{E}(\mathbf{E}X_i)) \\
&= \frac{1}{\sigma_{X_i}} \cdot (\mathbf{E}X_i - \mathbf{E}X_i) = 0
\end{aligned}$$

Daraus folgt: $\varrho(X_1, X_2) = \mathbf{E}\,(X_1^* \cdot X_2^*)$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

$\underline{\varrho(X_1, X_2) = 1}$ und $\underline{\varrho(X_1, X_2) = -1}$

Korrelationskoeffizient

Beweis des Satzes ($\Longrightarrow$), (4), $\underline{\varrho(X_1, X_2) = 1}$

Wir untersuchen die Varianz der Zufallsgröße $X_1^* - X_2^*$:

$$\begin{aligned}
\sigma^2_{X_1^*-X_2^*} &= \mathbf{E}\left((X_1^* - X_2^*) - \mathbf{E}\left(X_1^* - X_2^*\right)\right)^2 = \mathbf{E}\left(X_1^* - X_2^*\right)^2 \\
&= \mathbf{E}\left(X_1^*\right)^2 - 2 \cdot \mathbf{E}\left(X_1^* \cdot X_2^*\right) + \mathbf{E}\left(X_2^*\right)^2 \\
&= 1 - 2 \cdot \varrho(X_1, X_2) + 1 = 0
\end{aligned}$$

Nun gilt aber $\sigma^2_{X_1^*-X_2^*} = 0$ genau dann, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $P\left(X_1^* - X_2^* = c\right) = 1$ ist. D.h. $\mathbf{E}\left(X_1^* - X_2^*\right) = c$. Wegen $EX_1^* = EX_2^* = 0$ ist $c = 0$, woraus folgt

$$P\left(X_1^* = X_2^*\right) = 1.$$

Korrelationskoeffizient

Beweis des Satzes ($\Longrightarrow$), (5), $\underline{\varrho(X_1, X_2) = 1}$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
1 &= P\left(X_1^* = X_2^*\right) \\
&= P\left(\frac{X_1 - \mathbf{E}X_1}{\sigma_{X_1}} = \frac{X_2 - \mathbf{E}X_2}{\sigma_{X_2}}\right) \\
&= P\left(X_1 = \frac{\sigma_{X_1} \cdot X_2 - \sigma_{X_1} \cdot EX_2}{\sigma_{X_2}} + \mathbf{E}X_1\right) \\
&= P\left(X_1 = \frac{\sigma_{X_1}}{\sigma_{X_2}} \cdot X_2 - \frac{\sigma_{X_1}}{\sigma_{X_2}} \cdot \mathbf{E}X_2 + \mathbf{E}X_1\right)
\end{aligned}$$

Wir definieren $a := \frac{\sigma_{X_1}}{\sigma_{X_2}} > 0$ und $b := \frac{\sigma_{X_1}}{\sigma_{X_2}} \cdot \mathbf{E}X_2 + EX_1$, und die Aussage ist für diesen Fall gezeigt.

Korrelationskoeffizient

Beweis des Satzes ($\Longrightarrow$), (6), $\underline{\varrho(X_1, X_2) = -1}$

Sei $\underline{\varrho(X_1, X_2) = -1}$: Hier untersucht man die Varianz der Zufallsgröße $X_1^* + X_2^*$ und zeigt, dass sie ebenfalls gleich Null ist. Danach verläuft der Beweis völlig analog zum Fall $\varrho(X_1, X_2) = 1$.

Def. 58 (standardisierte Zufallsgröße)

Eine Zufallsgröße, deren Erwartungswert gleich Null und deren Varianz gleich Eins sind, heißt <u>standardisierte Zufallsgröße</u>.

Korrelationskoeffizient

Seien $X, Y \sim (0, 1)$, X und Y unabhängig.

$$\begin{aligned}
X^* &= X \\
Y^* &= \rho X + \sqrt{1 - \rho^2} Y
\end{aligned}$$

Offenbar

$$\begin{aligned}
varX^* &= varY^* = 1 \\
cov(X^*, Y^*) &= \rho.
\end{aligned}$$

Korrelationskoeffizient
Zweidimensionale Normalverteilung
Seien $X, Y \sim \mathcal{N}(0,1)$, unabhängig, d.h. die gemeinsame Dichte ist

$$f(x,y) = \phi(x) \cdot \phi(y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

$$\begin{aligned} X^* &= X \\ Y^* &= \rho X + \sqrt{1-\rho^2}\; Y \end{aligned}$$

Wir suchen die gemeinsame Verteilung von (X^*, Y^*).
Transformation:

$$\begin{aligned} g_1(x,y) &= x \\ g_2(x,y) &= \rho x + \sqrt{1-\rho^2}\; y \end{aligned}$$

Korrelationskoeffizient
Zweidimensionale Normalverteilung
Inverse Transformation:

$$\begin{aligned} \psi_1(x^*, y^*) &= x^* \\ \psi_2(x^*, y^*) &= \frac{y^* - \rho x^*}{\sqrt{1-\rho^2}} \end{aligned}$$

Jacobi-Determinate

$$det(J) = det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

Korrelationskoeffizient
Zweidimensionale Normalverteilung, Dichte

$$\begin{aligned} h(x^*, y^*) &= f(\psi_1(x^*, y^*), \psi_2(x^*, y^*)) \cdot |det(J)| \\ &= f(x^*, \frac{y^* - \rho x^*}{\sqrt{1-\rho^2}}) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2}(x^{*2} + (\frac{y^*-\rho x^*}{\sqrt{1-\rho^2}})^2)} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^{*2} - 2\rho x^* y^* + y^{*2})} \end{aligned}$$

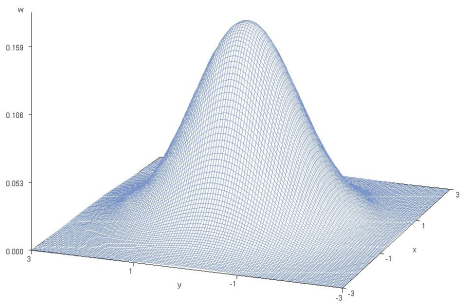
da der Exponent

$$x^{*2} + (\frac{y^* - \rho x^*}{\sqrt{1-\rho^2}})^2 = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}^2}\big((1-\rho^2)x^{*2} + (y^* - \rho x^*)^2\big)$$

Zweidimensionale Normalverteilung, Dichte

$\rho = 0$

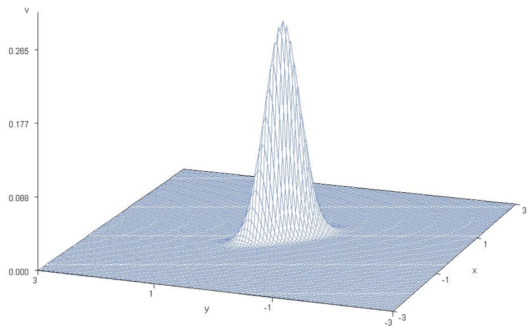
Dichtefunktion der 2-dimensionalen Standard-Normalverteilung



$\rho = 0.8$

Dichtefunktion einer 2-dimensionalen Normalverteilung

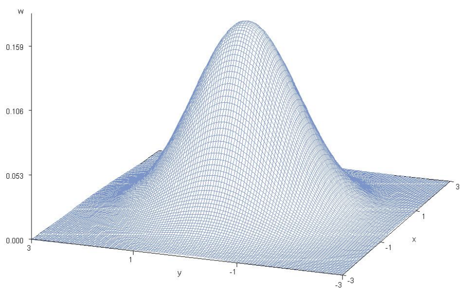
(rho=0.8)



$\rho = 0.5$

Dichtefunktion einer 2-dimensionalen Normalverteilung

(rho=0.5)



Normalverteilung

X und Y sind unabhängig gdw. X und Y sind unkorreliert

Satz: Es seien X, Y normalverteilt. Dann sind X und Y unabhängig gdw. sie unkorreliert sind.

Beweis: 1. Seien X und Y unabhängig. Dann sind sie unkorreliert (das gilt immer).

2. Seien X und Y unkorreliert, $\rho = 0$, und normalverteilt. Setzen wir in der letzten Formel für $h(x^*, y^*)$: $\rho = 0$ ein, erhalten wir

$$h(x^*, y^*) = f_{X^*}(x^*) f_{Y^*}(y^*).$$

13 Ungleichungen

13.1 Varianz-Ungleichung

Satz: Es sei X eine zufällige Variable. Dann gilt:

$$\min_{c\in\mathbb{R}} \mathbf{E}(X-c)^2 = \operatorname{Var} X.$$

Beweis: Für alle reellen Zahlen $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathbf{E}(X-c)^2 = \mathbf{E}(X-\mathbf{E}X+\mathbf{E}X-c)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{E}(X-\mathbf{E}X)^2 + 2\mathbf{E}((X-\mathbf{E}X)(\mathbf{E}X-c)) + (\mathbf{E}X-c)^2 \\
&= \mathbf{E}(X-\mathbf{E}X)^2 + 2(\mathbf{E}X-c)\underbrace{\mathbf{E}(X-\mathbf{E}X)}_{=0} + (\mathbf{E}X-c)^2 \\
&= \operatorname{Var} X + (\mathbf{E}X-c)^2 \geq \operatorname{Var} X
\end{aligned}$$

Setzen wir $c := \mathbf{E}X$ erhalten wir Gleichheit. □

13.2 Jensen-Ungleichung

Satz (Ungleichung von Jensen)
Sei X eine zufällige Variable mit $\mathbf{E}X < \infty$ und g eine differenzierbare und konvexe Funktion. Dann gilt:

$$\mathbf{E}g(X) \geq g(\mathbf{E}X).$$

Beweis: Sei $T(x)$ die Tangente an die Kurve der Funktion g im Punkt x_0,

$$g(x) \geq T(x) = g(x_0) + \underbrace{g'(x_0)}_{\text{Anstieg der Kurve in } x_0} \cdot (x-x_0).$$

Jensen-Ungleichung
Wir setzen $x := X$ und $x_0 := \mathbf{E}X$ und erhalten:

$$g(X) \geq g(\mathbf{E}X) + g'(\mathbf{E}X)\cdot(X-\mathbf{E}X).$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}g(X) &\geq \mathbf{E}(g(\mathbf{E}X) + g'(\mathbf{E}X)\cdot(X-\mathbf{E}X)) \\
&= g(\mathbf{E}X) + g'(\mathbf{E}X)\cdot\underbrace{\mathbf{E}(X-\mathbf{E}X)}_{=0} \\
&= g(\mathbf{E}X)
\end{aligned}$$

Jensen-Ungleichung

Folgerung
Es sei g differenzierbar und konkav. Weiterhin sei X eine zufällige Variable. Dann gilt:

$$\mathbf{E}g(X) \leq g(\mathbf{E}X).$$

Beweis: Da die Funktion g nach Voraussetzung konkav ist, ist die Funktion $(-g)$ konvex. Dann gilt nach der Jensen-Ungleichung:

$$\mathbf{E}((-g)(X)) \geq (-g)(\mathbf{E}X).$$

Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Jensen-Ungleichung
Beispiele

1. Es sei $g(x) = x^2$. Dann gilt $\mathbf{E}X^2 \geq (\mathbf{E}X)^2$. Daraus folgt (die schon bekannte Aussage):

$$\operatorname{Var} X = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2 = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 \geq 0.$$

2. Es sei $g(x) = |x|$. Dann gilt

$$\mathbf{E}|X| \geq |\mathbf{E}X|.$$

3. Es sei $g(x) = \ln x$. Diese Funktion ist konkav. Also gilt

$$\mathbf{E}(\ln X) \leq \ln(\mathbf{E}X).$$

13.3 Markov-Ungleichung

Satz (Ungleichung von Markov)
Sei X eine Zufallsgröße und $c > 0$. Dann gilt:

$$P(|X| > c) \leq \frac{\mathbf{E}|X|}{c}.$$

Beweis: Wir definieren eine Zufallsgröße Y wie folgt

$$Y: \quad \begin{pmatrix} 0 & c \\ P(|X| \leq c) & P(|X| > c) \end{pmatrix}$$

Offenbar gilt $0 \leq Y \leq |X|$ bzw. $P(|X| - Y \geq 0) = 1$ und

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(|X| - Y) &\geq 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{E}|X| \geq EY \\ \mathbf{E}Y &= 0 \cdot P(|X| \leq c) + c \cdot P(|X| > c) \\ &= c \cdot P(|X| > c) \leq \mathbf{E}|X| \end{aligned}$$

Division durch c liefert die Behauptung. $\square$

13.4 Tschebychev-Ungleichung

Satz (Ungleichung von Tschebychev)
Es sei $\varepsilon > 0$ und sei Y eine Zufallsgröße. Dann gilt:

$$P(|Y - \mathbf{E}Y| > \varepsilon) \leq \frac{\operatorname{Var} Y}{\varepsilon^2}.$$

Beweis: Wir verwenden die Markov-Ungleichung:

$$P(|X| > c) \leq \frac{\mathbf{E}|X|}{c}.$$

und setzen

$$X := (Y - \mathbf{E}Y)^{2i} \geq 0, \quad c := \varepsilon^{2i} \qquad (i \in \mathbb{N}).$$

Tschebychev-Ungleichung
Beweis, Fortsetzung
Da $\varepsilon > 0$ gilt, ist die Voraussetzung der Markov- Ungleichung erfüllt. Wir erhalten:

$$P(|Y - \mathbf{E}Y| > \varepsilon) = P\left((Y - \mathbf{E}Y)^{2i} > \varepsilon^{2i}\right) \leq \frac{\mathbf{E}(Y - \mathbf{E}Y)^{2i}}{\varepsilon^{2i}}.$$

Für $i := 1$ ergibt sich:

$$P(|Y - \mathbf{E}Y| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{E}(Y - \mathbf{E}Y)^2}{\varepsilon^2} = \frac{\operatorname{Var} Y}{\varepsilon^2}.$$

Tschebyschev-Ungleichung
2. Formulierung

Bem.: Aus der Tschebychev-Ungleichung folgt:

$$P(|Y - EY| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{\operatorname{Var} Y}{\varepsilon^2}.$$

Es sei $X \sim (\mu, \sigma^2)$, *also* $EX = \mu$, $\operatorname{Var} X = \sigma^2$.
Wir setzen $\varepsilon := k \cdot \sigma$ ($k \in \mathbb{N}$) und erhalten dann mit der Ungleichung von Tschebychev:

$$P(|X - \mu| \leq k \cdot \sigma) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2 \cdot \sigma^2} = 1 - \frac{1}{k^2}.$$

Tschebyschev-Ungleichung
Normalverteilung, $k\sigma$-Intervalle, Vergleich mit exakten Wahrscheinlichkeiten

k	exakt $\Phi(k\sigma) - \Phi(-k\sigma)$	Tschebychev-Ungleichung $1 - \frac{1}{k^2}$
1	0.68629	0
2	0.9545	0.75
3	0.9973	0.89
4	0.99997	0.93
5	≈ 1	0.96

Tschebyschev-Ungleichung

Bem.: Die Tschebyschev-Ungleichung gilt für beliebig verteilte Zufallsvariablen, die Erwartungswert und Varianz besitzen, insbesondere liegt die Zufallsvariable X mit Wahrscheinlichkeit ≥ 0.89 im 3σ-Intervall.

Tschebyschev-Ungleichung, Beispiel

Median der Zufallsvariablen X
Die Zahl $med = med(X)$ heißt Median, falls

$$P(X \leq med) \geq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad P(X \geq med) \geq \frac{1}{2}$$

Sei $P(X > 0) = 1$. Aus der Markov-Ungleichung folgt:

$$\frac{1}{2} \leq P(X \geq med) \leq \frac{\mathbf{E}|X|}{med}, \quad \text{d.h. } med \leq 2 \cdot \mathbf{E}|X|$$

ÜA: Berechnen Sie Median und Erwartungswert von

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 0.49 & 0.51 \end{pmatrix}$$

Tschebyschev-Ungleichung

Die Tschebyschev-Ungleichung kann nicht verschärft werden

$$X : \quad \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon^2} & 1 - \frac{1}{\varepsilon^2} & \frac{1}{2\varepsilon^2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}X = 0, \quad var(X) = 1 \qquad \text{(ÜA)}$$

Offenbar:

$$P(|X - \mathbf{E}X| \geq \varepsilon) = P(|X| \geq \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2}$$

rechte Seite bei der Tschebyschev-Ungleichung.

13.5 Hoeffding-Ungleichung

Satz (Hoeffding-Ungleichung)
Seien $Y_1, \dots, Y_n$ unabhängig und so dass $\mathbf{E}Y_i = 0$ und $a_i \le Y_i \le b_i$. Sei $\epsilon > 0$. Dann gilt $\forall t > 0$:

$$P(\sum_{i=1}^{n} Y_i \ge \epsilon) \le e^{-t\epsilon} \prod_{i=1}^{n} e^{t^2(b_i-a_i)^2/8},$$

Satz (Hoeffding-Ungleichung für Bernoulli Zufallsvariablen)
Seien $X_1, \dots, X_n \sim Bi(1,p)$. Dann gilt $\forall \epsilon > 0$:

$$P(|\overline{X}_n - p| > \epsilon) \le 2e^{-2n\epsilon^2},$$

wobei $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Hoeffding-Ungleichung
Beispiel

Seien $X_1, \dots, X_n \sim Bi(1,p)$,
d.h. Bernoulli: $X_i = 1$ mit Wkt. p, $X_i = 0$ sonst.
$n = 100, \epsilon = 0.2$.
Tschebyschev:

$$P(|\overline{X}_n - p|) > \epsilon) \le \frac{var\overline{X}_n}{\epsilon^2} = \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2} \le \frac{1}{4n\epsilon^2} = 0.0625.$$

Hoeffding:

$$P(|\overline{X}_n - p|) > \epsilon) \le 2e^{-2\cdot 100\cdot 0.2^2} = 0.00067.$$

Hoeffding-Ungleichung
Es geht sogar noch besser:
ZGWS (s. Kapitel Grenzwertsätze)

$$P(|\overline{X}_n - p|) > \epsilon) = P\big(|\underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}}}_{\sim\mathcal{N}(0,1)\quad \text{approx.}}| > \frac{n\epsilon}{\sqrt{np(1-p)}}\big)$$

$$\begin{aligned}
&\approx \big(1 - \Phi\big(\frac{n\epsilon}{\sqrt{np(1-p)}}\big)\big) + \Phi\big(-\frac{n\epsilon}{\sqrt{np(1-p)}}\big) \\
&= 2\Phi\big(-\frac{n\epsilon}{\sqrt{np(1-p)}}\big) \\
&\le 2\Phi\big(\frac{-n\epsilon}{\sqrt{n\frac{1}{4}}}\big) = 2\Phi(-2\epsilon\sqrt{n}) = 2\Phi(-4) \approx 10^{-4}.
\end{aligned}$$

Hoeffding-Ungleichung
$(1-\alpha)$ Konfidenzintervall

Sei $\alpha > 0$ und $\epsilon_n = \sqrt{\frac{1}{2n}\log\big(\frac{2}{\alpha}\big)}$.
Hoeffding:

$$P(|\overline{X}_n - p| > \epsilon_n) \le 2e^{-2n\epsilon_n^2} = \alpha.$$

Sei $C = (\overline{X}_n - \epsilon_n, \overline{X}_n + \epsilon_n)$.

$$\begin{aligned} P(p \notin C) &= P(|\overline{X}_n - p| > \epsilon_n) \leq \alpha \\ P(p \in C) &\geq 1 - \alpha \end{aligned}$$

D.h. das zufällige Intervall C überdeckt den wahren Parameter p mit Wkt. $\geq 1 - \alpha$.

Schätzung von Binomialwahrscheinlichkeiten

Vorgabe: ϵ, α**.**
Gesucht: notwendiger Stichprobenumfang um

$$P(|\hat{p} - p| > \epsilon) < \alpha$$

zu sichern.

Hoeffding: Es genügt:

$$2 \cdot e^{-2n\epsilon^2} < \alpha$$

also

$$n > \frac{-\ln \alpha/2}{2\epsilon^2} = \frac{\ln(2/\alpha)}{2\epsilon^2}.$$

Schätzung von Binomialwahrscheinlichkeiten
(2)

ZGWS:

$$\begin{aligned} P(|\hat{p} - p| > \epsilon) &= P\Big(\frac{n|\hat{p} - p|}{\sqrt{np(1-p)}} > \frac{n\epsilon}{\sqrt{np(1-p)}}\Big) \\ &\approx 2\Phi\Big(-\frac{n\epsilon}{\sqrt{np(1-p)}}\Big) \quad < \alpha \\ -\frac{n\epsilon}{\sqrt{np(1-p)}} &< \Phi^{-1}(\frac{\alpha}{2}) \\ \sqrt{n} &> \frac{-\Phi^{-1}(\frac{\alpha}{2})}{\epsilon}\sqrt{p(1-p)} \\ n &> \frac{\big(\Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})\big)^2}{4\epsilon^2} \end{aligned}$$

Schätzung von Binomialwahrscheinlichkeiten
(3)

Vergleich Hoeffding - ZGWS. **Vorgabe:** $P(|\hat{p} - p| > 0.01) < \alpha$

	Notwendige Stichprobenumfänge	
	ZGWS	Hoeffding
α	$\frac{1}{4\epsilon^2}\Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$	$\frac{1}{2\epsilon^2}\ln\frac{2}{\alpha}$
0.1	6765	15000
0.05	9640	18450
0.01	16641	26490
0.001	27225	38000

Hoeffding-Ungleichung

Beweis

Sei $t > 0$. Aus der Markov-Ungleichung folgt:

$$\begin{aligned} P(\sum_{i=1}^n Y_i \geq \epsilon) &= P(t\sum_{i=1}^n Y_i \geq t\epsilon) = P(e^{t\sum_{i=1}^n Y_i} \geq e^{t\epsilon}) \\ &\leq e^{-t\epsilon}\mathbf{E}\big(e^{t\sum_{i=1}^n Y_i}\big) = e^{-t\epsilon}\prod_{i=1}^n \mathbf{E}(e^{tY_i}). \end{aligned}$$

Da $a_i \leq Y_i \leq b_i$ lässt sich Y_i als konvexe Kombination von a_i und b_i schreiben,

$$Y_i = \alpha b_i + (1-\alpha)a_i,$$

wobei $\alpha = \frac{Y_i - a_i}{b_i - a_i}$.

Hoeffding-Ungleichung

Beweis (2)

NR.: Für konvexe Funktionen $f(x), x \in (a,b)$ gilt:

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) = \alpha f(b) + (1-\alpha)f(a)$$

(Die Kurve f liegt unterhalb der Sekante, $\alpha = \frac{x-a}{b-a}$.). Da die Exponentialfunktion konvex ist:

$$\begin{aligned} e^{tY_i} &\leq \alpha e^{tb_i} + (1-\alpha)e^{ta_i} \\ &= \frac{Y_i - a_i}{b_i - a_i}e^{tb_i} + \frac{b_i - Y_i}{b_i - a_i}e^{ta_i} \\ \mathbf{E}(e^{tY_i}) &\leq \frac{-a_i}{b_i - a_i}e^{tb_i} + \frac{b_i}{b_i - a_i}e^{ta_i} = e^{g(u)} \end{aligned}$$

Hoeffding-Ungleichung

Beweis (3)
wegen $\mathbf{E}Y_i = 0$. Dabei ist

$$\begin{aligned} u &= t(b_i - a_i) \\ g(u) &= -\gamma u + \log(1 - \gamma + \gamma e^u) \\ \gamma &= \frac{-a_i}{b_i - a_i}, \quad \gamma \in (0,1) \text{ da } a_i < 0 < b_i \\ g'(u) &= -\gamma + \frac{\gamma e^u}{1 - \gamma + \gamma e^u} \\ g''(u) &= \frac{\gamma e^u (1-\gamma)}{(1 - \gamma + \gamma e^u)^2} =: \frac{xy}{(x+y)^2} \\ g(0) &= g'(0) = 0, \quad g''(u) \leq \frac{1}{4} \quad \forall u > 0. \end{aligned}$$

wobei $x = \gamma e^u$, $y = 1 - \gamma$.

Hoeffding-Ungleichung

Beweis (4)

Die Aussage $0 \leq g''(u) = \frac{xy}{(x+y)^2} \leq \frac{1}{4}$ **folgt aus**

$$
\begin{aligned}
0 &\leq (x-y)^2 \quad \text{gdw.} \\
4xy &\leq x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2
\end{aligned}
$$

Satz von Taylor: es ex. ein $\xi \in (0, u)$:

$$
\begin{aligned}
g(u) &= g(0) + ug'(0) + \frac{u^2}{2} g''(\xi) \\
&= \frac{u^2}{2} g''(\xi) \leq \frac{u^2}{8} = \frac{t^2(b_i - a_i)^2}{8}
\end{aligned}
$$

Hoeffding-Ungleichung

Beweis (5)

Daraus folgt:

$$\mathbf{E}(e^{tY_i}) \leq e^{g(u)} \leq e^{t^2(b_i-a_i)^2/8}.$$

Damit:

$$P(\sum_{i=1}^{n} Y_i \geq \epsilon) = e^{-t\epsilon} \prod_{i=1}^{n} \mathbf{E}(e^{tY_i}) \leq e^{-t\epsilon} \prod_{i=1}^{n} e^{t^2(b_i-a_i)^2/8}.$$

Hoeffding-Ungleichung für Bernoulli

Beweis:

Sei $Y_i = \frac{1}{n}(X_i - p)$. Dann gilt $\mathbf{E}Y_i = 0$ und $a \leq Y_i \leq b$, wobei $a = -p/n$ und $b = (1-p)/n$.
Also $(b-a)^2 = 1/n^2$. Aus der Hoeffding-Ungleichung folgt:

$$P(\overline{X}_n - p > \epsilon) = P(\sum_{i=1}^{n} Y_i > \epsilon) \leq e^{-t\epsilon} e^{t^2/(8n)},$$

für jedes $t > 0$. Setze $t = 4n\epsilon$:

$$P(\overline{X}_n - p > \epsilon) \leq e^{-2n\epsilon^2}.$$

Hoeffding-Ungleichung für Bernoulli

Beweis (2)

Analog:

$$P(\overline{X}_n - p < -\epsilon) \leq e^{-2n\epsilon^2}.$$

Beides zusammen:

$$P(|\overline{X}_n - p| > \epsilon) \leq 2e^{-2n\epsilon^2}.$$

13.6 Chernov-Ungleichung

Während die Hoeffding-Ungleichung Abschätzungen für Wahrscheinlichkeiten von absoluten Fehlern angibt, gibt die Chernov-Ungleichung solche für relative Fehler an.

Satz (Chernov-Ungleichung)
Seien $X_1, \dots, X_n$ Zufallsvariablen mit $X_i \sim Bi(p_i)$, d.h. $P(X_i = 1) = \mathbf{E}(X_i) = p_i$. Dann gilt $\forall \delta \in (0,1)$:

$$P\left(\frac{\overline{X}_n - \overline{p}}{\overline{p}} > \delta\right) < \left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^{\mu}$$
$$P\left(-\frac{\overline{X}_n - \overline{p}}{\overline{p}} > \delta\right) < \left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}}\right)^{\mu}$$

wobei $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, $\overline{p}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n p_i$ und $\mu = n\overline{p} = \sum_{i=1}^n p_i$.

Chernov Ungleichung, Beweis
Beweis: Mit Hilfe der Markov-Ungleichung erhalten wir die folgende Ungleichung $\forall t > 0$

$$P(\sum_{i=1}^n X_i \geq \epsilon) = P(e^{t\sum_{i=1}^n X_i} \geq e^{t\epsilon}) \leq e^{-t\epsilon}\prod_{i=1}^n \mathbf{E}(e^{tX_i}).$$

Daraus folgt $\forall t > 0$

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\overline{X}_n - \overline{p}}{\overline{p}} > \delta\right) &= P(\overline{X}_n > (1+\delta)\overline{p}) = P(\sum_{i=1}^n X_i > \underbrace{(1+\delta)\mu}_{=\epsilon}) \\ &\leq \frac{\prod_{i=1}^n \mathbf{E}(e^{tX_i})}{e^{t(1+\delta)\mu}} \leq \frac{\prod_{i=1}^n (p_i e^t + (1-p_i))}{e^{t(1+\delta)\mu}} \end{aligned}$$

Schreiben wir $p_i e^t + (1-p_i) = \underbrace{p_i(e^t - 1)}_{=:x} + 1$ und bemerken, dass $1 + x < e^x \quad \forall x > 0$ so erhalten wir

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\overline{X}_n - \overline{p}}{\overline{p}} > \delta\right) &< \frac{\prod_{i=1}^n exp(p_i(e^t-1))}{e^{t(1+\delta)\mu}} \\ &= \frac{exp((e^t-1)\sum_{i=1}^n p_i)}{e^{t(1+\delta)\mu}} = \frac{exp((e^t-1)\mu)}{e^{t(1+\delta)\mu}}. \end{aligned}$$

Setzen wir nun $t = \log(1+\delta)$ ($t > 0$ für $\delta > 0$) erhalten wir für den letzen Bruch

$$\frac{exp((e^t-1)\mu)}{e^{t(1+\delta)\mu}} = \left(\frac{e^{1+\delta-1}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^{\mu} = \left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^{\mu}$$

Damit ist die erste Ungleichung bewiesen.
Analog (beachte $e^{-x} > 1 - x \quad \forall x \neq 0$) folgt $\forall t > 0$

$$\begin{aligned} P\left(-\frac{\overline{X}_n - \overline{p}}{\overline{p}} > \delta\right) &= P(\sum_{i=1}^n X_i < (1-\delta)\mu) \\ &= P(e^{-t\sum_{i=1}^n X_i} > e^{-t(1-\delta)\mu}) \leq \frac{\prod_{i=1}^n \mathbf{E}(e^{-tX_i})}{e^{-t(1-\delta)\mu}} \\ &\leq \frac{\prod_{i=1}^n (p_i e^{-t} + (1-p_i))}{e^{t(1-\delta)\mu}} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^n (1 - p_i(1-e^{-t}))}{e^{-t(1-\delta)\mu}} < \frac{exp((1-e^{-t})\mu)}{e^{-t(1-\delta)\mu}} \end{aligned}$$

Setzen wir diesmal $t = -\log(1-\delta)$ ($t > 0$ für $\delta > 0$) erhalten wir für den letzten Bruch

$$\frac{exp((1-e^{-t})\mu)}{e^{-t(1-\delta)\mu}} = \frac{e^{-\delta\mu}}{(1-\delta)^{(1-\delta)\mu}}$$

Damit ist auch die zweite Ungleichung bewiesen.

Satz (Chernov-Ungleichung, vereinfacht)
Seien $X_1, \dots, X_n$ Zufallsvariablen mit $X_i \sim Bi(p_i)$, d.h. $P(X_i = 1) = \mathbf{E}(X_i) = p_i$. Dann gilt $\forall \delta \in (0,1)$:

$$\begin{aligned} P(\frac{\overline{X}_n - \overline{p}}{\overline{p}} > \delta) &\leq e^{-\mu \frac{\delta^2}{2+\delta}} \leq e^{-\mu \frac{\delta^2}{3}} \\ P(-\frac{\overline{X}_n - \overline{p}}{\overline{p}} > \delta) &\leq e^{-\mu \frac{\delta^2}{2}} \end{aligned}$$

wobei $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, $\overline{p}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n p_i$ und $\mu = \sum_{i=1}^n p_i$.

Beweis:
Logarithmieren die rechte Seite der Chernov-Ungleichung und wenden die Ungleichungen $\log(1+x) \geq \frac{x}{1+x/2}$ (auf die erste Chernov-Ungleichung) und $\log(1-x) \geq -x - x^2/2$ (auf die zweite Chernov-Ungleichung) (Beweis unter Verwendung der Reihenentwicklung) an und erhalten $(0 < \delta < 1)$

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^\mu &= \mu(\delta - (1+\delta)\log(1+\delta)) \leq -\frac{\delta^2}{2+\delta}\mu \\ \log\left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}}\right)^\mu &= \mu(-\delta - (1-\delta)\log(1-\delta)) \leq -\frac{\delta^2}{2}\mu \leq e^{-\mu\frac{\delta^2}{3}} \end{aligned}$$

13.7 Mill Ungleichung

Satz (Mill-Ungleichung). Sei $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Dann

$$P(|Z| > t) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{-t^2/2}}{t} = \frac{2\phi(t)}{t}.$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} P(|Z| > t) &= 2P(Z > t) = 2\int_t^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_t^\infty (-\frac{1}{x})(-xe^{-\frac{x^2}{2}})\, dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \big(-\frac{1}{x})e^{-\frac{x^2}{2}}|_t^\infty - \underbrace{\int_t^\infty \frac{1}{x^2} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx\big)}_{\geq 0} \\ &\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{-t^2/2}}{t} \end{aligned}$$

14 Grenzwertsätze

14.1 Das Gesetz der Großen Zahlen

Das Gesetz der Großen Zahlen: Motivation

Der Erwartungswert einer zufälligen Variablen X ist in der Praxis meist nicht bekannt. Um ihn zu schätzen, sammelt man Beobachtungen $X_1, X_2, \dots, X_n$, und bildet dann das arithmetische Mittel:

$$\overline{X} = \tfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i =: \overline{X}_n$$

Beachten: die Beobachtungen $X_1, \dots, X_n$ müssen unabhängig oder wenigstens unkorreliert sein.

Das Gesetz der Großen Zahlen

Satz (Schwaches Gesetz der Großen Zahlen)

Es seien $X_1, \dots, X_n$ unkorrelierte zufällige Variablen mit $\mu := \mathbf{E}X_i$ und $\sigma^2 := \operatorname{Var} X_i < \infty$ (für alle $i = 1, \dots, n$). Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon) = 0.$$

Das Gesetz der Großen Zahlen

Beweis

Beweis: Da die Zufallsgrößen $X_1, \dots, X_n$ unkorreliert sind, gilt

$$\mathbf{E}\overline{X} = \mu, \qquad \operatorname{Var} \overline{X} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Mittels der Tschebychev–Ungleichung erhalten wir:

$$\begin{aligned} P(|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon) &= P(|\overline{X} - \mathbf{E}\overline{X}| > \varepsilon) \\ &\leq \frac{\operatorname{Var} \overline{X}}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n \cdot \varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

□

Das Gesetz der Großen Zahlen

Bem.: Aus dem Beweis erkennen wir, daß die Voraussetzungen etwas abgeschwächt werden können, anstelle $\operatorname{Var} X_i = \sigma^2$ genügt die Forderung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var} X_i = 0.$$

Bem.: Die Voraussetzung der endlichen Varianz kann auch fallen gelassen werden. Dann können wir aber zum Beweis nicht mehr die Tschebyschev-Ungleichung anwenden. Der Beweis geht dann über charakteristische Funktionen. Und wir brauchen die Unabhängigkeit.

Bem.: Auf die Unkorreliertheit kann nicht verzichtet werden. Sei etwa $EX_i = 0, varX_i = 1, cov(X_i, X_j) = \rho \quad (i \neq j)$. Dann

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} (\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var} X_i + \sum_{i\neq j} cov(X_i, X_j)) = \lim_{n\to\infty} \frac{n + n(n-1)\rho}{n^2} = \rho.$$

Das Gesetz der Großen Zahlen

Stochastischer Grenzwert

$$\text{Wenn} \qquad \lim_{n\to\infty} P(|Y_n - Y_0| > \varepsilon) = 0 \quad \forall\varepsilon > 0$$

dann heißt Y_0 stochastischer Grenzwert der Folge $\{Y_n\}$ und man schreibt $p - \lim Y_n = Y_0$ oder $Y_n \to_p Y_0$.

Das Gesetz der Großen Zahlen

Beispiel 1

Es seien $X_i \sim Bi(1,p)$

$$X_i : \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

$$\mu := \mathbf{E}X = \mathbf{E}X_i = p \qquad \sigma^2 = p \cdot (1-p) < \infty$$

Nach dem Schwachen Gesetz der Großen Zahlen folgt:

$$P\left(\left|\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - p\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Das Gesetz der Großen Zahlen

Beispiel 2

Es sei A ein Ereignis, $p = P(A)$ sei unbekannt.
Zur Schätzung von p führen wir eine Reihe von unabhängigen Experimenten durch, bei denen A und $\overline{A}$ die einzig möglichen Ausgänge seien.

n: # der Experimente, die durchgeführt werden.

$n(A)$: # Auftretens des Ereignisses A.

$$\hat{p}_n = \frac{n(A)}{n}$$

die relative Häufigkeit des Ereignisses A.

Frage: $\hat{p}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} p$?

Das Gesetz der Großen Zahlen

Beispiel 2, Fortsetzung

Dazu definieren wir Zufallsgrößen X_i $(i = 1, \ldots, n)$,

$$X_i := \begin{cases} 1 & , A \text{ im } i\text{–ten Experiment eintritt} \\ 0 & , A \text{ im } i\text{-ten Experiment nicht eintritt} \end{cases}$$

Dann gilt für alle $i = 1, \ldots, n$:

$$X_i \sim Bi(1,p)$$

und $P(X_i = 1) = p$ sowie $P(X_i = 0) = 1 - p$.

$$\mu = \mathbf{E}X_i = p \qquad \sigma^2 = \operatorname{Var} X_i = p \cdot (1-p)$$

$$\overline{X} := \tfrac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i = \tfrac{1}{n} \cdot n(A) = \hat{p}_n$$

Das Gesetz der Großen Zahlen

Beispiel 2, Fortsetzung

Wenden das Schwache Gesetz der Großen Zahlen an und erhalten:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P(|\hat{p}_n - p| > \varepsilon) &= \lim_{n\to\infty} P(|\overline{X}_n - \mu| > \varepsilon)\\ &= 0, \qquad \forall \varepsilon > 0\end{aligned}$$

Folglich gilt: $\hat{p}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} p$ oder, genauer, $\hat{p}_n \to_p p$

Bem.: Schätzungen $\hat{p}_n$, die gegen den zu schätzenden Parameter konvergieren heißen (schwach) konsistent.

Starkes Gesetz der Großen Zahlen

Satz (Gesetz der Großen Zahlen), ohne Beweis

Seien die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ identisch verteilt und unabhängig, $\mathbf{E}|X_i| < \infty$, $\mathbf{E}X_i = \mu$. Dann gilt

$$P(\omega : \lim_{n\to\infty} \overline{X}_n = \mu) = 1.$$

Bem.: Schwaches Gesetz der Großen Zahlen: Seien die $X_1, \ldots, X_n$ identisch verteilt, $\mathbf{E}X_i = \mu$ und unkorreliert ($cov(X_i, X_j) = \sigma^2 \delta_{ij}$). Dann gilt

$$\Rightarrow p - \lim \overline{X}_n = \mu.$$

Gesetz der Großen Zahlen

Anwendung 1

Das Gesetz der großen Zahlen eignet sich also z.B. zum Schätzen von Erwartungswerten.

Sei $X \sim F$ mit Dichte $f(x)$, den Beobachtungen $x_1, \ldots, x_n$ und $g(\cdot)$ eine beliebige Funktion.

Der Erwartungswert

$$\mathbf{E}(g(X)) = \int g(x) f(x)\, dx$$

wird (falls er existiert) geschätzt durch

$$\hat{I} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(x_i)$$

Gesetz der Großen Zahlen

Anwendung 2

Das Gesetz der großen Zahlen eignet sich auch zur Approximation von Integralen.

Ist $f > 0$ kann das Integral

$$I = \int g(x)\, dx$$

(falls es existiert) geschätzt werden durch

$$\hat{I} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{g(x_i)}{f(x_i)},$$

wobei die Beobachtungen x_i aus einer Population mit Dichte f stammen.

14.2 Der Satz von Glivenko–Cantelli

Def. 59 (Empirische Verteilungsfunktion)

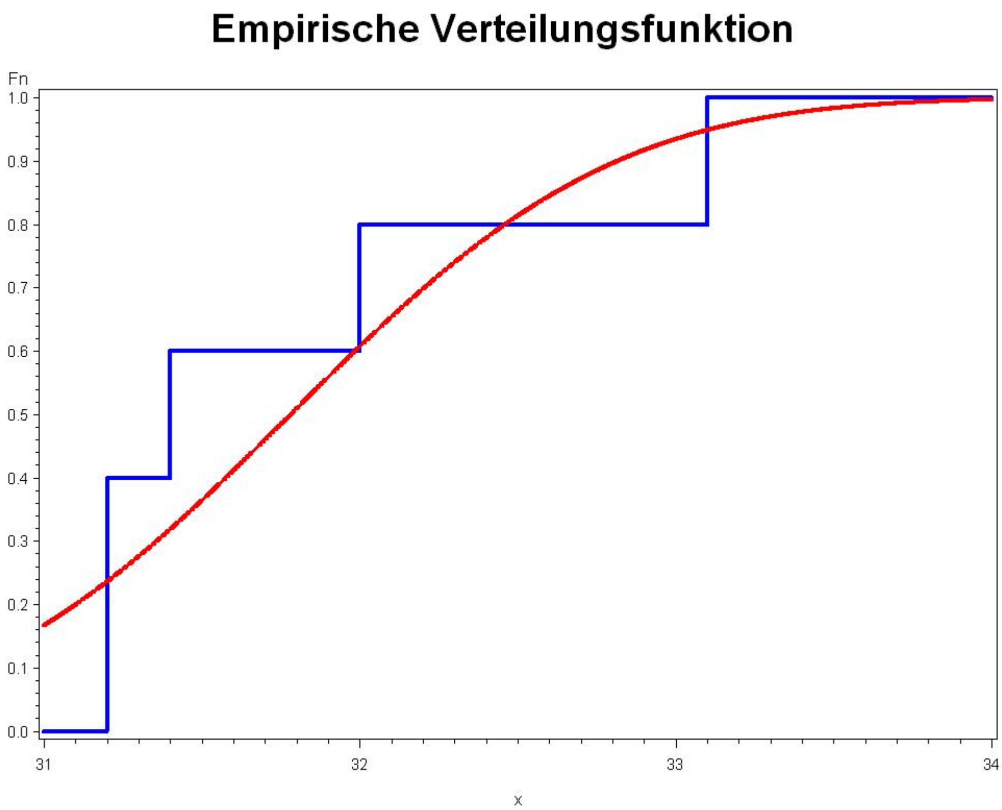
Seien $X_1, \ldots, X_n$ unkorreliert, $X_i \sim F$, und $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$, $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$ die geordnete Stichprobe. Die Funktion

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{\#\{X_i \colon X_i < x, i = 1, \ldots, n\}}{n} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x < X_{(1)} \\ \frac{i}{n} & \text{falls} \quad X_{(i)} < x \leq X_{(i+1)} \\ 1 & \text{falls} \quad X_{(n)} < x \end{cases} \end{aligned}$$

heißt empirische Verteilungsfunktion.

Der Satz von Glivenko–Cantelli

Veranschaulichung der empirischen Verteilungsfunktion



Der Satz von Glivenko–Cantelli

Satz von Glivenko–Cantelli (1)

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unkorreliert. Es gilt:

$$\lim_{n \to \infty} P(|F_n(x) - F(x)| > \varepsilon) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Beweis: Wir definieren Zufallsgrößen Y_{ix} $(i = 1, \ldots, n,\ x \in \mathbb{R})$ durch:

$$Y_{ix} = \begin{cases} 1 & \text{, falls } X_i < x \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Der Satz von Glivenko–Cantelli

Beweis (Fortsetzung)

Dann gilt offensichtlich für alle $i = 1, \dots, n$ und $x \in \mathbb{R}$:

$$Y_{ix} : \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - F(x) & F(x) \end{pmatrix}$$

D.h. $Y_{ix} \sim Bi(1, F(x))$. Sei, für alle $x \in \mathbb{R}$,

$$\overline{Y}_x := \tfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_{ix}.$$

Vergleichen wir die Zufallsgrößen $F_n(x)$ und $\overline{Y}_x$:

$$\overline{Y}_x = F_n(x).$$

Der Satz von Glivenko–Cantelli

Beweis (Fortsetzung)

Aus dem letzten Beispiel folgt, $\mu := \mathbf{E}Y_{ix} = F(x)$. Deshalb folgt aus dem schwachen Gesetz der großen Zahlen:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{Y}_x - \mu| > \varepsilon) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

D.h. für alle $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} P(|F_n(x) - F(x)| > \varepsilon) = 0$$

Der Satz von Glivenko–Cantelli

Verschärfung:

Satz von Glivenko–Cantelli **(2)**

Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige zufällige Variablen. Dann gilt:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| = 0\right) = 1.$$

Dieser Satz wird auch oft als der Hauptsatz der Statistik bezeichnet.

14.3 Konvergenz von Folgen zufälliger Variablen

Def. 60 (Stochastische Konvergenz)
Eine Folge $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zufälliger Variablen konvergiert stochastisch (in Wkt.) gegen eine zufällige Variable X, falls für alle $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

Wir bezeichnen dann: p–$\lim X_n = X$.

X heißt stochastischer Grenzwert der Folge $\{X_n\}$.

Konvergenz (2)

Def. 61 (fast sichere Konvergenz)
Eine Folge $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zufälliger Variablen heißt fast sicher konvergent gegen eine zufällige Variable X, falls gilt:

$$P\left(\left\{\omega\colon \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1.$$

Wir bezeichnen dann: $\lim X_n = X$ f.s.

X heißt f.s. Grenzwert der Folge $\{X_n\}$.

Konvergenz (3)

Def. 62 (Konvergenz im p-ten Mittel)
Es seien $X_1, \ldots, X_n, X$ zufällige Variablen mit $\mathbf{E}|X_i|^p < \infty, \mathbf{E}|X|^p < \infty$. $\{X_n\}$ konvergiert im p-ten Mittel gegen X, falls

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}|X_n - X|^p = 0.$$

Wir bezeichnen dann: $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ p.m. (q.m. wenn $p = 2$).

Konvergenz (4)

Def. 63 (Konvergenz in Verteilung)
Es sei $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von zufälligen Variablen. X sei eine Zufallsgröße mit der Verteilungsfunktion $F(x) = P(X < x)$.
Die Folge $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in Verteilung gegen die Zufallsgröße X, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$, in denen die Funktion F stetig ist, gilt:

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n < x) = F(x).$$

Wir bezeichnen dann: $X_n \longrightarrow^D X$.

Konvergenz
Zusammenhänge zwischen den Konvergenzbegriffen (1)

Lemma: Sei X eine Zufallsvariable mit
$\mathbf{E}|X|^p < \infty$, $p' < p$. Dann gilt

$$\left(\mathbf{E}|X|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \le \left(\mathbf{E}|X|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Beweis: Die Funktion $g(x) = |x|^t$ ist konvex für $t \ge 1$. Für eine beliebige Zufallsvariable Y gilt (Jensens Ungleichung)

$$|\mathbf{E}Y|^t \le \mathbf{E}|Y|^t.$$

Sei $Y = |X|^{p'}$, $t = \frac{p}{p'} \geq 1$. Daraus folgt

$$\big(\mathbf{E}|X|^{p'}\big)^{\frac{p}{p'}} \leq \mathbf{E}\big(\big(|X|^{p'}\big)^{\frac{p}{p'}}\big) = \mathbf{E}|X|^p.$$

□

Konvergenz

Zusammenhänge zwischen den Konvergenzbegriffen (2)

Folgerung

Sei $p' < p$.

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X \quad p.m. \Rightarrow \lim_{n\to\infty} X_n = X \quad p'.m.$$

Beweis: Wegen dem letzten Lemma gilt:

$$\big(\mathbf{E}|X_n - X|^{p'}\big)^{\frac{1}{p'}} \leq \big(\mathbf{E}|X_n - X|^p\big)^{\frac{1}{p}}.$$

□

Konvergenz

Zusammenhänge zwischen den Konvergenzbegriffen (3)

Lemma

Sei $p \geq 1$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X \quad p.m. \Rightarrow \text{p–lim}_{n\to\infty} X_n = X.$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Es gilt für alle n:

$$\begin{aligned} P(|X_n - X| > \varepsilon) &= P(|X_n - X|^p > \varepsilon^p) \\ &\leq \frac{\mathbf{E}|X_n - X|^p}{\varepsilon^p} \\ & \qquad \text{Markov-Ungleichung} \\ \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{E}|X_n - X|^p}{\varepsilon^p} = 0. \end{aligned}$$

□

Konvergenz

Zusammenhänge zwischen den Konvergenzbegriffen (4)

Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht:

Seien $X, \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Zufallsgrößen mit

$$P(X_n = n^\alpha) = \frac{1}{n}, \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

$\forall \epsilon \in (0,1): \quad P(|X_n| > \epsilon) = P(X_n = n^\alpha) = \frac{1}{n} \to 0$, also $\quad p - \lim X_n = 0$.

Andererseits: $\quad \mathbf{E}|X_n|^p = n^{\alpha p - 1}$ konvergiert nicht für $\alpha p \geq 1$.

Konvergenz

Zusammenhänge zwischen den Konvergenzbegriffen (5)

Satz: Seien $X, \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Zufallsgrößen

$$\lim X_n = X \quad \text{f.s.} \Rightarrow \text{p–}\lim X_n = X.$$

Beweis: Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gilt: $0 \leq$

$$\begin{aligned}
&\leq \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}\{|X_k - X| > \varepsilon\}\right) \\
&= P\big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\{|X_k - X| > \varepsilon\}\big) = P\big(|X_n - X| > \varepsilon \text{ für } \infty \text{ viele } n\big) \\
&\leq P(\overline{\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\}}) = 0
\end{aligned}$$

□

Konvergenz

Zusammenhänge zwischen den Konvergenzbegriffen (6)

Das folgende Beispiel zeigt, daß stochastische und fast sichere Konvergenz nicht identisch sind.

Konstruktion einer Folge $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *zufälliger Variablen mit* p–$\lim X_n = 0$*, nicht aber* $\lim X_n = 0$ f.s.
Es seien $\Omega = [0,1]$ und $\mathcal{E} = [0,1] \cap \mathcal{B}^1$ gegeben. Für alle Ereignisse $A \subseteq [0,1]$ gelte:

$$0 \leq P(A) = \int_A 1\,dx \leq 1.$$

Sei $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Ereignissen im Ereignisfeld $\mathcal{E}$,

Konvergenz

Zusammenhänge zwischen den Konvergenzbegriffen (7)

$$A_n := [k \cdot 2^{-h}, (k+1)\cdot 2^{-h}], \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

wobei für die Zahlen h und k folgendes gelte:

- $h, k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$;
- $n = 2^h + k; \quad (n \leq 2 \cdot 2^h)$
- $0 \leq k < 2^h$.

Die Folge $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definieren wir wie folgt:

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } \omega \in A_n \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Konvergenz

Zusammenhänge zwischen den Konvergenzbegriffen (8)

Untersuchen wir die stochastische Konvergenz von $\{X_n\}$:

Nach Definition der Folge $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gilt:

$$\begin{aligned} P(|X_n| > \varepsilon) &= P(|X_n| = 1) = P(A_n) \\ &= (k+1)\cdot 2^{-h} - k\cdot 2^{-h} \\ &= 2^{-h} \leq \frac{2}{n} \to 0, \end{aligned}$$

d.h. $\text{p--}\lim X_n = 0$.

Konvergenz

Zusammenhänge (9), Die Intervalle $A_n = [k\cdot 2^{-h}, (k+1)\cdot 2^{-h}]$

$n = 2^h + k$	h	k	A_n
$1 = 2^0 + 0$	0	0	$[0,1]$
$2 = 2^1 + 0$	1	0	$[0,\frac{1}{2}]$
$3 = 2^1 + 1$	1	1	$[\frac{1}{2},1]$
$4 = 2^2 + 0$	2	0	$[0,\frac{1}{4}]$

$n = 2^h + k$	h	k	A_n
$5 = 2^2 + 1$	2	1	$[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$
$6 = 2^2 + 2$	2	2	$[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$
$7 = 2^2 + 3$	2	3	$[\frac{3}{4},1]$
$8 = 2^3 + 0$	3	0	$[0,\frac{1}{8}]$

Die Folge $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist nirgends konvergent. Also

$$P\left(\left\{\omega\colon \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = 0\right\}\right) = 0 \neq 1.$$

Konvergenz

Zusammenhänge zwischen den Konvergenzbegriffen (10)

Satz

Es sei $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von zufälligen Variablen, für die es zwei Zufallsgrößen X und Y gibt, so daß gilt:

$$X = \text{p--}\lim X_n \text{ und } Y = \text{p--}\lim X_n.$$

Dann folgt daraus:

$$P(X = Y) = 1.$$

Beweis: Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann berechnen wir

$$P\left(\{\omega\colon |X(\omega) - Y(\omega)| > \varepsilon\}\right) = (*)$$

Konvergenz

Beweis des Satzes,(*)=$P(|X-Y|>\varepsilon)$

$$\begin{aligned}
&= P\left(|X-X_n+X_n-Y|>\varepsilon\right)\\
&\leq P\left(|X-X_n|+|X_n-Y|>\varepsilon\right)\\
&\leq P\left(\left\{|X_n-X|>\tfrac{\varepsilon}{2}\right\}\cup\left\{|X_n-Y|>\tfrac{\varepsilon}{2}\right\}\right)\\
&\leq P\left(\left\{|X_n-X|>\tfrac{\varepsilon}{2}\right\}\right)+P\left(\left\{|X_n-Y|>\tfrac{\varepsilon}{2}\right\}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

D.h.

$$P(|X-Y|>\varepsilon)=0 \quad \forall\varepsilon>0.$$

$P\left(\{\omega\colon X(\omega)=Y(\omega)\}\right)=1.$

Konvergenz

Zusammenhänge zwischen den Konvergenzbegriffen (11)

Lemma

$$\text{p–lim}_{\,n\to\infty}X_n=X\Rightarrow X_n\to^D X$$

Beweis: Seien $x'<x<x''\in\mathbb{R}$ sowie F und F_n die Verteilungsfunktionen von X bzw. X_n. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\{X<x'\} &= \{X<x',X_n<x\}\cup\{X<x',X_n\geq x\}\\
&\subseteq \{X_n<x\}\cup\{X<x',X_n\geq x\} \quad \Rightarrow\\
F(x') &\leq F_n(x)+\underbrace{P(|X_n-X|\geq x-x')}_{\to 0 \quad \text{wegen } X_n\to_p X}\\
F(x') &\leq \underline{\lim}_{n\to\infty}F_n(x)
\end{aligned}$$

Beweis von $\text{p–lim}_{\,n\to\infty}X_n=X\Rightarrow X_n\to^D X$ **(2)**

Weiterhin

$$\begin{aligned}
\{X_n<x\} &= \{X<x'',X_n<x\}\cup\{X\geq x'',X_n<x\}\\
&\subseteq \{X<x''\}\cup\{X\geq x'',X_n<x\} \quad \Rightarrow\\
F_n(x) &\leq F(x'')+\underbrace{P(|X_n-X|\geq x''-x)}_{\to 0 \quad \text{wegen } X_n\to_p X}\\
\overline{\lim}_{n\to\infty}F_n(x) &\leq F(x'')
\end{aligned}$$

Beides zusammen:

$$F(x')\leq\underline{\lim}_{n\to\infty}F_n(x)\leq\overline{\lim}_{n\to\infty}F_n(x)\leq F(x'')$$

Beweis von $\text{p–lim}_{\,n\to\infty}X_n=X\Rightarrow X_n\to^D X$ **(3)**

Wenn jetzt x Stetigkeitsstelle und $x'\to x-0$ und $x''\to x+0$ so $F(x')\to F(x)$ und $F(x'')\to F(x)$ und

$$\lim F_n(x)=F(x).$$

Die Rückrichtung gilt i.A. nicht:

$X \sim Bi(1, \frac{1}{2}),\ X_n = 1 - X \quad \forall n \in \mathbb{N}$
X und X_n besitzen dieselbe Verteilung $Bi(1, \frac{1}{2})$, $\quad X_n \to^D X$.
Es gilt aber nicht: $\quad X_n \to_p X$, da $\quad |X_n - X| = |1 - 2X| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Konvergenzarten
Die verschiedenen Arten der Konvergenz einer Folge von Zufallsgrößen gegen eine zufällige Variable bilden z.T. eine gewisse Hierarchie:

$$\begin{aligned}
\lim X_n = X \text{ f.s.} &\implies \text{p–}\lim X_n = X \\
&\implies X_n \longrightarrow^D X \\
\lim X_n = X \text{ q.m.} &\implies \text{p–}\lim X_n = X \\
\lim X_n = X \text{ p.m.} &\implies \text{p–}\lim X_n = X \quad (p \geq 1)
\end{aligned}$$

Die Umkehrungen gelten im allgemeinen nicht.

Konvergenz in Verteilung
Beispiel

$X_n \sim Bi(n, p_n), \quad \lim np_n = \lambda, \quad Y \sim Poi(\lambda) \quad \Rightarrow X_n \to^D Y.$

Diese Aussage kennen wir schon von früher.
Weitere werden wir im nächsten Abschnitt kennenlernen.

14.4 Der zentrale Grenzwertsatz

Der Zentrale Grenzwertsatz

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mu := \mathbf{E}X_i; \sigma^2 := \operatorname{Var} X_i$. Seien Zufallsgrößen Z_n, $\overline{Z}_n$ und Y_n definiert durch: $Z_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$ bzw. $\overline{Z}_n := \frac{Z_n}{n}$ und

$$Y_n = \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{Z}_n - \mu}{\sigma} = \frac{Z_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

Dann gilt für alle reellen x:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\tfrac{Z_n - n\cdot\mu}{\sqrt{n}\cdot\sigma} < x\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(Y_n < x\right) = \Phi(x)$$

Der zentrale Grenzwertsatz

Beweis: Als Hilfsmittel werden charakteristische Funktionen verwendet, siehe unten. □

Bem.: Die Folge $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in Verteilung gegen eine Zufallsgröße Z, $Y_n \longrightarrow^D Z$, $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Anwendungen:

- Simulation bei der Erzeugung einer normalverteilten Zufallsgröße aus Pseudozufallszahlen
- Approximation von Wahrscheinlichkeitsverteilungen (insbesondere von Teststatistiken)

Der zentrale Grenzwertsatz

Genauigkeitsabschätzung (1)

Satz (Berry-Esséen Schranke)

Es seien die Voraussetzungen des zentralen Grenzwertsatzes erfüllt und $M := \mathbf{E}|X_i - \mu|^3 < \infty$. Dann gilt:

$$\left|P\left(\tfrac{Z_n - n\cdot\mu}{\sqrt{n}\cdot\sigma} < x\right) - \Phi(x)\right| < \frac{0.4748\cdot M}{\sigma^3\cdot\sqrt{n}} =: K,$$

Bem.: Die Schranke wird laufend verbessert (aktueller Stand: 2012).

Der zentrale Grenzwertsatz

Genauigkeitsabschätzung nach Berry-Esséen (2)

Es seien $X_i \sim R(0,1)$, $\mu = \frac{1}{2}, \sigma^2 = \frac{1}{12}$

$$\begin{aligned} M &= \mathbf{E}|X_i - \mu|^3 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x-\mu|^3 \cdot f(x)\,dx \\ &= \int_0^1 |x - \tfrac{1}{2}|^3\,dx = 2\cdot\int_{\frac{1}{2}}^{1} (x-\tfrac{1}{2})^3\,dx = \tfrac{1}{32} \end{aligned}$$

n	12	100	1000
K	0.178	0.062	0.0195

Der zentrale Grenzwertsatz

Genauigkeitsabschätzung (3)

Seien $X_i \sim Poi(\lambda)$, $\mathbf{E}X_i = \operatorname{Var} X_i = \lambda$

$$\begin{aligned} M^{\frac{1}{3}} &= \big(\mathbf{E}|X_i-\lambda|^3\big)^{\frac{1}{3}} \le \big(\mathbf{E}|X_i-\lambda|^4\big)^{\frac{1}{4}} \\ &= \big(\mathbf{E}(X_i-\lambda)^4\big)^{\frac{1}{4}} = (\lambda+3\lambda^2)^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

Berry-Esseen Schranke:

$$K \le \frac{0.4748(\lambda+3\lambda^2)^{\frac{3}{4}}}{\lambda^{\frac{3}{2}}\sqrt{n}} \to_{\lambda\to\infty} \frac{0.4748\cdot 3^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{n}} =: K'$$

n	12	100	1000
K'	0.312	0.108	0.0342

Der zentrale Grenzwertsatz

X_i Bernoulli

Satz (Moivre–Laplace)

Es seien $X_i \sim Bi(1,p)$, unabhängig. Dann gilt für $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i$ $(\sim Bi(n,p))$:

$$Z_n \to^D Z \sim \mathcal{N}\big(np, np(1-p)\big)$$

Bem.: Für ausreichend großes $n \in \mathbb{N}$ kann also die Binomialverteilung durch eine Normalverteilung ersetzt werden,

$$P(Z_n < y) \approx \Phi\left(\frac{y-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}\right).$$

Satz von Moivre–Laplace

Beweis

Beweis: Mit $\mathbf{E}Z_n = np$ und $\operatorname{Var} Z_n = np(1-p)$ folgt unter Anwendung des Zentralen Grenzwertsatzes:

$$\begin{aligned} F_{Z_n}(y) &= P(Z_n < y) \\ &= P\left(\frac{Z_n - n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}} < \frac{y-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}\right) \\ &\to \Phi\left(\frac{y-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}\right) \end{aligned}$$

□

Der zentrale Grenzwertsatz

Satz von Moivre–Laplace

Es seien $X_i \sim Bi(1,p)$, $n = 1000$ *und* $p = 0.4$. *Gesucht werde die Wahrscheinlichkeit* $P(Z_n < 300)$. *Es gilt:*

$$\begin{aligned} P(Z_n < 300) &= \sum_{x<300} P(Z_n = x) \\ &= \sum_{i=0}^{299} \binom{1000}{i} 0.4^i (1-0.4)^{1000-i} \end{aligned}$$

großer Rechenaufwand. besser: Anwendung des Satzes von Moivre–Laplace.

Satz von Moivre–Laplace

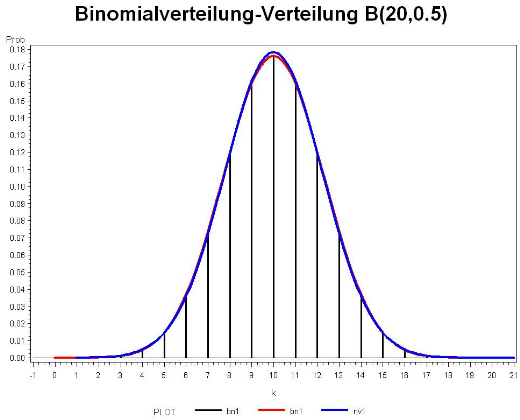
Beispiel, Fortsetzung

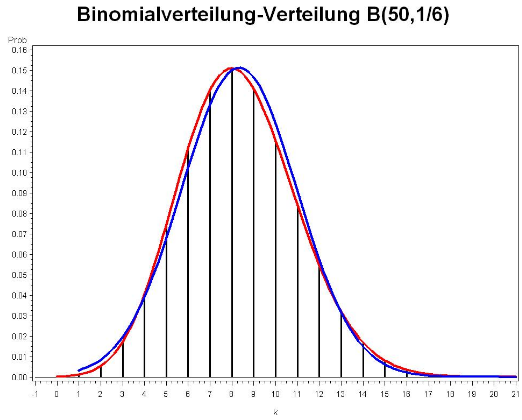
Es gilt:

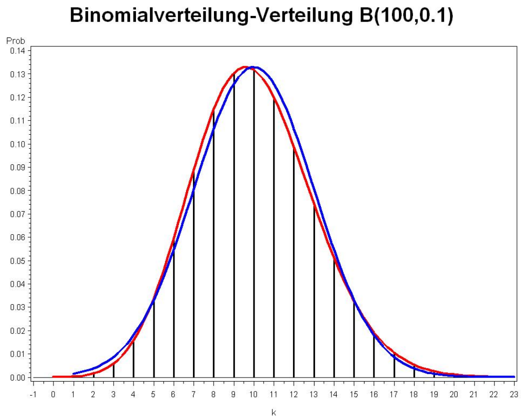
$$\begin{aligned} P(Z_n < 300) &\approx \Phi\left(\frac{300-1000\cdot 0.4}{\sqrt{1000\cdot 0.4\cdot(1-0.4)}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{-100}{\sqrt{240}}\right) \approx \Phi\left(\frac{-100}{15.49}\right) \\ &= \Phi(-6.45) = 1 - \underbrace{\Phi(6.45)}_{\approx 1} \approx 0 \end{aligned}$$

Bem.: Die Anwendung des Satzes von Moivre–Laplace setzt voraus, daß $n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß ist. Faustregel: $n \cdot p \geq 10$ und $n \cdot (1-p) \geq 10$.

Satz von Moivre–Laplace







Der zentrale Grenzwertsatz

X_i Poisson

Seien $X_i \sim Poi(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, n$

$$X_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & k & \ldots \\ p_{0i} & p_{1i} & p_{2i} & \ldots & p_{ki} & \ldots \end{pmatrix} \qquad Z_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$$

mit $p_{ji} = \frac{\lambda_i^j}{j!} \cdot e^{-\lambda_i}$, $\quad \mathbf{E}X_i = \operatorname{Var} X_i = \lambda_i$.

Für den Erwartungswert von Z_n gilt:

$$\mathbf{E}Z_n = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}X_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Der zentrale Grenzwertsatz
Poisson

Lemma
Es seien X_1 und X_2 unabhängig, $X_1, X_2 \sim Poi(\lambda_i)$, $i = 1, 2)$. Dann ist die Zufallsgröße $Z_2 := X_1 + X_2$ ebenfalls POISSON–verteilt und es gilt: $Z_2 \sim Poi(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Bem: Vergleichen Sie die folgende Formel mit der Faltungsformel für stetige Zufallsvariablen. Erinnerung: $\mathbf{E}X_i = \lambda_i$, $\operatorname{Var} X_i = \lambda_i$.

Der zentrale Grenzwertsatz
Poisson, Beweis des Lemma
Beweis: Es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
P(Z_2 = k) &= \sum_{t=0}^{k} p_1(t) \cdot p_2(k-t) \\
&= \sum_{t=0}^{k} \left(\tfrac{\lambda_1^t}{t!} \cdot e^{-\lambda_1} \cdot \tfrac{\lambda_2^{k-t}}{(k-t)!} \cdot e^{-\lambda_2} \right) \\
&= \sum_{t=0}^{k} \left(\tfrac{\lambda_1^t \cdot \lambda_2^{k-t}}{t! \cdot (k-t)!} \cdot e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \right) \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \cdot \tfrac{1}{k!} \cdot \sum_{t=0}^{k} \tfrac{\lambda_1^t \cdot \lambda_2^{k-t} \cdot k!}{t! \cdot (k-t)!} \\
&= \tfrac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \cdot (\lambda_1 + \lambda_2)^k \quad \text{(Binomische Formel)}
\end{aligned}$$

□

Der zentrale Grenzwertsatz
Poisson
Sei $\lambda_i = \lambda$ $(i = 1, \ldots, n)$. Dann

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Poi(n \cdot \lambda).$$

Anwendung des Zentralen Grenzwertsatz liefert ($\lambda' := n \cdot \lambda$):

$$P\left(\tfrac{Z_n - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} < x \right) = P\left(\tfrac{Z_n - \lambda'}{\sqrt{\lambda'}} < x \right) \to \Phi(x).$$

Also kann auch eine POISSON–Verteilung durch eine Normalverteilung approximiert werden, falls der Parameter $\lambda'(= n\lambda)$ hinreichend groß ist (etwa $\lambda' \geq 10$).

χ^2-Verteilung

Def. 64 (χ^2-Verteilung)
Seien X_i unabhängig, $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $i = 1, \ldots, n$.

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi_n^2,$$

heißt χ^2 verteilt mit n Freiheitsgraden.

Dichte:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{x}{2}}, & \text{falls} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

χ^2-Verteilung

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}Y &= n\mathbf{E}X_i^2 = n \\
\operatorname{Var} Y &= \mathbf{E}(Y-n)^2 = \mathbf{E}(\sum_{i=1}^n (X_i^2-1))^2 = n\mathbf{E}(X_1^2-1)^2 \\
&= n\mathbf{E}(X_1^4 - 2\mathbf{E}X_1^2 + 1) = n(\underbrace{3}_{s.f.S.} - 2 + 1) = 2n.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P\Big(\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n}{\sqrt{2n}} < y\Big) &= \Phi(y) \\
P(\sum_{i=1}^n X_i^2 < x) &\approx \Phi\big(\frac{x-n}{\sqrt{2n}}\big)
\end{aligned}$$

χ^2-Verteilung

$n = 30, x = 23.364$: $P(\sum_{i=1}^n X_i^2 < x) = 0.2$

Approximation durch eine Normalverteilung:

$$\Phi\big(\frac{x-n}{\sqrt{2n}}\big) = \Phi(-0.8567) = 1 - 0.8042 = 0.1958.$$

χ^2-Verteilung, Fortsetzung

bleibt z.z.: $\mathbf{E}X_i^4 = 3$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}\mathbf{E}X_i^4 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \\
&= 2\int_0^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx, \quad t = x^2,\ dx = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\,dt \\
&= \int_0^{\infty} t^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{t}{2}}\,dt = \int_0^{\infty} t^{\frac{5}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}}\,dt \\
&= \Gamma\big(\frac{5}{2}\big)2^{\frac{5}{2}} = \Gamma\big(2+\frac{1}{2}\big)2^{\frac{5}{2}} \\
&= 1\cdot 3\cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4}\cdot 2^{\frac{5}{2}} = 3\cdot\sqrt{2\pi} \\
\mathbf{E}X_i^4 &= 3.
\end{aligned}$$

χ^2-Verteilung, Fortsetzung

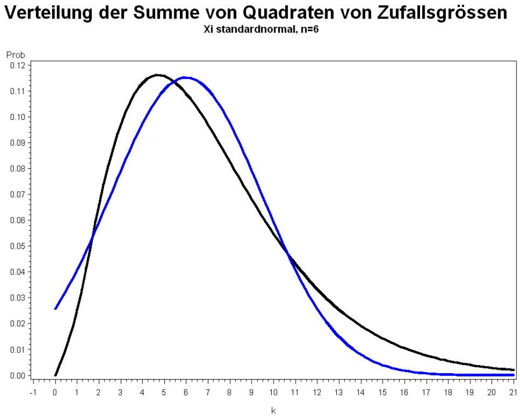
Dabei haben wir verwendet:

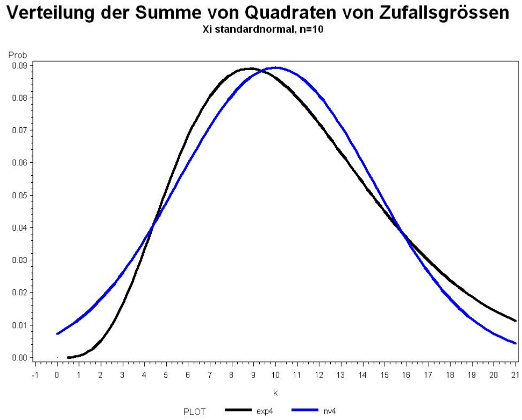
$$\int_0^{\infty} t^{\lambda-1} e^{-\alpha t}\,dt = \frac{\Gamma(\lambda)}{\alpha^\lambda}$$

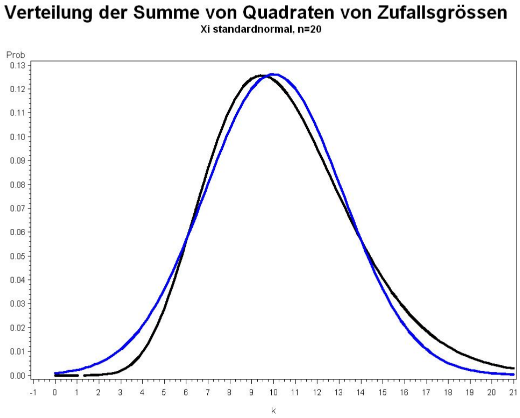
$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n! \\
\Gamma(n+\frac{1}{2}) &= 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\frac{\sqrt{\pi}}{2^n}
\end{aligned}$$

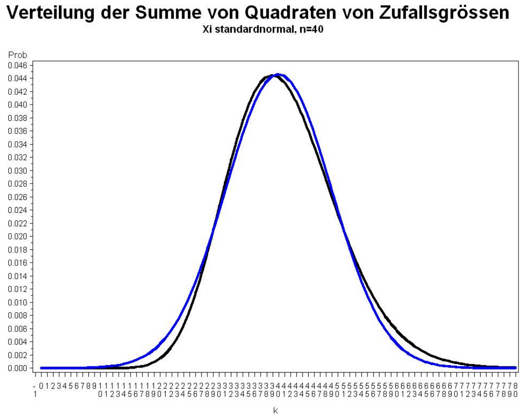
χ^2-Verteilung

Veranschaulichung für verschiedene n









*Beweis des Zentralen Grenzwertsatzes

Sei $\phi_{X-\mu}$ die charakteristische Funktion von $X_i - \mu$. Da die ersten beiden Momente (μ, σ^2) existieren, $\mathbf{E}(X_i - \mu) = 0$, $\mathbf{E}(X_i - \mu)^2) = \sigma^2$, folgt aus der Taylorreihendarstellung

$$\phi_{X-\mu}(t) = \sum_{j=0}^{k} \mathbf{E}(X_i - \mu)^j \frac{(it)^j}{j!} + o(t^k) = 1 - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + o(t^2)$$

Die Zufallsvariablen

$$\frac{X_i - \mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

haben die charakteristische Funktion

$$\phi_{X-\mu}\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right) = 1 - \frac{1}{2n} t^2 + o(t^2)$$

*Beweis des Zentralen Grenzwertsatzes (2)

Die Zufallsvariable $Y_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - \mu}{\sqrt{n}\sigma}$ hat also die charakteristische Funktion

$$\phi_{Y_n}(t) = \left(\phi_{X-\mu}\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n.$$

Es gilt:

$$\ln\left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right)^n = n \ln\left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right) \to -\frac{t^2}{2}.$$

(vgl. Taylorreihenentwicklung des Logarithmus)

***Beweis des Zentralen Grenzwertsatzes (3)**

$$\ln \phi_{Y_n}(t) \to -\frac{t^2}{2}$$
$$\phi_{Y_n}(t) \to e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

D.h. die charakteristische Funktion von Y_n konvergiert gegen die charakteristische Funktion der Standard-Normalverteilung (sogar gleichmäßig).
Aus dem Konvergenzsatz folgt: $Y_n \to Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Zentraler Grenzwertsatz

Beispiele

Münzwurf: 1000 mal. Wie groß ist die Wkt., dass weniger als 475 mal Zahl fällt?
$X_i = 1$ falls Zahl, $X_i = 0$ sonst.
$P(\sum_{i=1}^{1000} X_i < 475) =$

$$\begin{aligned} & \underbrace{P(\sqrt{10^3}\frac{\frac{1}{1000}\sum X_i - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}}}}_{\sim\mathcal{N}(0,1)} \le \sqrt{10^3}\frac{\frac{475}{1000} - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}}}) \\ \approx\ & \Phi(\sqrt{1000}\frac{0.475 - 0.5}{\frac{1}{2}}) \\ =\ & \Phi(-1.58) \approx 0.057. \end{aligned}$$

Bedeutung des ZGWS in der Statistik

beim Schätzen

Gesetz der Großen Zahlen: $\overline{X} \to \mu = \mathbf{E}(X)$.

Frage: Wie groß ist der Stichprobenumfang zu wählen, um eine bestimmte Genauigkeit zu erreichen?

ε, δ vorgegeben, klein ($\varepsilon, \delta < 0.5$).
n ist so zu wählen, dass

$$P(|\overline{X} - \mu| \le \varepsilon) \ge 1 - \delta$$

Bedeutung des ZGWS beim Schätzen

Fortsetzung

$$\begin{aligned} 1-\delta &\le P(|\overline{X} - \mu| \le \varepsilon) \\ &= P\big(\sqrt{n}\frac{|\overline{X} - \mu|}{\sqrt{VarX}} \le \sqrt{n}\frac{\varepsilon}{\sqrt{VarX}}\big) \\ &= P\big(\sqrt{n}\frac{|\overline{X} - \mu|}{\sigma} \le \sqrt{n}\frac{\varepsilon}{\sigma}\big) \\ &\approx \Phi(\sqrt{n}\frac{\varepsilon}{\sigma}) - \Phi(-\sqrt{n}\frac{\varepsilon}{\sigma}) \end{aligned}$$

Es genügt etwa

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(1-\delta) &\le \sqrt{n}\frac{\varepsilon}{\sigma} \\ n &\ge \left(\frac{\sigma\Phi^{-1}(1-\delta)}{\varepsilon}\right)^2 \end{aligned}$$

Bedeutung des ZGWS in der Statistik

beim Testen

$\mu := \mathbf{E}X$, und nehmen hier an, $\sigma^2 = \operatorname{Var} X$ ist bekannt. Wir testen z.B.

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

Teststatistik:

$$T_n = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}$$

T_n klein spricht für H_0, T_n groß gegen H_0.

Fehler 1. Art: H_0 ablehnen, obwohl richtig möchte man begrenzen ($\leq \alpha$)

Fehler 2. Art: H_0 annehmen, obwohl falsch sollte auch klein sein ($\leq \beta$)

Bedeutung des ZGWS beim Testen

Fortsetzung

$$P_{\mu_0}(T_n \geq u_{1-\alpha}) \to \alpha \quad \text{nach ZGWS}$$

denn

$$P_{\mu_0}(T_n < u_{1-\alpha}) \to \Phi(u_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$$

(wenn $\mu < \mu_0$ so $P_\mu(T_n < u_{1-\alpha}) > P_{\mu_0}(T_n < u_{1-\alpha})$)

Wenn also $T_n > u_{1-\alpha}$ so lehnen wir die Nullhypothese ab!

Bedeutung des ZGWS beim Testen

Beispiel

In der BRD gab es im Zeitraum 1970-1990 insgesamt 25 171 123 registrierte Lebendgeburten, davon waren 12 241 392 Mädchen.

Berechnen Sie die ein 95% Vertrauensintervall für die Wahrscheinlichkeit einer Mädchengeburt!

Das zufällige Ereignis einer Mädchengeburt wird dargestellt durch eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable, $X_i \sim Bi(1, p)$. Sei $n = 25171123$ und

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{die zufällige Anzahl der Mädchengeburten.}$$

Bedeutung des ZGWS beim Testen

Beispiel, Fortsetzung

Wir wissen, $\mathbf{E}S_n = n \cdot p$ und $\operatorname{Var} S_n = n \cdot p \cdot (1 - p)$.

Weiter sei $u_{0.975}$ das 0.975-Quantil von $\mathcal{N}(0, 1)$,

$$\Phi(u_{0.975}) = 0.975.$$

Nachsehen in der Tabelle liefert $u_{0.975} \approx 1.96$.

Aus dem Zentralen Grenzwertsatz folgt

$$P\left(\frac{|S_n - np|}{\sqrt{VarS_n}} \leq u_{0.975}\right) \approx 0.95.$$

Bedeutung des ZGWS beim Testen

Beispiel, Fortsetzung, 2

Die folgenden Ungleichungen gelten jeweils mit Wkt. etwa 0.95:

$$\begin{aligned} |S_n - np| &\leq 1.96 \cdot \sqrt{np(1-p)} \\ (S_n - np)^2 &\leq 1.96^2 np(1-p) \\ n^2p^2 - 2S_n np + S_n^2 &\leq 1.96^2 np - 1.96^2 np^2 \end{aligned}$$

$$(n^2 + 1.96^2 n)p^2 - (1.96^2 n + 2nS_n)p + S_n^2 \leq 0$$

Bedeutung des ZGWS beim Testen

Beispiel, Fortsetzung, 3

bzw. wenn wir die Schätzung

$$\hat{p} = \frac{S_n}{n}$$

für die relative Anzahl der Mädchengeburten einsetzen,
für die Randpunkte des Vertrauensintervalls

$$p_{1,2} = \frac{1}{n + 1.96^2}\left(n\hat{p} + \frac{1.96^2}{2} \pm 1.96\sqrt{n\hat{p}(1-\hat{p}) + \frac{1.96^2}{4}}\right).$$

Hier haben wir

$$\hat{p} = \frac{S_n}{n} = \frac{12241392}{25171123} = 0.48633$$

95%-Vertrauensintervall: $[0.48613, 0.48652]$.

Bedeutung des ZGWS beim Testen

Beispiel, Fortsetzung, 4

Fortsetzung des vorigen Beispiels

Angenommen, es würde gelten $p = \frac{1}{2}$. Mit welcher Wkt. würden dann höchstens 12 241 392 Mädchengeburten auftreten?

$$\begin{aligned} P(S_n \leq 12241392) &= P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{12241392 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\ &\approx \Phi(\frac{12241392 - np}{\sqrt{np(1-p)}}) \\ &= \Phi(-137.2) \leq 3 \cdot 10^{-4091}. \end{aligned}$$

D.h. wir lehnen die Nullhypothese $H_0 : p = \frac{1}{2}$ gegen $H_1 : p \neq \frac{1}{2}$ ab.

Bedeutung des ZGWS

Beispiel

Roulette

Beim Roulette gibt es 37 Zahlen, 18 davon sind schwarz, 18 sind rot, dazu die 0, die ist grün. Bei Setzen der richtigen Farbe gibt es den doppelten Einsatz, bei Setzen der richtigen Zahl den 36 fachen Einsatz. Zwei Spieler A und B spielen folgende Strategie: A setzt auf Farbe, B auf Zahl. Beide spielen 100 mal, und jetzen jeweils 10 Euro.
Wie groß ist die Wkt., dass sie nach $n = 100$ Spielen mindestens 40 Euro gewonnen haben?

Roulette, Fortsetzung

Wir beschreiben die Gewinne/Verluste im i-ten Spiel durch Bernoulli-Zufallsvariablen,

$$X_i : \quad \begin{pmatrix} 10 & -10 \\ \frac{18}{37} & \frac{19}{37} \end{pmatrix}, \qquad Y_i : \quad \begin{pmatrix} 350 & -10 \\ \frac{1}{37} & \frac{36}{37} \end{pmatrix}$$

Roulette, Fortsetzung, 2

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X_i &= 10 \cdot \frac{18}{37} - 10 \cdot \frac{19}{37} = -\frac{10}{37} =: \mu_A \\
VarX_i &= \mathbf{E}X_i^2 - (\mathbf{E}X_i)^2 = 100 - (\frac{10}{37})^2 =: \sigma_A^2 \approx 100 \\
\mathbf{E}Y_i &= 350 \cdot \frac{1}{37} - 10 \cdot \frac{36}{37} = -\frac{10}{37} =: \mu_B \\
VarY_i &= \mathbf{E}Y_i^2 - (\mathbf{E}Y_i)^2 = 350^2 \frac{1}{37} + (-10)^2 \frac{36}{37} - (\frac{10}{37})^2 =: \sigma_B^2 \\
&\approx 3200
\end{aligned}$$

Roulette, Fortsetzung, 3

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \geq 40\right) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - n\mu_A}{\sqrt{n}\sqrt{VarX_i}} \geq \frac{40 - n\mu_A}{\sqrt{n}\sqrt{VarX_i}}\right) \\
&\approx 1 - \Phi\left(\frac{40 - n\mu_A}{\sqrt{n}\sigma_A}\right) \\
&= 1 - \Phi(0.67) = 0.25 \\
P\left(\sum_{i=1}^{100} Y_i \geq 40\right) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} Y_i - n\mu_B}{\sqrt{n}\sqrt{VarY_i}} \geq \frac{40 - n\mu_B}{\sqrt{n}\sqrt{VarY_i}}\right) \\
&\approx 1 - \Phi\left(\frac{40 - n\mu_B}{\sqrt{n}\sigma_B}\right) \\
&= 1 - \Phi(0.12) = 0.45
\end{aligned}$$

15 Schätzmethoden

15.1 Einführung

Eigenschaften von Schätzungen $\hat{\theta}$

Sei $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(X_1, \ldots, X_n)$ eine Schätzung eines Parameters θ, die auf n Beobachtungen beruht.

- $\hat{\theta}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \theta$ "Konsistenz" (Minimalforderung)
- $E\hat{\theta}_n = \theta$ "Erwartungstreue" $E\hat{\theta}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \theta$ "Asymptotische Erwartungstreue"

Eigenschaften von Schätzungen (2)

- var $\hat{\theta}_n$ möglichst klein: "gute", "effiziente" Schätzung
- wenn var $\hat{\theta}_n$ den kleinstmöglichen Wert annimmt für alle e-treuen Schätzungen, $\hat{\theta}_n$: "optimale Schätzung"
- $\text{MSE} = \text{var}\ \hat{\theta}_n + \text{bias}^2\ \hat{\theta}_n = \text{var}\ \hat{\theta}_n + (E\hat{\theta}_n - \theta)^2$ $\longrightarrow$ minimal oder möglichst klein.
- Eigenschaften sollten "möglichst" auch bei (kleinen) Abweichungen von der (Normal-)Verteilungsannahme gelten $\longrightarrow$ robuste Schätzung.

Momentenmethode

Man drückt den zu schätzenden Parameter durch die Momente, z.B. $\mathbf{E}(X)$, aus. Dann werden die Momente durch die entsprechenden *empirischen* Momente, z.B. der Erwartungswert durch $\overline{X}$, ersetzt.

Maximum-Likelihood-Schätzung (ML-Schätzung)

Es wird der Schätzwert für den unbekannten Parameter ermittelt, der anhand der vorliegenden Daten, am meisten für diesen Paramter spricht (most likely).

Kleinste-Quadrat-Schätzung (KQS)

Sei θ der zu schätzende Parameter. Man geht aus von einem Modell, z.B.

$$Y_i = g(\theta, X_i) + \epsilon_i$$

Dannn versucht man die Summe der Fehlerquadrate

$$\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - g(\theta, X_i))^2.$$

zu minimieren (Kleinste Quadrate).

15.2 Momentenschätzung

Momentenschätzung bei Normalverteilung

Seien $X_1, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

$$\mu = \mathbf{E}X_i \quad \Longrightarrow \quad \hat{\mu} = \overline{X}$$

$$\sigma^2 = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2 \ \Rightarrow \ \hat{\sigma}^2 = \overline{(X_i - \overline{X})^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

Momentenschätzung bei Exponentialverteilung

Seien $X_1,\dots,X_n \sim Exp(\lambda)$.

$$\lambda = \frac{1}{\mathbf{E}X_i} \quad\Longrightarrow\quad \hat{\lambda} = \frac{1}{\overline{X}}$$

Momentenschätzung bei Binomialverteilung
Seien $X_1,\dots,X_n \sim Bi(1,p)$.

$$p = \mathbf{E}X_i \quad\Longrightarrow\quad \hat{p} = \overline{X}$$

der relative Anteil der Realisierungen $x_i = 1$.

15.3 Maximum-Likelihood-Schätzung

Seien $x_1,\dots,x_n$ i.i.d. Beobachtungen mit der Dichte $f(x;\boldsymbol{\theta})$

Def. 65 (Likelihood-Funktion, Log-Likelihood Funktion)

$$L_n(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n f(x_i,\boldsymbol{\theta}), \qquad l_n(\boldsymbol{\theta}) = \log(L(\boldsymbol{\theta}))$$

Die Likelihood-Funktion ist die Dichte der Daten, sie wird aber als Funktion des Parameters $\boldsymbol{\theta}$ aufgefasst.

Def. 66 (Maximum-Likelihood Schätzung)
Die Maximum-Likelihood-Schätzung ist der Wert $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, der $L_n(\boldsymbol{\theta})$ maximiert.

Es ist also die Likelihood-Funktion (oder deren Logarithmus) zu maximieren.

ML-Schätzung bei Binomialverteilung
Beobachten n=1000 Jugendliche. Stichprobe $(X_1,\dots,X_n)$ $X_i = 1$ falls Übergewicht festgestellt $X_i = 0$ sonst. Die Wahrscheinlichkeit, daßdie beobachtete Stichprobe auftritt, wenn der Parameter p vorliegt ist

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1,\dots,X_n = x_n) &= \prod_{i=1}^n p^{X_i}(1-p)^{1-X_i} \\ &= p^k(1-p)^{n-k}, \quad \text{wobei} \quad k = \sum_{i=1}^n x_i. \end{aligned}$$

ML Schätzung bei Binomialverteilung
Der ML-Schätzer ist der Wert, der diese Funktion, $L_n(p)$, Likelihood-Funktion genannt, bzgl. p maximiert. Maximieren statt $L_n(p)$: $\log L_n(p)$ (Arg.Max. ist dasselbe).

$$\begin{aligned} \ln L_n(p) &= \ln\big(p^k(1-p)^{n-k}\big) \\ &= k\ln p + (n-k)\ln(1-p). \end{aligned}$$

Ableiten nach p und Nullsetzen liefert:

$$\frac{k}{p} - \frac{n-k}{1-p} = 0$$

ML Schätzung bei Binomialverteilung (2)
Die einzige Lösung ist:

$$\hat{p} = \frac{k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$$

Für ein relatives Extremum in (0,1) kommt nur dieser Wert in Betracht. Müssen aber noch die Likelihood-Funktion an den Rändern betrachten: Für $p = 0$ und $p = 1$ wird $\ln L(p) = -\infty$. Also:

$$\hat{p}_{ML} = \frac{k}{n}.$$

ML-Schätzung bei Normalverteilung

μ unbekannt, σ^2 bekannt

Likelihood: $f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)$, die gemeinsame Dichtefunktion der X_i.

Seien $X_1,\ldots,X_n$ unabhängig, $X_i \sim \mathcal{N}(\mu,1)$.

Likelihood:

$$\begin{aligned} L_n(\mu) &= \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) \qquad \text{(Unabhängigkeit)} \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x_i-\mu)^2/2} \end{aligned}$$

ML-Schätzung bei Normalverteilung, 2

$$\begin{aligned} L_n(\mu) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x_i-\mu)^2/2} \\ \ln L_n(\mu) &= -n\ln(\sqrt{2\pi}) + \sum_{i=1}^n (-\frac{(x_i-\mu)^2}{2}) \\ \frac{\partial L_n(\mu)}{\partial \mu} &= \sum_{i=1}^n (x_i-\mu) \end{aligned}$$

Nullsetzen liefert die Maximum-Likelihood-Schätzung

$$\hat{\mu} = \overline{X}.$$

Normalverteilung, μ und σ^2 unbekannt

$X_1,\ldots,X_n \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

$$\begin{aligned} L_n(\mu,\sigma) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\bigl(-\frac{1}{2\sigma^2}(X_i-\mu)^2\bigr) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \sigma^n} \exp\bigl(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2\bigr) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \sigma^n} \exp\bigl(-\frac{nS^2}{2\sigma^2}\bigr) \exp\bigl(-\frac{n(\overline{X}-\mu)^2}{2\sigma^2}\bigr) \end{aligned}$$

wobei $S^2 = n^{-1}\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2$.

Die letzte Gleichung folgt aus: $\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X}+\overline{X}-\mu)^2 = nS^2 + n(\overline{X}-\mu)^2$

ML-Schätzung bei Normalverteilung, Fortsetzung

Log-Likelihood:

$$\ln L(\mu,\sigma) = -n\ln\sqrt{2\pi} - n\ln\sigma - \frac{nS^2}{2\sigma^2} - \frac{n(\overline{X}-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \ln L(\mu,\sigma)}{\partial \mu} = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma^2} \\ 0 &= \frac{\partial \ln L(\mu,\sigma)}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{nS^2}{\sigma^3} + \frac{n(\overline{X}-\mu)^2}{\sigma^3} \end{aligned}$$

$$\hat{\mu} = \overline{X}, \qquad \hat{\sigma}^2 = S^2$$

ML-Schätzung bei Gleichverteilung

ML-Schätzung bei Gleichverteilung auf $(0, \theta)$

Likelihood: $f_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n)$, die gemeinsame Dichtefunktion der X_i. Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig, $X_i \sim R(0, \theta)$, d.h.

$$f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & \text{falls} \quad 0 \le x_i \le \theta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ML-Schätzung bei Gleichverteilung, 2

Likelihood:

$$\begin{aligned} L_n(\theta) &= \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) \qquad \text{(Unabhängigkeit)} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\theta^n} & \text{falls} \quad 0 \le x_i \le \theta \quad \forall x_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Maximal, wenn $\theta \ge x_1, \dots, x_n$, und wenn θ möglichst klein, also

$$\hat{\theta} = \max(x_1, \dots, x_n).$$

Maximum-Likelihood-Schätzung

Gemischte Normalverteilung

Dichte ($\boldsymbol{\theta} = (\mu_1, \sigma_1^2, \mu_2, \sigma_2^2, p)$):

$$f(x; \boldsymbol{\theta}) = (1-p)\phi(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}) + p\phi(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2})$$

$X_i \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ mit Wkt. $(1-p)$ und $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ mit Wkt. $(1-p)$, aber welche ist nicht bekannt.

Likelihood:

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} \big((1-p)\phi(\frac{x_i-\mu_1}{\sigma_1}) + p\phi(\frac{x_i-\mu_2}{\sigma_2})\big)$$

Maximieren des (log-)Likelihood ist schwer.

Lösungsverfahren

Newton-Raphson, allgemein (aber eindimensional)

Taylor-Entwicklung von $l'(\theta) = \frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta}$ an der Stelle θ^j und Nullsetzen

$$0 = l'(\hat{\theta}) \approx l'(\theta^j) + (\hat{\theta} - \theta^j) l''(\theta^j)$$

Lösung:

$$\hat{\theta} \approx \theta^j - \frac{l'(\theta^j)}{l''(\theta^j)}$$

Iterationsverfahren

$$\theta^{j+1} = \theta^j - \frac{l'(\theta^j)}{l''(\theta^j)}$$

Verallgemeinerung auf k-Vektor

$$\boldsymbol{\theta}^{j+1} = \boldsymbol{\theta}^j - \mathbf{H}^{-1} l'(\boldsymbol{\theta}^j) \quad \mathbf{H}: \text{Matrix der 2. Ableitungen}$$

Eigenschaften von ML-Schätzungen
Seien Regularitätsvoraussetzungen erfüllt

- Sie sind konsistent, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n \to \boldsymbol{\theta}$
- Wenn $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n$ ML-Schätzung für $\boldsymbol{\theta}$ dann ist $g(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n)$ ML-Schätzung für $g(\boldsymbol{\theta})$.
- Die ML-Schätzung ist asymtotisch normal verteilt.
- Die ML-Schätzung ist asymtotisch optimal.
- Wenn für die MLS $\hat{\boldsymbol{\theta}_n}$ gilt, $\mathbf{E}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) = \hat{\boldsymbol{\theta}}$ dann ist sie optimal, d.h. sie hat minimale Varianz unter allen Schätzungen. Diese Varianz ist aus der Cramér-Rao-Ungleichung abzulesen (s.u.)

15.4 EM-Algorithmus

Allgemeine Idee des EM Algorithmus
E: Expectation M: Maximization
Iterieren fortlaufend, und berechnen abwechselnd **E** und Max.
Angenommen, die Daten Y kommen aus einer Population, für die direkte Maximierung des Log-Likelihood schwer ist.
Idee: Ergänzen diese Daten um zusätzliche (natürlich unbekannte) Daten Z, so dass $f(y;\boldsymbol{\theta}) = \int f(y,z;\boldsymbol{\theta})\,dz$ und das auf $f(y,z;\boldsymbol{\theta})$ basierende Likelihood leicht zu maximieren ist.

Allgemeine Idee des EM-Algorithmus (Fortsetzung)
Das interessierende komplizierte $f(y;\boldsymbol{\theta})$ ist also **Rand**dichte des Modells mit einfacherem Likelihood.
Y: beobachtete Daten,
Z: versteckte (latente, fehlende) Daten.
Wenn wir die fehlenden Daten irgendwie "auffüllen" können, haben wir ein leichtes Problem.
Der EM-Algorithmus versucht, iterativ, die fehlenden Daten aufzufüllen.

zur Illustration des EM-Algorithmus: Vereinfachung
Nehmen an, $p = \frac{1}{2}$ und $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$.
Direkte Maximierung der Likelihood ist schwer.
Führen latente Variablen ein,

$$Z_i = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad X_i \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2) \\ 1 & \text{falls} \quad X_i \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2) \end{cases}$$

$P(Z_i = 0) = P(Z_i = 1) = p = \frac{1}{2}$ $f(x_i|Z_i = 0) = \phi(\frac{x_i - \mu_1}{\sigma_1})$, $f(x_i|Z_i = 1) = \phi(\frac{x_i - \mu_2}{\sigma_2})$
Damit gemischte Normal: $f(x) = \sum_{z=0}^{1} f(x,z)$

$$f(x,z) = f(z)f(x|z) = \frac{1}{2}\phi(x-\mu_1)^{1-z}\phi(x-\mu_2)^z$$

Maximum-Likelihood-Schätzung
Gemischte Normalverteilung
vollständige Likelihood (x_i, z_i)

$$L = \prod_{i=1}^{n} \phi(x_i - \mu_1)^{1-z_i}\phi(x_i - \mu_2)^{z_i}$$

vollständige Log-Likelihood (ohne Konstante)

$$\ln L = \widetilde{l} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(1-z_i)(x_i-\mu_1)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} z_i(x_i-\mu_2)^2$$

Maximum-Likelihood-Schätzung

Gemischte Normalverteilung

Bedingtes erwartetes Likelihood, unter der Bedingung Daten $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ und Parametervektor $\boldsymbol{\theta}^j$

$\mathbf{E}(\widetilde{l}|\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}^j) =$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(1-\mathbf{E}(Z_i|\mathbf{x},\boldsymbol{\theta}^j))(x_i-\mu_1)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}(Z_i|\mathbf{x},\boldsymbol{\theta}^j)(x_i-\mu_2)^2$$

ist eine Funktion von $\boldsymbol{\theta}^j$ und $\boldsymbol{\theta}$, hier $\boldsymbol{\theta}^j = (\mu_1^j, \mu_2^j)$ und $\boldsymbol{\theta} = (\mu_1, \mu_2)$. Bezeichnen diese mit $J(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}^j)$.

Maximum-Likelihood-Schätzung

Gemischte Normalverteilung

Z_i ist binär, deshalb $\mathbf{E}(Z_i|\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}^j) = P(Z_i = 1|\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}^j)$

Satz von Bayes: $P(Z_i = 1|\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}^j) =$

$$\begin{aligned} & \frac{f(\mathbf{x}|Z_i=1;\boldsymbol{\theta}^j)P(Z_i=1)}{f(\mathbf{x}|Z_i=1;\boldsymbol{\theta}^j)P(Z_i=1)+f(\mathbf{x}|Z_i=0;\boldsymbol{\theta}^j)P(Z_i=0)} \\ = & \frac{\phi(x_i-\mu_2^j)\frac{1}{2}}{\phi(x_i-\mu_2^j)\frac{1}{2}+\phi(x_i-\mu_1^j)\frac{1}{2}} \\ = & \frac{\phi(x_i-\mu_2^j)}{\phi(x_i-\mu_2^j)+\phi(x_i-\mu_1^j)} =: \tau_{ij} \end{aligned}$$

Maximum-Likelihood-Schätzung

Gemischte Normalverteilung

Damit (E-Schritt)

$$J(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\theta}^j) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(1-\tau_{ij})(x_i-\mu_1)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\tau_{ij}(x_i-\mu_2)^2$$

Zur Maximierung von J (M-Schritt) leiten wir ab nach μ_1 und μ_2 und setzen Null. Dann

$$\begin{aligned} \hat{\mu_2}^{j+1} &= \frac{\sum_{i=1}^{n}\tau_{ij}x_i}{\sum_{i=1}^{n}\tau_{ij}} \\ \hat{\mu_1}^{j+1} &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(1-\tau_{ij})x_i}{\sum_{i=1}^{n}(1-\tau_{ij})} \end{aligned}$$

Startschätzung $\boldsymbol{\theta}_0$: z.B. nach Momentenmethode.

Iteration bis das Verfahren "steht".

15.5 Kleinste Quadrat Schätzung

Kleinste Quadrat Schätzung des Lageparameters

Modell:

$$Y_i = \mu + \epsilon_i$$

Die Summe der Fehlerquadrate

$$\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu)^2.$$

minimieren: Differenzieren und Nullsetzen liefert:

$$\hat{\mu}_{KQS} = \overline{Y}.$$

Kleinste Quadrat-Schätzung

KQS im einfachen linearen Regressionsmodell

$$Y_i = \theta_2 + \theta_1 X_i + \epsilon_i \qquad f(X, \theta_1, \theta_2) = \theta_1 X + \theta_2$$
$$\frac{\partial f}{\partial \theta_1} = X \qquad \frac{\partial f}{\partial \theta_2} = 1$$

Minimiere Summe der Fehlerquadrate $\sum_{i=1}^{n} (Y_i - f(X_i, \theta_1, \theta_2))^2$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - (\theta_1 X_i + \theta_2)) \cdot X_i &= 0 \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - (\theta_1 X_i + \theta_2)) \cdot 1 &= 0 \end{aligned}$$

Kleinste Quadrat-Schätzung

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \sum_i X_i Y_i - \theta_1 \sum_i X_i^2 - \theta_2 \sum_i X_i &= 0 \\ \sum_i Y_i - \theta_1 \sum_i X_i - \theta_2 \cdot n &= 0 \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung nach θ_2 auflösen:

$$\theta_2 = \frac{1}{n}\sum_i Y_i - \theta_1 \frac{1}{n}\sum_i X_i$$

und in die erste einsetzen:

Kleinste Quadrat-Schätzung

$$\sum_i X_i Y_i - \theta_1 \sum_i X_i^2 - \frac{1}{n}\sum_i Y_i \sum_i X_i + \theta_1 \frac{1}{n}\sum_i X_i \sum_i X_i = 0$$
$$\sum_i X_i Y_i - \frac{1}{n}\sum_i Y_i \sum_i X_i - \theta_1 \big((\sum_i X_i^2 - \frac{1}{n}\sum_i X_i \sum_i X_i\big) = 0$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_1 &= \frac{\sum_i X_i Y_i - \frac{1}{n}\sum_i X_i \sum_i Y_i}{\sum_i X_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_i X_i)^2} = \frac{S_{XY}}{S_X^2} \\ \hat{\theta}_2 &= \frac{1}{n}\big(\sum_i Y_i - \hat{\theta}_1 \sum_i X_i\big) \end{aligned}$$

15.6 Die Cramer-Rao Ungleichung

***Die Cramer-Rao Ungleichung**
Sei θ ein zu schätzender Parameter einer Population mit Dichte f.
Sei $\hat{\theta} = \theta_n$ eine erwartungstreue Schätzung von θ.

Cramer-Rao-Ungleichung

$$var(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{nI(f,\theta)}, \qquad \text{wobei}$$

$$\begin{aligned} I(f,\theta) &= \mathbf{E}\left(\frac{\partial \ln f(X,\theta)}{\partial\theta}\right)^2 \\ &= \int \left(\frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2 f(x,\theta)\,dx \end{aligned}$$

die sogenannte Fisher-Information ist.

Maximum-Likelihood-Schätzung ist optimal
Seien die Regularitätsbedingungen erfüllt.

Satz: Existiert eine erwartungstreue Schätzung,
die die Cramér-Rao-Ungleichung annimmt, d.h. $var\left(\hat{\theta}\right) = \frac{1}{nI(f,\theta)}$ dann ist $\hat{\theta}$ auch ML-Schätzung.

Bedeutung des Satzes: Praktische Berechnung einer Schätzung mit minimaler Varianz:

- Berechne ML-Schätzung $\hat{\theta}_{ML}$.
- Prüfe erwartungstreue, wenn ja: Berechne $var\hat{\theta}_{ML}$.
- Vergleiche mit der Cramér-Rao-Schranke, $\frac{1}{nI(f,\theta)}$.
- wenn = so beste Schätzung gefunden
- wenn $\neq$ dann gibt es keine bessere e-treue Schätzung.

Cramer-Rao-Ungleichung
Beispiele

f normal

$$f(x,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\begin{aligned} \ln f(x,\mu) &= -\ln(\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \\ \frac{\partial \ln f(x,\mu)}{\partial\mu} &= \frac{x-\mu}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sigma} \\ I(f,\mu) &= \frac{1}{\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 \cdot f(x,\mu)\,dx = \frac{1}{\sigma^2}. \end{aligned}$$

$$Also: \quad var\hat{\mu} \geq \frac{\sigma^2}{n}, \quad \text{vgl. mit} \quad var\overline{X} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Cramer-Rao-Ungleichung
Beispiele

f exponential

$$f(x,\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{falls} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt:

$$I(f,\lambda) = \frac{1}{\lambda^2} \qquad (\text{ÜA})$$

Die Cramer-Rao-Schranke ist also:

$$\frac{1}{nI(f,\lambda)} = \frac{\lambda^2}{n}.$$

Andererseits:

$$var\overline{X} = \frac{1}{n\lambda^2} = \frac{1}{nI(f,\lambda^{-1})} = \frac{1}{nI(f,\mathbf{E}X)}.$$

Cramer-Rao-Ungleichung
Beispiele (3)

F Doppelexponential (=Laplace), Skalenparameter

$$f(x,\lambda) = \frac{1}{2}\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{falls} \quad x \geq 0 \\ \lambda e^{\lambda x} & \text{falls} \quad x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \ln f(x,\lambda) &= -\ln 2 + \ln \lambda + \lambda x \begin{cases} -1 & \text{falls} \quad x \geq 0 \\ 1 & \text{falls} \quad x < 0 \end{cases} \\ \frac{\partial \ln f(x,\lambda)}{\partial \lambda} &= \frac{1}{\lambda} - x \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad x \geq 0 \\ -1 & \text{falls} \quad x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Cramer-Rao-Ungleichung
Beispiele (3), Fortsetzung

$$\begin{aligned} I(f,\lambda) &= \frac{1}{2}\Big(\int_0^\infty \big(\frac{1}{\lambda} - x\big)^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x}\, dx + \\ &\qquad \int_{-\infty}^0 \big(\frac{1}{\lambda} + x\big)^2 \cdot \lambda e^{\lambda x}\, dx\Big) \\ &= \int_0^\infty \big(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{2x}{\lambda} + x^2\big) \cdot \lambda e^{-\lambda x}\, dx \\ &= \frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Cramer-Rao-Ungleichung

Beispiele (3), Fortsetzung, 2

Cramer-Rao-Schranke

$$\frac{\lambda^2}{n} = \frac{1}{nI(f,\lambda^{-1})}.$$

Vergleichen Sie mit (ÜA) $\mathbf{E}\big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |X_i|\big) = \frac{1}{\lambda}$ und

$$var\overline{|X|} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n var|X_i| = \frac{1}{\lambda^2 n} = \frac{1}{nI(f,\lambda^{-1})}.$$

Cramer-Rao-Ungleichung

Beispiele (3a)

F Doppelexponential (=Laplace), Lageparameter

$$f(x,\lambda,\mu) = \frac{1}{2}\begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-\mu)} & \text{falls} \quad x \ge \mu \\ \lambda e^{\lambda(x-\mu)} & \text{falls} \quad x < \mu \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\ln f(x,\lambda,\mu) &= -\ln 2 + \ln\lambda + \lambda(x-\mu)\begin{cases} -1 & \text{falls} \quad x \ge 0 \\ 1 & \text{falls} \quad x < 0 \end{cases} \\
\frac{\partial \ln f(x,\lambda,\mu)}{\partial\mu} &= \lambda\begin{cases} 1 & \text{falls} \quad x \ge 0 \\ -1 & \text{falls} \quad x < 0 \end{cases} \\
I(f,\mu) &= \lambda^2
\end{aligned}$$

Cramer-Rao-Schranke

$$var\hat{\mu} \ge \frac{1}{n\lambda^2}$$

Die Varianz von $\bar{X}$ ist: $var(\bar{X}) = \frac{1}{n}2\frac{1}{2}\int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{n}\frac{2}{\lambda^2}$.

Die *asymptotische* Varianz des Medians $x_{(n/2)}$ist:

$$var(X_{(n/2)}) = \frac{1}{n\lambda^2}$$

(siehe z.B. Serfling, 1980, S.79.), also halb soviel wie bei $\bar{X}$.

Für die *exakte* Varianz siehe Johnson, Kotz: Continuous univariate distributions 2, S.25.

Cramer-Rao-Ungleichung

Satz: (Cramer-Rao-Ungleichung)

Sei f Dichte der Population, und $\hat{\theta}$ eine erwartungstreue Schätzung des Parameters θ. Dann gilt:

$$\mathrm{var}(\hat{\theta}) \ge \frac{1}{nI(f,\theta)},$$

wobei

$$I(f,\theta) = \mathbf{E}\bigg(\frac{\partial \ln f(X,\theta)}{\partial\theta}\bigg)^2$$

falls der Erwartungswert existiert.

Cramer-Rao-Ungleichung

Beweis

Sei $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ eine unabhängige Stichprobe und

$$L(\mathbf{x}, \theta) := \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)$$

die Likelihood der Stichprobe.

Offenbar gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} L(\mathbf{x}, \theta)\, d\mathbf{x} = 1.$$

und (wir setzen voraus, Differentiation und Integration dürfen vertauscht werden.)

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_{\mathbb{R}^n} L(\mathbf{x}, \theta)\, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial \theta} L(\mathbf{x}, \theta)\, d\mathbf{x} = 0$$

Cramer-Rao-Ungleichung

Beweis, Fortsetzung (1)

Weiter gilt, da $\hat{\theta}$ erwartungstreu,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\hat{\theta} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\theta} L(\mathbf{x}, \theta)\, d\mathbf{x} &= \theta \\
\frac{\partial}{\partial \theta} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\theta} L(\mathbf{x}, \theta)\, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\theta}\, \underbrace{\frac{\partial L(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta}}\, d\mathbf{x} &= 1 \\
\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\theta} \frac{\partial \ln L(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta} L(\mathbf{x}, \theta)\, d\mathbf{x} &= 1 \\
\mathbf{E}\left(\hat{\theta} \frac{\partial \ln L(\mathbf{X}, \theta)}{\partial \theta} \right) &= 1
\end{aligned}$$

Auf den linken Term in der vorletzten Gleichung wenden wir die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung an,

Cramer-Rao-Ungleichung

Beweis, Fortsetzung (2)

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\theta} \frac{\partial \ln L(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta} L(\mathbf{x}, \theta)\, d\mathbf{x} - \theta \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial \theta} L(\mathbf{x}, \theta)\, d\mathbf{x}}_{=0} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (\hat{\theta} - \theta) \frac{\partial \ln L(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta} L(\mathbf{x}, \theta)\, d\mathbf{x} \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n} (\hat{\theta} - \theta)^2 L(\mathbf{x}, \theta)\, d\mathbf{x} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial \ln L(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 L(\mathbf{x}, \theta)\, d\mathbf{x} \\
&= \operatorname{var}(\hat{\theta}) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 L(\mathbf{x}, \theta)\, d\mathbf{x} \\
&= \operatorname{var}(\hat{\theta}) \cdot \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial \ln f(x_i, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 L(\mathbf{x}, \theta)\, d\mathbf{x}
\end{aligned}$$

Cramer-Rao-Ungleichung

Beweis, Fortsetzung (3)

Der Term auf der rechten Seite ist $\text{var}\hat{\theta} \cdot n \cdot I(f)$. Die zu den gemischten Summanden gehörenden Integrale sind alle Null, $(i \neq j)$:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\partial \ln f(x_i, \theta)}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial \ln f(x_j, \theta)}{\partial \theta} \right) f(x_i, \theta) f(x_j, \theta)\, dx_i\, dx_j \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial f(x_i, \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial f(x_j, \theta)}{\partial \theta}\, dx_i\, dx_j = 0.
\end{aligned}$$

da alle Beobachtungen unabhängig, Differentiation und Integration vertauschbar und $\int f(x_i, \theta)\, dx_i = 1$.

Cramer-Rao Ungleichung

Anmerkung: Wenn die Regularitätsvoraussetzungen nicht erfüllt sind, muss die Cramer-Rao Ungleichung nicht unbedingt gelten.

Die Dichte

$$f(x, \theta) = \begin{cases} c_\theta x^{-\theta} \log^{-3} x & \text{falls} \quad x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei c_θ so dass $f(x, \theta)$ Dichte ist, hat Fisher-Information $I(f, \theta) = \infty$ für $\theta = 1$. (ÜA)

16 Grundlagen der Simulation

16.1 Einführung

Komplexe Problemstellungen, die einer analytischen Behandlung nur sehr schwer oder gar nicht zugänglich sind

- Lösung von diskreten (oder analytischen) Optimierungsaufgaben, z.B. Travelling Salesman Problem
- Berechnung von Integralen
- Untersuchung des Verhaltens von Algorithmen, z.B. Sortier- und Suchverfahren
- Theorie oft nur asymptotisch. Verhalten im Endlichen?
- "Wer nix kapiert, der simuliert".

Grundlagen der Simulation
Einführung (2)
Stochastische Optimierungsverfahren

- Mutation und Selektion
- Simulated Annealing
- Genetische Algorithmen

Allen diesen Verfahren ist gemeinsam, dass Zustandsübergänge zufällig geschehen und zwischenzeitlich auch mit gewissen (kleinen) Wahrscheinlichkeiten auch schlechtere Lösungen akzeptiert werden.
Vorteil: "Optimum" wird in Polynomialzeit gefunden.
Nachteil: "Optimum" nur mit hoher Wkt. gefunden.

Grundlagen der Simulation
Einführung (3)
Grundlage aller Simulationverfahren sind gleichverteilte Zufallsgrößen $X \sim R(0,1)$,

$$P(X < x) = \int_0^x dt = x,$$

d.h. X hat die Dichtefunktion:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Kernproblem der Simulation ist deshalb die Erzeugung von Folgen unabhängiger gleichverteilter Zufallsgrößen X_i.
Bez.: Zufallszahlen.

16.2 Erzeugung von Zufallszahlen

Exakte Methoden von Hand
Methode 1: Es werden zufällig, gleichverteilt, die Zahlen $0, 1, \ldots, 9$ erzeugt.

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 8 & 9 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \ldots & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

Realisierung:
Es werden Karten mit den Zahlen 0 bis 9 beschriftet. Für jede Zahl ist dabei die Anzahl der Karten gleich. Nun zieht man zufällig Karten und legt sie wieder zurück. Die sich ergebende Folge von Ziffern kann man in einer Tabelle aufschreiben:

Erzeugung von Zufallszahlen
Exakte Methoden von Hand (2)

$$\left|\begin{array}{ccccccc} 3 & 8 & 7 & 0 & 9 & 1 & \dots \\ \cline{2-6} 2 & 4 & 9 & 1 & 3 & 2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}\right|$$

Nun wählen wir zufällig Fünferblocks (es können auch Blocks von mehr Zahlen sein) aus und betrachten diese als Dezimalstellen, d.h. wir erhalten beispielsweise die Zahl $0,87091$. Auf diese Weise erhalten wir Zufallszahlen auf dem Intervall $[0,1[$.

Erzeugung von Zufallszahlen
Exakte Methoden von Hand (3)
Methode 2: Wir erzeugen zufällig die Ziffern 0 und 1, beispielsweise mittels Münzwurf, d.h. Realisierungen der Zufallsgröße

$$X : \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten eine Folge $d_1 d_2 d_3 \dots d_n \dots$ von Nullen und Einsen. Dann ermitteln wir:

$$z := \sum_{i=1}^{n} d_i \cdot 2^{-i} \leq 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Für die so erhaltene Zahl z gilt: $0 \leq z < 1$.

Erzeugung von Zufallszahlen
Exakte Methoden von Hand (4)
Methode 3: (4–Würfel–Spezialwürfeln)
Wir beschriften vier Würfel nach folgender Vorschrift:

1. Würfel:	0, 1, 2, 3, 4, 5
2. Würfel:	0, 6, 12, 18, 24, 30
3. Würfel:	0, 36, 72, 108, 144, 180
4. Würfel:	0, 216, 432, 648, 864, 1080

Wir werfen diese Würfel gleichzeitig und bilden die Summe der Augen. Das ergibt eine Zahl k, für die gilt: $0 \leq k \leq 1295$. Die Zufallsgröße $X := \frac{k}{1295} \sim R(0,1)$ annähernd.

Erzeugung von Zufallszahlen
Elektronische Erzeugung
In elektronischen Geräten fließen auch im Ruhezustand Ströme deren Spannungen zeitlich zufällig schwanken (weißes Rauschen). Nun kann man innerhalb von Zeitintervallen gleicher Länge zählen, wie oft ein kritischer Spannungswert (Schwellenwert) überschritten wird. Z.B. läßt sich bei jedem Überschreiten des Wertes ein Impuls auslösen. Diese Impulse können dann gezählt werden. Im Falle einer geraden Anzahl von Impulsen wird als Zufallsziffer eine 1 realisiert, andernfalls eine 0. Aus der resultierenden 0–1–Folge erhält man nach obigem Muster eine Zufallszahl.

Erzeugung von Zufallszahlen

Kongruenzmethoden

Die bisher betrachteten Verfahren sind alle sehr aufwendig (?) und deshalb praktisch schwer anwendbar. Aus diesem Grunde spielen in der Simulation nur die mathematischen Methoden (Algorithmen) zur Erzeugung von Zufallszahlen eine Rolle. Die mit diesen Methoden generierten Zufallszahlen (gewissermaßen ein Ersatz für Zufallszahlen) werden auch als Pseudozufallszahlen bezeichnet. Algorithmen, die Pseudozufallszahlen erzeugen, werden auch Zufallszahlengeneratoren genannt.

Die multiplikative Kongruenzmethode

Wir geben die Parameter $m, a \in \mathbb{Z}^+$ und den Startwert $z_0 \in \mathbb{Z}^+$ vor, und definieren die Folge

$$z_{i+1} := a \cdot z_i \pmod m.$$

Offenbar:

$$a \cdot z_i = k \cdot m + z_{i+1}; \qquad 0 \le z_{i+1} < m \quad (k \in \mathbb{N}, i = 1, 2, \ldots).$$

$$u_i = \frac{z_i}{m}, \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

ist eine Folge von Pseudozufallszahlen zwischen 0 und 1.

Die multiplikative Kongruenzmethode (2)

Frage: Sind diese u_i annähernd eine Folge unabhängiger, auf dem Intervall $[0, 1[$ gleichverteilter Zufallszahlen?

Frage: Geeignete Wahl der Zahlen a, m und z_0.

Zufallszahlengeneratoren

- RANDU (IBM): $m = 2^{31}$, $a = 2^{16} + 3$;
- RANDA (PRIME): $m = 2^{31} - 1$, $a = 16807$;
- SIMULA (CDC): $m = 2^{59}$, $a = 5^{11}$.
- SAS 8, SAS 9.4 (ranuni-Funktion): $m = 2^{31} - 1$, $a = 397204094$.

Verallgemeinerung: Die lineare Kongruenzmethode

Wir geben wieder Werte vor: $m, a, r, z_0 \in \mathbb{Z}^+$ und definieren die Folge

$$z_{i+1} = (a \cdot z_i + r) \pmod m$$

und die Folge von Zufallszahlen ist

$$u_i := \frac{z_i}{m} \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Turbo-Pascal 5.0:

$z_{n+1} = 134775813 z_n + 1 (\bmod 2^{32})$

Java, vgl. Jonischkat, Klostermann, Algorithmus der Woche, 2006

$z_{n+1} = 25149003917 z_n + 11 (\bmod 2^{48})$ hat volle Periode

Die mehrfache lineare Kongruenzmethode
Parameter: $m, a_1, \ldots, a_k, r \in \mathbb{Z}^+$ Startwerte : $z_0, \ldots, z_{(k-1)} \in \mathbb{Z}^+$. Wir definieren die Folge für $n > (k-1)$

$$z_n = \left(\sum_{l=1}^{k} a_l \cdot z_{n-l} + r \right) \pmod m.$$

Die Zufallszahlenfolge ist dann wieder

$$u_n := \frac{z_n}{m}.$$

Wünschenswerte Eigenschaften von Pseudozufallszahlen

- Einfacher Algorithmus, wenig Rechenzeit.
- möglichst viele verschiedene Zufallszahlen $\Rightarrow$ lange Periode. $\Rightarrow$ m möglichst groß (etwa in der Nähe der oberen Grenze des INTEGER–Bereichs)
- k-Tupel $(U_1, \ldots, U_k) \sim R(0,1)^k$, $k \leq 10$ $\Rightarrow$ Test auf Gleichverteilung.
- “Unabhängigkeit” $\Rightarrow$ Test auf Autokorrelation Plot der Punkte (U_i, U_{i+k}), $k = 1, 2...$ es sollten keine Muster zu erkennen sein.

Multiplikative Generatoren (1)

Ein schlechter Generator
Wir wählen $m = 2^4$, $a = 11, z_0 = 3$.

$$\begin{aligned} z_1 &= 11 \cdot 3 \pmod{16} = 1 \\ z_2 &= 11 \cdot 1 \pmod{16} = 11 \\ z_3 &= 11 \cdot 11 \pmod{16} = 9 \\ z_4 &= 11 \cdot 9 \pmod{16} = 3 \end{aligned}$$

Dann gilt: $z_5 = z_1$ und die Folge wiederholt sich.

Periodenlänge = 4 statt gleich 16 (wie theoretisch möglich)

Multiplikative Generatoren (2)

$$z_{i+1} = a \cdot z_i \pmod m$$

Satz
Wenn $m = 2^k$, $a \bmod 8 \in \{3, 5\}$, z_0 ungerade und $r = 0$ sind, so hat die multiplikative Kongruenzmethode die maximal mögliche Periodenlänge 2^{k-2}.
In allen anderen Fällen gilt, daß die Periodenlänge kleiner als 2^{k-2} ist.

Lineare Generatoren

$$z_{i+1} = a \cdot z_i + r \pmod m$$

Satz
Die lineare Kongruenzmethode besitzt genau dann die volle Periodenlänge m, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $\mathrm{ggT}(r,m)=1 \quad (\mathrm{ggT}(0,m):=m)$, d.h. für $r=0$ ist diese Bedingung nicht erfüllt;
2. $a \bmod p = 1$, für alle Primfaktoren p von m;
3. $a \bmod 4 = 1$, falls m ein Vielfaches von 4 ist.

Beurteilung der Generatoren

Punkteplots in $\mathbb{R}^2$

Bilden wir Paare (u_1,u_2), (u_3,u_4), (u_5,u_6), usw. aufeinanderfolgender Zufallszahlen und tragen sie in das Einheitsquadrat ein. Es entsteht ein (zweidimensionales) Scatterplot von Punkten. Die Pseudozufallszahlen sind evtl. dann akzeptabel, wenn sich hier eine gleichmäßige Verteilung ergibt und keine Struktur erkennbar ist. Entstehen dagegen (Linien)muster, so ist der Zufallszahlengenerator schlecht.
Verallgemeinerung auf k-Tupel mglich.

Punkteplots in $\mathbb{R}^k$

Es sei $\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Werten, die mit der multiplikativen Kongruenzmethode mit $m=2^t$, $a=5 \pmod 8$ und $z_0 = 1 \pmod 4$ ermittelt wurden, d.h.:

$$z_{i+1} = a \cdot z_i \pmod{2^t}.$$
$$u_i = \frac{z_i}{2^t}.$$

Wir bilden nun k–Tupel von aufeinanderfolgenden Pseudozufallszahlen:

$$\mathbf{u}_{(k)} = (u_l,\ldots,u_{l+k-1}) = \left(\tfrac{z_l}{2^t},\ldots,\tfrac{z_{l+k-1}}{2^t}\right).$$

Gitter von Zufallszahlen (1)

Sei u_0 die erste Zufallszahl. Die ersten k Zufallszahlen haben die Form

$$u_0 \cdot ((1,a,\ldots,a^{k-1}) (\mathrm{mod}\ m))/m = u_0 \cdot \frac{\mathbf{b}_1}{4} + g,$$

wobei

$$\mathbf{b}_1 = \frac{1}{2^{t-2}} \cdot \left(1,a,\ldots,a^{k-1}\right)$$

und $g \in G$ ein geeigneter Vektor ist, so dass die $u_l, l=1,\ldots,k$, auch im Intervall $(0,1)$ liegen.

Anstelle der ersten kann mit einer beliebigen Zufallszahl begonnen werden.

Gitter von Zufallszahlen (2)

Für diese k–Tupel von Pseudozufallszahlen gilt:

$$\mathbf{u}_{(k)} \in \left(\tfrac{1}{4}\cdot b_1 + G\right) \cap [0,1[^k.$$

Dabei ist:

$$G = \left\{ \sum_{i=1}^{k} q_i \cdot \mathbf{b}_i : q_1,\ldots,q_k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\mathbf{b}_1^T = \frac{1}{2^{t-2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ \vdots \\ a^{k-1} \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{b}_k = \mathbf{e}_k.$$

Ein alter Zufallszahlengenerator

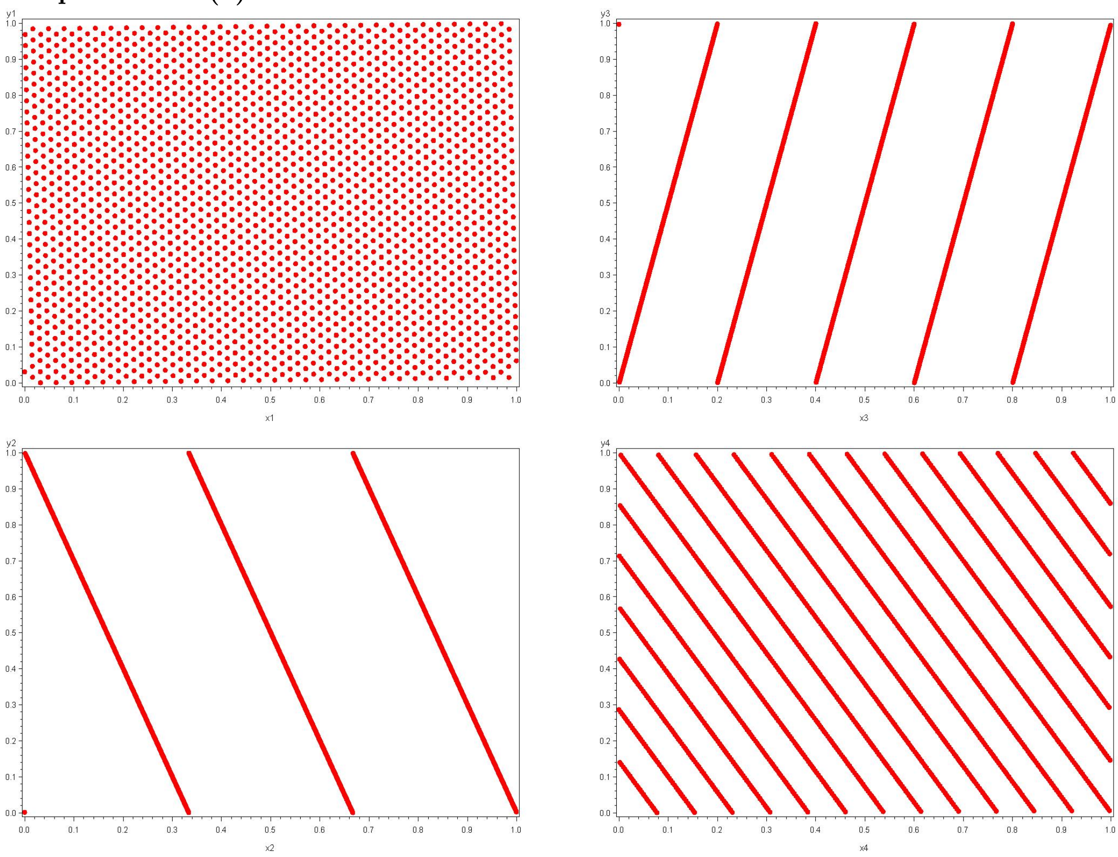
$RANDU \quad m = 2^{31}, \qquad a = 2^{16} + 3, \qquad r = 0$

$$\begin{aligned}
X_{i+2} &= (2^{16}+3)X_{i+1} + c_1 2^{31} \\
&= (2^{16}+3)^2 X_i + c_2 2^{31}(2^{16}+3) + c_1 2^{31} \\
&= (6 \cdot 2^{16} + 9)X_i + 2^{31}\big(2X_i + (2^{16}+3)c_2 + c_1\big) \\
&= 6(2^{16}+3)X_i - 9X_i + c_3 2^{31} \\
&= 6X_{i+1} - 9X_i + c_4 2^{31}
\end{aligned}$$

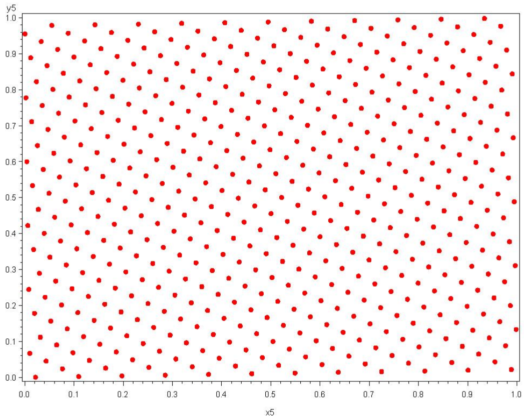
$c_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \ldots, 4. \qquad$ Daraus folgt:

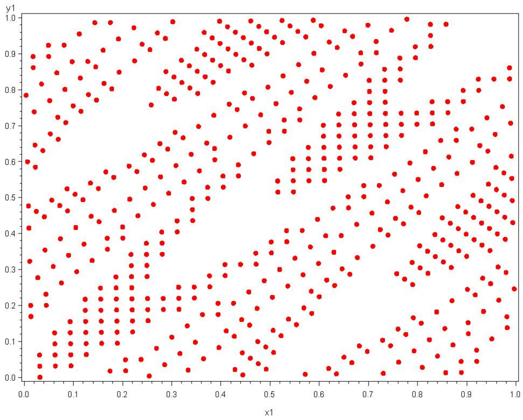
$$X_{i+2} - 6X_{i+1} + 9X_i \in \mathbb{Z}.$$

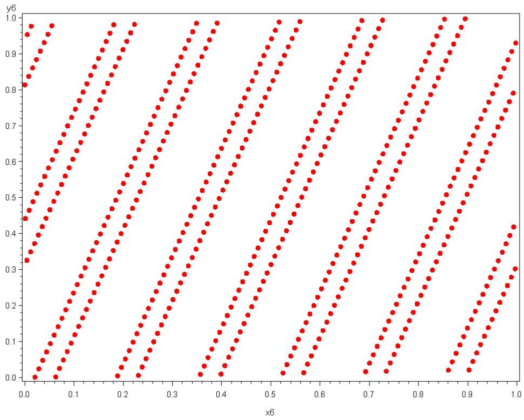
Beispielmuster (1)

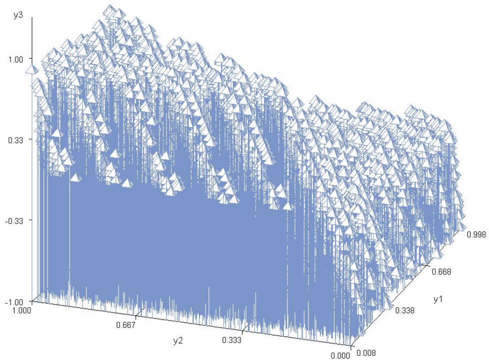


Beispielmuster (2)









16.3 Statistische Tests

Def. 67 Ein <u>Test</u> ist eine Entscheidungsvorschrift,
die über die Akzeptanz genau einer von zwei alternativen Hypothesen entscheidet.

Analogie zur Qualitätskontrolle
Ein Käufer soll anhand einer Stichprobe entscheiden, ob er einen Warenbestand kauft oder nicht. Wir haben zwei Hypothesen, die Null- und die Alternativhypothese:

H_0: Die Ware ist in Ordnung, z.B. der Ausschußanteil p ist kleiner oder gleich 2%.

H_A: Die Ware ist schlecht, d.h. $p > 2\%$.

Analogie zur Qualitätskontrolle
Der Kunde führt nun bei n Produkten eine Kontrolle durch,

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{, falls das Produkt } i \text{ gut ist,} \\ 1 & \text{, falls das Produkt } i \text{ schlecht ist.} \end{cases}$$

Dann ist $z = \sum_{i=1}^{n} x_i$ die Anzahl der fehlerhaften Produkte, die der Kunde gefunden hat. Nun wird vor dem Test ein kritischer Wert z_α festgelegt

- Ist $z > z_\alpha$, so wird die Hypothese H_0 abgelehnt;
- Ist $z \le z_\alpha$, so wird die Hypothese H_0 für richtig befunden.

Statistische Tests von Pseudozufallszahlen
Fehlerwahrscheinlichkeiten

1. $P(Z > z_\alpha | H_0$ ist wahr) – die Wahrscheinlichkeit also, dass der Käufer die Ware für schlecht befindet und ablehnt, obwohl sie doch in Ordnung ist. Diese Wahrscheinlichkeit spiegelt das „Risiko des Produzenten“ wider.

2. $P(Z \leq z_\alpha | H_0$ ist falsch) – die Wahrscheinlichkeit also, daß der Käufer die Ware nimmt, obwohl ihre Qualität stark zu wünschen übrig lässt. Diese Wahrscheinlichkeit spiegelt das „Risiko des Käufers“ wider.

Statistische Tests von Pseudozufallszahlen
Die Entscheidung für H_A oder für H_0 wird anhand einer Teststatistik

$$Z = Z(x_1, ..., x_n)$$

gefällt. Falls $Z \in K$ (kritischen Bereich, Ablehnungsbereich), dann wird H_0 abgelehnt, sonst nicht.
Bei jeder dieser Entscheidungen kann man Fehlentscheidungen treffen:

- Entscheidung für H_A obwohl H_0 richtig ist: Fehler 1.Art
- Entscheidung für H_0 obwohl H_A richtig ist: Fehler 2.Art

(Fehl-)Entscheidungstabelle

	Entscheidung für H_0	Entscheidung für H_A
H_0 richtig	richtig, Sicherheitswkt. $1-\alpha$	Fehler 1. Art Fehlerwkt. α.
H_A richtig	Fehler 2.Art Fehlerwkt. 1-β	richtig, Güte β

Bem.: Entscheidung für H_0 heißt nicht notwendig, dass H_0 richtig ist.

Statistische Tests von Pseudozufallszahlen
Der Parameter $\alpha := P(Z > Z_\alpha | H_0$ ist wahr) ist meist vorgegeben. Übliche Werte für α sind 0.05 oder 0.01. Gesucht ist eine Testvorschrift, die zur Minimierung des „Risikos des Käufers“ führt.

Anwendung auf Pseudozufallszahlen
zu testen:

- Gleichverteilung der Pseudozufallszahlen über dem Intervall $[0, 1[$;
- Unabhängigkeit der Pseudozufallszahlen.

16.4 Test auf Gleichverteilung

Der χ^2–Anpassungs-Test

χ^2-Verteilung, Erinnerung, $Y \sim \chi^2_k$
$Y_1, \ldots, Y_k$ seien unabhängig, identisch verteilte Zufallszahlen mit $Y_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
Dann heißt die Zufallsvariable Y mit

$$Y = \sum_{i=1}^{k} Y_i^2$$

χ^2-verteilt mit k Freiheitsgraden.

Der χ^2–Anpassungs-Test (2)

Es seien jetzt X_i $(i = 1, \ldots, n)$ beliebige unabhängig und identisch verteilte Zufallsgrößen

$$\begin{aligned} B &= [0,1) \\ A_j &= \left[\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k}\right) \qquad n \geq 5k \\ p_j &= P(X \in A_j) = \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Wir testen

$$\begin{aligned} H_0: \quad p_j &= \frac{1}{k} \quad j = 1, \ldots, k \\ H_A: \quad p_j &\neq \frac{1}{k} \quad \text{für ein } j \end{aligned}$$

Der χ^2–Anpassungs-Test (3)

Dazu bilden wir

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(n_j - np_j)^2}{np_j} \qquad n_j = \#\{X_i : X_i \in A_j\}$$

Wenn H_0 zutrifft, gilt für große n dann approximativ,

$$\chi^2 \sim \chi^2_{k-1}.$$

Wenn H_0 richtig ist, gilt wegen dem schwachen Gesetz großer Zahlen $n_j \approx n \cdot p_j$

Offenbar, $0 \leq \chi^2$. Wenn $\chi^2 \leq c_\alpha$ wollen wir Hypothese H_0 annehmen, wenn $\chi^2 > c_\alpha$ lehnen wir diese ab.

Der χ^2–Anpassungs-Test (4)

c_α wird wie folgt festgelegt:

$$P(\chi^2 > c_\alpha | H_0 \text{ richtig}) = \alpha$$

ist die Wahrscheinlichkeit (bzw. das Risiko) dafür, das trotz "guter" Verteilung (Gleichverteilung) der Zufallszahlen wir die Hypothese H_0 ablehnen, d.h. die Nicht-Gleichverteilung annehmen.

Auf der empirischen Verteilungsfunktion beruhende Tests (allgemein)

Erinnerung (empirische Verteilungsfunktion): Seien $X_1, ..., X_n$ unabh. Beobachtungen, $X_{(1)} \leq ... \leq X_{(n)}$ die geordneten Beob. Die Funktion

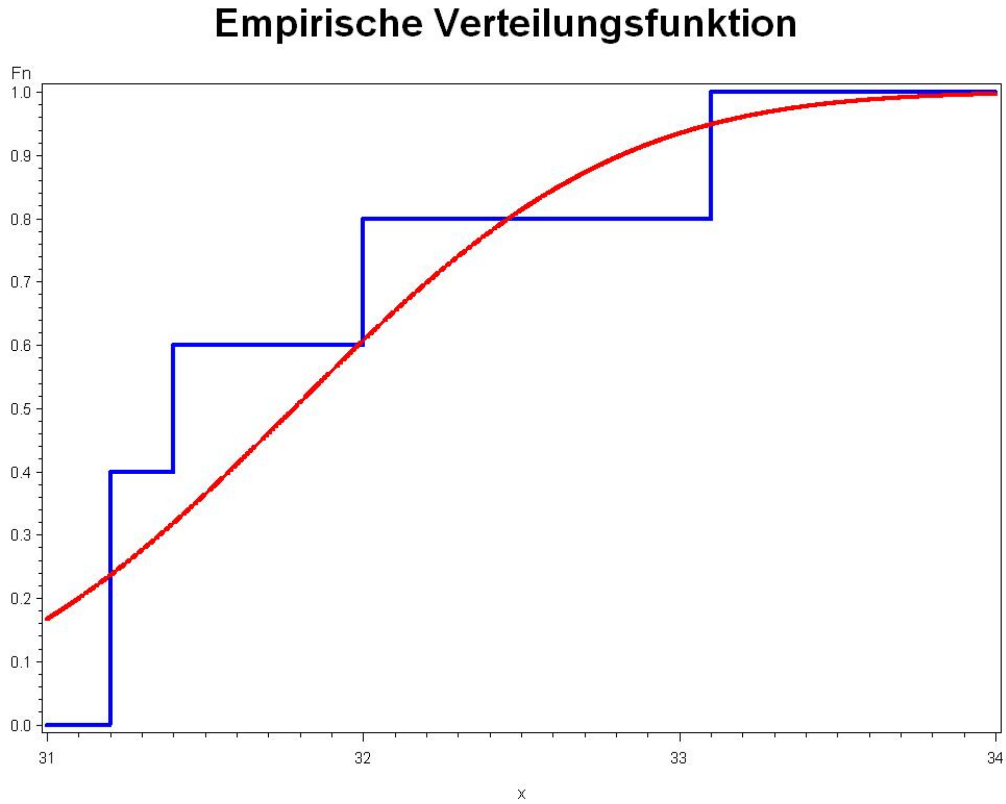
$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < X_{(1)} \\ \frac{i}{n} & X_{(i)} \leq x < X_{(i+1)} \qquad i = 1...n \\ 1 & X_{(n)} \leq x \end{cases}$$

heißt <u>empirische Verteilungsfunktion</u>.

Satz v. Glivenko-Cantelli: $F_n(x) \to F(x)$.

Der Satz von Glivenko–Cantelli

Wiederholung



Drei EDF-Tests

Kolmogorov-Smirnov-Test

$$D = \sup_x |F_n(x) - F_0(x)|$$

Cramer-von Mises-Test*

$$W^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} \big(F_n(x) - F_0(x)\big)^2 dF_0(x)$$

Anderson-Darling-Test*

$$A^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(F_n(x) - F_0(x))^2}{F_0(x)(1 - F_0(x))} dF_0(x)$$

hier: $F_0(x) = x$.

EDF-Tests, nur zur Info.
Modifikationen für endliche Stichproben

D**:** $D \cdot (\sqrt{n} - 0.01 + 0.85/\sqrt{n})$

A^2**:** $AD^2 \cdot (1.0 + 0.75/n + 2.25/n^2)$

W^2**:** $CM^2 \cdot (1.0 + 0.5/n)$

Kritische Werte W^2: D'Agostino, Stephens (1986), S. 123. A^2: Crawford Moss u.a. (1990)

Der Kolmogorov–Smirnov–Test

Erinnerung:

$$\lim_{n\to\infty} D_n = \lim_{n\to\infty} \sup_x |F_n(x) - x| = 0$$

Satz (KOLMOGOROV–SMIRNOV)

Es gilt für $x > 0$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} P(\sqrt{n}\cdot D_n < x) &= 1 + 2\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i \cdot e^{-2\cdot i^2\cdot x^2} \\ &=: Q(x)\end{aligned}$$

$Q(x)$ ist die Verteilungsfunktion der Kolmogorov-Verteilung.

Der Kolmogorov–Smirnov–Test

Praktische Durchführung

1. Die Pseudozufallszahlen werden der Größe nach geordnet, $u_{(1)} < u_{(2)} < \ldots < u_{(n)}$.
2. EDF: $F_n(x) = \frac{\#\{u_i:\ u_i<x,\, 0\le x<1\}}{n}$.
3. Wir ermitteln die Zahl $D_n := \sup_x |F_n(x) - x| = \max\left\{\max_{1\le i\le n} a_i, \max_{1\le i\le n} b_i\right\}$, $a_i := \left|u_{(i)} - \frac{i}{n}\right|$, $b_i := \left|u_{(i)} - \frac{i-1}{n}\right|$.
4. c_α: $1-\alpha$-Quantil der Kolmogorov-Verteilung.

   $\sqrt{n}\cdot D_n > c_\alpha \quad\Longrightarrow\quad$ Ablehnung der Hypothese H_0

   $\sqrt{n}\cdot D_n \le c_\alpha \quad\Longrightarrow\quad$ Annahme der HypotheseH_0

Der Kolmogorov–Smirnov–Test (2)

Dabei ist

$$\alpha = P(H \text{ abgelehnt}|H_0) = P(\sqrt{n}\cdot D_n > c_\alpha|H_0).$$

$$\text{D.h.}\quad Q(c_\alpha) = \lim_{n\to\infty} P(\sqrt{n}\cdot D_n < c_\alpha) = 1-\alpha.$$

α	c_α (gerundet)
0.01	1.63
0.05	1.36
0.1	1.22

16.5 Test auf Unabhängigkeit

Der Run–Test

Def. 68 (Run)

Jeder Teilabschnitt einer Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallszahlen, in dem die Zufallszahlen aufsteigend geordnet sind.

Wir teilen eine Folge in Runs ein:

Folge	2	1	2	3	2	4	1	7	8	9	0
Run	I.	II.			III.		IV.				V.
Länge des Runs	1	3			2		4				1

Run-Test (2)

Satz
Es sei $u_1, \ldots, u_n$ eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen mit $u_i \sim \mathrm{U}(0,1)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Dann gilt für die zufällige Länge R eines Runs:

$$P(R = r) = \frac{r}{(r+1)!}.$$

Wir beschreiben R also durch:

$$R: \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & r & \ldots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \ldots & \frac{r}{(r+1)!} & \ldots \end{pmatrix}.$$

Run-Test (3)
Beweis des Satzes
Wegen der Unabhängigkeit und der identischen Verteilung genügt es, die ersten $r+1$ Zufallsvariablen zu betrachten. Es gilt:

$$\begin{aligned} P(R = r) &= P(U_1 \leq \cdots \leq U_r > U_{r+1}) \\ &= P(U_1 \leq \cdots \leq U_r) - P(U_1 \leq \cdots \leq U_r \leq U_{r+1}) \\ &= \frac{1}{r!} - \frac{1}{(r+1)!} = \frac{r}{(r+1)!} \\ \sum_{i=1}^{\infty} P(R = i) &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i!} - \frac{1}{(i+1)!}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i+1)!} \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} - 1\right) - \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+1)!} - 1\right) = 1. \end{aligned}$$

Run-Test (4)
Seien $u_1, \ldots, u_n$ Pseudozufallszahlen. Wir testen

$$\begin{array}{lll} H_0: & u_1, \ldots, u_n \text{ sind unabhängig} & \text{gegen} \\ H_1: & u_1, \ldots, u_n \text{ sind abhängig.} & \end{array}$$

$R_1, \ldots, R_m$ sei die Folge der Längen der auftretenden Runs.
Diese Folgen sind jedoch nicht unabhängig (auch nicht, wenn X_i stochastisch unabhängig sind) Deshalb streichen wir nach jedem Run die nächste Zufallszahl, und berechnen die nachfolgenden Runlängen von neuem.

Run-Test (5)
Es entstehen die Größen $R_1^*, \ldots, R_m^*$, die unabhängig sind (Mathar/Pfeiffer, Lemma 6.2.2)
Formal sieht das folgendermaßen aus:
Seien die S_i die Stellen an denen ein Run zuende ist,

$$\begin{aligned} S_1 &= \inf\{n \in \mathbb{N} \colon u_{n+1} < u_n\} \\ S_2 &= \inf\{n \in \mathbb{N} \colon n > S_1 + 1, u_{n+1} < u_n\} \\ &\vdots \\ S_{k+1} &= \inf\{n \in \mathbb{N} \colon n > S_k + 1, u_{n+1} < u_n\} \end{aligned}$$

Run-Test (6)
Dann definieren wir:

$$\begin{aligned} R_1^* &:= S_1 \\ R_2^* &:= S_2 - S_1 - 1 \\ &\vdots \\ R_{k+1}^* &:= S_{k+1} - S_k - 1 \end{aligned}$$

Wenn nun die Hypothese H_0 gilt, dann ist:

$$P(R^* = r) = \frac{r}{(r+1)!},$$

und die R_i^* $(i = 1, \ldots, m)$ sind unabhängig.
Run-Test: Anpassungstest auf diese Verteilung

Run-Test (7)
Teilen $\mathbb{Z}^+$ in k disjunkte Teilintervalle auf:

$$[i_1 + 1, i_2], [i_2 + 1, i_3], \ldots, [i_k + 1, \infty)$$

$$p_j^* = \sum_{m=i_j+1}^{i_{j+1}} P(R^* = m) = P(i_j + 1 \leq R^* \leq i_{j+1})$$

$$n_j = \#_{i=1,\ldots,m}\{R_i^* : i_j + 1 \leq R_i^* \leq i_{j+1}\}$$

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(n_j - mp_j^*)^2}{mp_j^*} \sim \chi^2_{k-1}$$

Falls $\chi^2 >$ kritischer Wert, lehnen wir dir Unabhängigkeitshypothese ab.

Run-Test (8)

Gesamtumfang der zu erzeugenden Zufallszahlen sollte ≥ 4000 sein. Wir haben hier einen Anpassungstest auf eine gegbene diskrete Verteilung gemacht. χ^2-Anpassungstests (auf eine stetige Verteilung, hier Gleichverteilung) sollten, u.a. wegen der Willkür der Klasseneinteilung mit Vorsicht betrachtet werden.

Autokorrelationstest
Sei $U_1, \ldots, U_n$ eine Folge von zufälligen Variablen. Für alle m können wir nun bilden:

$$\rho_m(k) = \frac{\operatorname{cov}(U_m, U_{m+k})}{\sigma_{U_m}\sigma_{U_{m+k}}}$$

wobei $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$ Wenn $U_1, \ldots, U_n$ identisch verteilt so $\sigma_{U_j} = \sigma \quad \forall j$ und

$$\operatorname{cov}(U_m, U_{m+k}) = \operatorname{cov}(U_1, U_{k+1})$$

Autokorrelation k-ter Ordnung

$$\sigma_m(k) = \rho(k) = \frac{E(U_m \cdot U_{m+k}) - (EU_m)^2}{\sigma^2}$$

$\forall m, \quad k = 1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right].$

Autokorrelationstest (2)
Sei $u_1, \ldots, u_n$ eine Folge von Realisierungen.

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n-k} u_i \cdot u_{i+k} - \left(\frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n-k} u_i\right)^2}{\frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n-k} u_i^2 - \left(\frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n-k} u_i\right)^2}$$

ist die *empirische Autokorrelation* k-ter Ordnung.

Autokorrelationstest (3)

$\rho(k)$ ist die Pearson-Korrelation zwischen zwischen U_i und U_{i+k}.

Offenbar, $\rho(k) = 0 \quad \forall k \geq 1$, wenn die Zufallszahlen keine Autokorrelation besitzen. Für die $u_1, \ldots, u_n$ sollte dann gelten: $\hat{\rho}(k) \approx 0$.

Ersetzen wir die U_i durch ihre Ränge $R_1, \ldots, R_n$ und die U_{i+k} durch ihre Ränge $S_1, \ldots, S_n$

dann erhalten wir den Spearman-Rang-Korrelationskoeffizient r_S.

Autokorrelationstest (4)
Es gilt asymptotisch (wenn H_0 richtig ist)

$$r_S \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{n-1}).$$

Die Nullhypothese H_0: keine Autokorrelation wird also abgelehnt, wenn

$$\sqrt{n-1}|r_S| \geq z_{1-\alpha/2}$$

$z_{1-\alpha/2}$: $1 - \alpha/2$-Quantil der Standard-Normalverteilung, $z_{0.975} = 1.96$.

16.6 Erzeugung diskreter und stetiger Zufallsvariablen

diskrete Zufallsvariablen, Intervallmethode

$$X: \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_m \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_m \end{pmatrix}.$$

Zerlegen das Intervall $[0, 1]$ in Teilintervalle I_j,

$$I_j = \left[\sum_{k=0}^{j-1} p_k, \sum_{k=0}^{j} p_k\right[, \qquad (p_0 = 0)$$

Sei u eine Pseudozufallszahl. Wir setzen

$$X = x_j \quad \text{falls} \quad u \in I_j$$

Erzeugung stetiger Zufallsvariablen
Quantilmethode
Es sei $U \sim R(0, 1)$. Wir betrachten die Transformation

$$X := \varphi(U),$$

wobei φ monoton wachsend sei. Die Zufallsgröße X ist ebenfalls stetig, und für ihre Dichte gilt (nach der Transformationsformel für Dichten)

$$f_X(x) = h\left(\varphi^{-1}(x)\right) \cdot \left|\tfrac{d\varphi^{-1}(x)}{dx}\right|.$$

Wir wählen nun $\varphi := F^{-1}$. Dann erhalten wir:

$$f_X(x) = h(F(x)) \cdot \tfrac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

$X = F^{-1}(U) \sim F$.

Erzeugung einer normalverteilten Zufallsvariablen

Ziel: $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ erzeugen,

$$F(x) := \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Erzeugung einer solchen Zufallsgröße:

- Quantilmethode (siehe oben)
- Zentraler Grenzwertsatz
- Box-Müller Transformation
- Akzeptanzmethode (siehe unten)
- Ziggurat-Algorithmus (siehe unten)

Erzeugung einer normalverteilten Zufallsvariablen (2)

Quantilmethode $U \sim R(0,1)$. $\quad X := \Phi^{-1}(u) \sim \mathcal{N}(0,1)$, denn

$$f_X(x) = h(\Phi(x)) \cdot \frac{d\Phi(x)}{dx} = \frac{d\Phi(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Problem: Berechnung von $\Phi^{-1}(u)$ ist aufwendig.

Ziel: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ erzeugen,

$$Y := \mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(U) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2).$$

Erzeugung einer normalverteilten Zufallsvariablen (3)

Zentraler Grenzwertsatz (1)

$U_1, \ldots, U_n \sim R(0,1)$ unabhängig. Erwartungswert und Varianz sind

$$\mu := EU_i = \int\limits_0^1 x\, dx = \frac{1}{2} \qquad \sigma^2 := E\left(U_i - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^n U_i - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} < x\right) = \Phi(x).$$

Einsetzen:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^n U_i - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}} < x\right) = \Phi(x).$$

Erzeugung einer normalverteilten Zufallsvariablen (4)
Zentraler Grenzwertsatz (2)

Es sei $n = 12$.
Wir erhalten dann folgende Zufallsgröße X:

$$X = \sum_{i=1}^{12} U_i - 6.$$

Diese Approximation ist in der Regel ausreichend. Man braucht jedoch 12 Pseudozufallszahlen, um eine standardnormalverteilte Zufallsgröße zu erhalten.

Erzeugung einer normalverteilten Zufallsvariablen (5)

Satz BOX–MÜLLER–**Transformation**
Seien $U, V \sim R(0,1)$ unabhängig. Dann sind die Zufallsgrößen

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{-2 \cdot \ln U} \cdot \cos(2\pi V) \\ Y &= \sqrt{-2 \cdot \ln U} \cdot \sin(2\pi V) \end{aligned}$$

unabhängig und standardnormalverteilt, $X, Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Beweis: vgl. Abschnitt Transformationsformel □

Erzeugung exponentialverteilter Zufallsvariablen
Es sei $U \sim R(0,1)$ eine Pseudozufallszahl. Erzeugt werden soll eine Zufallsgröße $X \sim Exp(\lambda)$ mit der Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda \cdot x} & \text{, falls } x \geq 0; \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Dazu wird folgende Transformation verwendet

$$X := F^{-1}(U) = -\frac{1}{\lambda} \cdot \ln(1-u) \geq 0.$$

Erzeugung binomialverteilter Zufallsvariablen
Variante 1: Seien $X_i \sim Bi(1,p)$. Dann ist $X = \sum_{i=1}^n X_i$ binomialverteilt mit Parametern (n,p).

Variante 2: (Intervallmethode)
Zerlegen das Intervall $(0,1)$ in disjunkte Teilintervalle der Länge der Einzelwahrscheinlichkeiten,

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$(0,1) = \bigcup_{i=0}^{n} I_i = (0, p_0] \cup (p_0, p_0 + p_1] \cup (p_0 + p_1, p_0 + p_1 + p_2] \cup \cdots \cup (1 - \sum_{i=0}^{n-1} p_i, 1)$$

Sei $U \sim R(0,1)$. $\quad X = i \quad$ falls $U \in I_i$.

Erzeugung POISSON–verteilter Zufallsvariablen (1)
Es ist eine POISSON–verteilte Zufallsgröße X zu erzeugen, d.h.

$$P(X = i) = \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Variante 1: Intervallmethode

Variante 2: (Über die Exponentialverteilung)

Erzeugung POISSON**–verteilter Zufallsvariablen (2)**

Satz
Es seien $Y_1, \ldots, Y_k$ unabhängige exponentialverteilte Zufallsgrößen und $Y^{(k)} := \sum_{i=1}^{k} Y_i$, Dann gilt für die Dichte der Zufallsvariable $Y^{(k)}$:

$$f_{Y^{(k)}}(y) = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \cdot y^{k-1} \cdot e^{-\lambda \cdot y} & \text{, falls } y \geq 0; \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Diese Funktion ist die Dichte der <u>ERLANG–Verteilung</u> mit Parametern (k, λ).

Erzeugung POISSON**–verteilter Zufallsvariablen (3)**
Beweis. Wir beweisen die Aussage mittels vollständiger Induktion. Es sei $y \geq 0$.

IA: $Y^{(1)} = Y_1 \sim Exp(\lambda) = Erl(1, \lambda)$

IV: Es sei die Aussage für k gültig.

IS: Wir zeigen sie für $k+1$. Es gilt:

$$Y^{(k+1)} = Y^{(k)} + Y_{k+1}.$$

Bestimmen die Dichtefunktion $f_{Y^{(k+1)}}$ mittels Faltung der Dichtefunktionen $f_{Y^{(k)}}$ und $f_{Y^{(1)}}$.

Erzeugung POISSON**–verteilten Zufallsvariablen (4)**
Zum Beweis des Satzes:

$$\begin{aligned} f_{Y^{(k+1)}}(y) &= \int_0^\infty f_{Y^{(k)}}(x) \cdot f_{Y^{(1)}}(y-x)\, dx \\ &= \int_0^y \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \cdot x^{k-1} \cdot e^{-\lambda \cdot x} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot (y-x)}\, dx \\ &= \int_0^y \frac{\lambda^{k+1}}{(k-1)!} \cdot x^{k-1} \cdot e^{-\lambda \cdot y}\, dx \\ &= \frac{\lambda^{k+1}}{(k-1)!} e^{-\lambda y} \int_0^y x^{k-1}\, dx = \frac{\lambda^{k+1}}{k!} y^k e^{-\lambda y} \end{aligned}$$

Erzeugung einer POISSON**–Verteilten Zufallsvariable (5)**

Satz
Sind Y_i $(i \in \mathbb{N})$ unabhängige, exponentialverteilte Zufallsgrößen ($Y_i \sim \mathrm{EX}(\lambda)$, $i \in \mathbb{N}$), so ist die wie folgt definierte Zufallsvariable Y POISSON–verteilt mit Parameter λ:

$$Y := \inf \left\{ k \colon \sum_{i=1}^{k+1} Y_i > 1 \right\} \sim Poi(\lambda).$$

Es gilt also:

$$P(Y = i) = \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Erzeugung einer POISSON**–Verteilten Zufallsvariable (6)**
Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}
P(Y=k) &= P(\sum_{i=1}^{k} Y_i \leq 1, \sum_{i=1}^{k+1} Y_i > 1) \\
&= P(\sum_{i=1}^{k} Y_i \leq 1, Y_{k+1} > 1 - \sum_{i=1}^{k} Y_i) \\
&= \int_0^1 P(Y_{k+1} > 1 - T | T = t) f_T(t)\, dt \\
&= \int_0^1 P(Y_{k+1} > 1 - t) f_T(t)\, dt
\end{aligned}$$

Erzeugung einer POISSON**–Verteilten Zufallsvariable (7)**
Da $T = Y^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} Y_i$ Erlang-verteilt ist, folgt

$$\begin{aligned}
P(Y=k) &= \int_0^1 e^{-\lambda(1-t)} \cdot \frac{\lambda^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-\lambda t}\, dt \\
&= e^{-\lambda} \lambda^k \int_0^1 \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\, dt \\
&= e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Erzeugung einer geometrisch verteilten Zufallsvariable
Variante 1: Intervallmethode
Variante 2: Zur Erzeugung einer geometrisch verteilten Zufallsvariablen $X \sim Geo(p)$ seien $Y_i \sim Bi(1,p)$ Bernoulli verteilte Zufallsvariablen und

$$X = \min\{n : Y_n = 1\}$$

Variante 3: Sei $Y \sim Exp(\lambda)$, d.h. $F(y) = 1 - e^{-\lambda y}$. Die Zufallsvariable $\lfloor Y \rfloor + 1$ ist geometrisch verteilt mit $p = 1 - e^{-\lambda}$.

Erzeugung einer geometrisch verteilten Zufallsvariable (2)
Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned}
P(\lfloor Y \rfloor = k) &= P(k \leq Y < k+1) \\
&= F(k+1) - F(k) \\
&= (1 - e^{-\lambda(k+1)}) - (1 - e^{-\lambda k}) \\
&= e^{-\lambda k}(1 - e^{-\lambda}) = (1-p)^k p
\end{aligned}$$

□

16.7 Kompositionsmethode

Sei F eine Linearkombination von mehreren Verteilungsfunktionen F_i,

$$F = \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i F_i, \qquad \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i = 1, \qquad \epsilon_i \geq 0.$$

Algorithmus: Erzeuge gleichverteilte Zufallszahl U, falls $U \in [\sum_{j=1}^{i-1} \epsilon_j, \sum_{j=1}^{i} \epsilon_j)$ simuliere aus F_i.

Es folgen zwei Beispiele.

Kompositionsmethode (2)

Kontaminierte Normalverteilung

$$F(x) = (1-\epsilon)\Phi\big(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\big) + \epsilon\Phi\big(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\big)$$

Doppelexponential (Laplace)

$X_1 \sim exp(\lambda)$

$$X = \begin{cases} X_1 & \text{falls} \quad U \leq \frac{1}{2} \\ -X_1 & \text{falls} \quad U > \frac{1}{2} \end{cases}$$

16.8 Verwerfungsmethode

Verwerfungsmethode

oder Akzeptanzmethode oder Accept-Reject Sampling

F habe Dichte f, aber die Zufallszahlen seien schwierig direkt zu erzeugen.

Erzeugung von Zufallszahlen mit der Dichte g sei "leicht".

$$M := \sup_x \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$$

Algorithmus:

1. Simuliere $U \sim R(0,1)$
2. Simuliere $Y \sim g$
3. Akzeptiere $X = Y$, falls $U \leq \frac{1}{M}\frac{f(Y)}{g(Y)}$ sonst gehe nach 1. (neuer Versuch)

Verwerfungsmethode (2)

Berechnen die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zufallszahl akzeptiert wird, $\quad U \sim R(0,1), Y \sim g$:

$$\begin{aligned}
P(Y \text{akzeptiert}) &= P\Big(U \leq \frac{1}{M}\frac{f(Y)}{g(Y)}\Big) \\
&= \int P\Big(U \leq \frac{1}{M}\frac{f(Y)}{g(Y)} | Y = y\Big)\, g(y)\, dy \\
&= \int \frac{1}{M}\frac{f(y)}{g(y)} \cdot g(y)\, dy = \frac{1}{M}
\end{aligned}$$

wenn die Definitionsbereiche von X und Y übereinstimmen. (Integration über den Definitionsbereich von Y)

Im Mittel müssen also M Zufallszahlen Y erzeugt werden.

Verwerfungsmethode (3)

Die Methode ist korrekt, denn:

$$\begin{aligned}
P(X \leq x | Y \text{akzept.}) &= \int_{-\infty}^{x} P(X = Y = y | Y \text{akzept.}) g(y)\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{x} \frac{P(Y \text{akzept.,Y=y})}{P(Y \text{akzept.})} g(y)\, dy \\
&= \int \frac{P\Big(U \leq \frac{1}{M}\frac{f(y)}{g(y)}\Big)}{P(Y \text{akzept.})}\, g(y)\, dy \\
&= M \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{M}\frac{f(y)}{g(y)} g(y)\, dy \\
&= F(x).
\end{aligned}$$

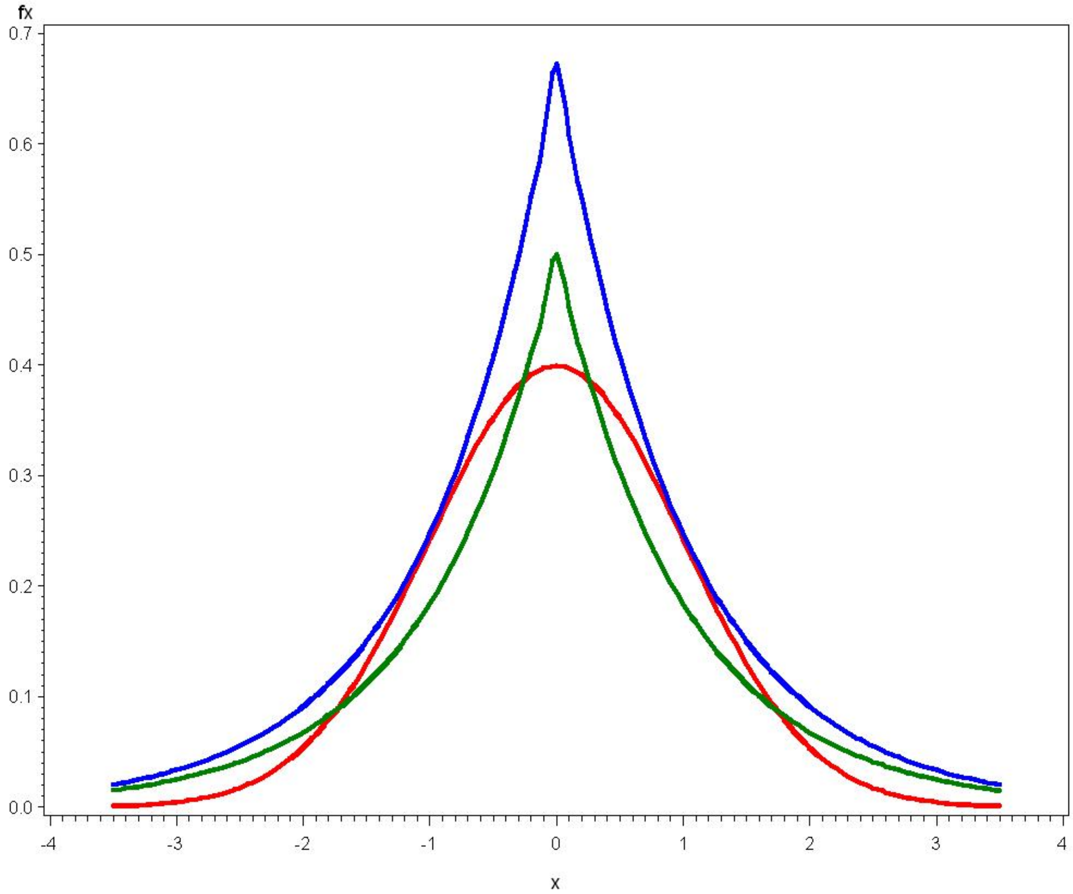
Verwerfungsmethode (4)

Simulation einer Standardnormal

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad \text{(Normal)} \\
g(x) &= \frac{1}{2} e^{-|x|} \quad \text{(Doppelexp)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sup_x \frac{f(x)}{g(x)} &= \sup_x \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2+|x|} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sup_x e^{(-x^2+2|x|-1+1)/2} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{1/2} \sup_{x,x\geq 0} e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{1/2} \approx 1.315.
\end{aligned}
$$

Verwerfungsmethode (5)



16.9 Ziggurat-Algorithmus

Anwendung der Verwerfungsmethode

Der Ziggurat-Algorithmus

Sei f die zu simulierende Verteilung, z.B. f=Normaldichte. Wir simulieren der Einfachheit halber nur den positiven Teil.

Idee ist, die Fläche unter der Dichte (möglichst knapp) zu überdecken durch Rechtecke. Dann wird ein zufälliger Punkt in dieser Überdeckung generiert, und wenn er in der Fläche liegt akzeptiert, sonst nicht.

Matlab 7.4

wird z.B. in Matlab 7.4 zur Erzeugung normalverteilter Zufallszahlen als Standard verwendet.

Der Ziggurat-Algorithmus

Vorbereitungen für den Ziggurat-Algorithmus

Sei n die Anzahl der Streifen. Dann werden die zur x-Achse parallelen Streifen sukzessive so definiert, dass die Flächeninhalte der Rechtecke und der Flächeninhalt des Basistreifens unter der Kurve jeweils gleich v sind. (v ist noch zu bestimmen!)

Der Flächeninhalt des Basistreifens (der durch die x-Achse, die Parallele $y = y_n = f(x_n)$ und den Tail von f begrenzt ist.) bzw. der der Rechtecke ist $(r = x_{n-1})$

$$v := rf(r) + \int_r^\infty f(t)\,dt \quad bzw. \quad v = x_{i+1}(f(x_{i+1}) - f(x_i)).$$

Der Ziggurat-Algorithmus

Vorbereitungen für den Ziggurat-Algorithmus, 2

Zu bestimmen sind v sowie die Punkte $x_i, i = 255, \ldots, 0$. Dies geschieht rekursiv, indem man $r = x_{255}$ geschickt rät, den Algorithmus laufen lässt, und (hoffentlich) mit $x_0 \approx 0$ endet.

Algorithmus zur Bestimmung der x_i:

- 1. Rate r. Bei $n = 256$ etwa $r = 3.5$. Das bekommt man etwa, wenn man die Flächeninhalte $v = v_{start}$ etwa auf $\frac{1}{256}$ setzt.
- 2. **for** i **from** $n-1$ **to** 0 **do** $x_i = f^{-1}(\frac{v}{x_{i+1}} + f(x_{i+1}))$
- 3. Wenn $x_0 \approx 0$ nehme die berechneten x_i **return**
- 4. Aktualisiere r und gehe zu 1. Wenn $x_0 > 0$ so r verkleinern (v war zu klein und r zu groß), sonst vergrößern.

Ziggurat-Algorithmus

- 1. Wähle eine zufällige ganze Zahl i, $1 \le i \le n+1$
- 2. Sei $U \sim R(0,1)$ und $x = Ux_i$
- 3. Wenn $x < x_{i-1}$ so **akzeptiere x, return** Wenn $i = n+1$ gehe nach 6. (der unterste Streifen)
- 4. Sei $V \sim R(0,1)$ und $y = y_i + V(y_{i-1} - y_i)$.
- 5. Berechne $f(x)$, Wenn $f(x) > y$ **akzeptiere x, return** sonst gehe nach 1. zurück.
- 6. Jetzt ist nur noch eine Beobachtung aus dem Tail der Verteilung, $x > x_n =: r$ zu generieren. Dazu wird die Akzeptanzmethode verwendet.

Ziggurat-Algorithmus

Anmerkungen

- zu 1. Hier wird der Streifen ausgewählt. Je größer n, desto schmaler die Streifen, und desto knapper die Überdeckung von f, und desto mehr Zufallszahlen werden akzeptiert. (Marsaglia: n=255)
- Die Werte von (x_i, y_i) sind in einer Tabelle abzuspeichern.
- zu 3. Wenn $x < x_{i-1}$ so liegt der Punkt (x, y) sicher in der Fläche unterhalb f.
- zu 5. Wenn $f(x) > y$ dann liegt der Punkt (x, y) in der Fläche unterhalb f.

Ziggurat-Algorithmus
Der Fall des Basisstreifens ($i = n+1$), f Standardnormal
Zu generieren ist eine Beobachtung aus dem Tail der Verteilung f (normal). Die bedingte Dichte ist dann $f/(1-\Phi(r))$. Proposal Verteilung sei verschobene Exponential, z.B. $g(x) = re^{-r(x-r)}, x \geq r$. (bei $n = 256$ ist $r \approx 3.65$.)

$$\begin{aligned} M &:= \sup_{x\geq r} \frac{f(x)/(1-\Phi(r))}{g(x)} = \sup_{x\geq r} \frac{1}{(1-\Phi(r))\sqrt{2\pi}r} e^{-\frac{x^2}{2}+rx-r^2} \\ &= \frac{e^{-\frac{r^2}{2}}}{(1-\Phi(r))\sqrt{2\pi}r} \sup_{x\geq r} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2rx+r^2)} = \frac{e^{-\frac{r^2}{2}}}{(1-\Phi(r))\sqrt{2\pi}r} \\ &\approx 1.06 \end{aligned}$$

(Das ist die Version von Marsaglia)

Akzeptanzmethode für den Basisstreifen

- Erzeuge $U \sim R(0,1)$
- Erzeuge $V \sim g$, d.h. $V = r - \frac{\ln V_1}{r}$ und $V_1 \sim R(0,1)$.
- Akzeptiere falls
$$U \leq \frac{1}{M}\frac{f(V)}{g(V)} = \frac{1}{M} M e^{-\frac{1}{2}(V-r)^2} \quad \text{gdw.}$$
$$\begin{aligned} -\ln U &\geq \frac{1}{2}(V-r)^2 \quad \text{gdw.} \\ 2(-\ln U) &\geq \left(-\frac{\ln V_1}{r}\right)^2 \quad \text{gdw.} \\ 2Y &\geq X^2, \end{aligned}$$
wobei $Y \sim Exp(1), X \sim \frac{1}{r}Exp(1)$.

16.10 Korrelierte Zufallsgrößen

Erzeugung von korrelierten Zufallsgrößen
Es seien X und Y zwei unabhängige, standardisierte Zufallsgrößen ($X, Y \sim (0,1)$). Seien

$$\begin{aligned} X^* &:= X \\ Y^* &:= \varrho \cdot X + \sqrt{1-\varrho^2} \cdot Y \qquad (\varrho \in [0,1]) \end{aligned}$$

Beh.: ϱ ist der gewünschte Korrelationskoeffizient zwischen X^* und Y^* (s. Abschnitt Korrelation).
Ist $\varrho = 1$, dann gilt $Y^* = X^* = X$, d.h. die beiden Zufallsgrößen sind identisch. Wird $\varrho = 0$ gewählt, so sind beide Zufallsvariablen unabhängig.

16.11 Importance Sampling

Importance Sampling
Ziel: Berechnung (Schätzung) von Integralen
$$I = \int h(x) f(x)\, dx,$$
wobei f eine Dichte ist.

1. Methode: Monte Carlo

Simulieren Realisierungen $x_1, \ldots, x_n$ aus einer Population mit Dichte f.
Schätzen den Erwartungswert I durch das arithmetische Mittel

$$\hat{I} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(x_i)$$

Berechnung (Schätzung) von Integralen (2)
Aber, was wenn Simulation von f schwer ist?

2. Methode: Importance Sampling
Suchen uns eine Dichte g, die "leicht" zu simulieren ist. Dann wird

$$I = \int h(x)\frac{f(x)}{g(x)} g(x)\, dx$$

geschätzt durch

$$\hat{I}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(x_i)\frac{f(x_i)}{g(x_i)}$$

Berechnung (Schätzung) von Integralen (3)

Problem: $\hat{I}_1$ kann unendliche Varianz haben
Lösung: g "nahe" f (dann der Quotient nahe 1) und g "dickere" Tails als f, der Quotient ist dann in den Tails < 1.

16.12 Ergänzungen

Das Buffonsche Nadelproblem (1777)
In der Ebene seien zwei parallele Geraden im Abstand a gezogen.
Auf die Ebene wird zufällig eine Nadel der Länge l, $\quad (l \leq a)$ geworfen.
Frage: Wie groß ist die Wkt., daß die Nadel eine der Geraden schneidet?

Was heißt Nadel zufällig werfen?

X: Abstand des Nadelmittelpunkts von der nächstgelegenen Geraden, $0 \leq X \leq \frac{a}{2}$.

ϕ: Winkel zwischen Nadel und Geraden, $0 < \phi \leq \pi$.

Das Buffonsche Nadelproblem (2)
Nadel zufällig werfen:

$$X \sim R(0, \frac{a}{2}), \qquad \phi \sim R(0, \pi).$$

Wann schneidet die Nadel eine Parallele? gdw.

$$X \leq \frac{l}{2}\sin\phi \qquad \text{gdw.}$$

der Punkt (ϕ, X) unterhalb des Sinusbogens liegt.

$$\begin{aligned} P &= \frac{\text{Fläche unterhalb des Sinusbogens}}{\text{Fläche des Rechtecks}[0,\pi]\text{x}[0,\frac{a}{2}]} \\ &= \frac{\int_0^\pi \frac{l}{2}\sin\phi\, d\phi}{\pi\cdot\frac{a}{2}} = \frac{2l}{\pi a} \end{aligned}$$

Das Buffonsche Nadelproblem (3)

Insbesondere: $a = 2l$:

$$P = \frac{1}{\pi}.$$

Schätzung für π:

$$\hat{\pi} = \frac{\#\text{Würfe}}{\#\text{Treffer}}$$

Simulation einer Markov'schen Kette

gegeben: Zustandsraum: $S = \{1, 2, \ldots\}$ Anfangsverteilung: $\{p_j^0\}_{j=1,2\ldots}$, $\quad (p_0^0 = 0)$ Übergangsmatrix:

$$\left(p_{ij}\right)_{\substack{i=1,2,\ldots \\ j=1,2,\ldots}}$$

1. Schritt: Erzeuge eine Pseudozufallszahl U_0. Falls

$$\sum_{k=0}^{i-1} p_k^0 \le U_0 < \sum_{k=0}^{i} p_k^0$$

so starte im Zustand "i".

Simulation einer Markov'schen Kette (2)

n-ter Schritt: Im $n-1$ten Schritt sei der Zustand "i" erreicht worden. Erzeuge eine Pseudozufallszahl U_n. Falls

$$\sum_{k=0}^{j-1} p_{ik} \le U_n < \sum_{k=0}^{j} p_{ik}$$

so gehe in den Zustand "j".

***Simulation von auf der Kugeloberfläche**

gleichverteilten Zufallsvariablen

Satz: Seien $X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$, i.i.d. $\quad i = 1, \ldots, n$, **und**

$$Y_i = \frac{X_i}{R}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

wobei

$$R^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

Dann gilt

$$Y_i \sim R(K_n^O(0,1)),$$

wobei $K_n^O(0,1)$ die Oberläche der n-dimensionalen Einheitskugel ist.

***Simulation von auf der Kugeloberfläche**

gleichverteilten Zufallsvariablen

Sei $K_{n-1}(0,1)$ die $n-1$ dim. Einheitsvollkugel. Wir betrachten die Transformation

$$G : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+ \to K_{n-1}(0,1) \times \mathbb{R}^+$$

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{x_2}{r} \\ &\cdots \\ y_n &= \frac{x_n}{r} \\ r &= r \end{aligned}$$

*__Simulation von auf der Kugeloberfläche__
gleichverteilten Zufallsvariablen
Diese Abbildung ist injektiv und es gilt für G^{-1}:

$$\begin{aligned} x_2 &= r \cdot y_2 \\ &\dots \\ x_n &= r \cdot y_n \\ r &= r \end{aligned}$$

*__Simulation von auf der Kugeloberfläche__
gleichverteilten Zufallsvariablen
Die Jacobi-Matrix ist

$$J := \frac{\partial G^{-1}(y_2, \dots, y_n, r)}{\partial(y_2, \dots, y_n, r)} = \begin{pmatrix} r & 0 & \dots 0 & y_2 \\ 0 & r & \dots 0 & y_3 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots r & y_n \\ 0 & 0 & \dots 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also: $\det J = r^{n-1}$.

*__Simulation von auf der Kugeloberfläche__
gleichverteilten Zufallsvariablen
Die gemeinsame Dichte von $(\mathbf{Y}, R) = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n, R)$ ist $f_{\mathbf{Y},R}(y_1, \dots, y_n, r) =$

$$\begin{aligned} &= \begin{cases} f_{\mathbf{X},R}(ry_1, G^{-1}(y_2, \dots, y_n, r)) \det J, & y_1^2 = 1 - \sum_2^n y_j^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \prod_{j=1}^n e^{-\frac{r^2 y_j^2}{2}} \cdot r^{n-1}, & y_n^2 = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} y_j^2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r^{n-1} & \text{falls} \quad y_n^2 = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} y_j^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

*__Simulation von auf der Kugeloberfläche__
gleichverteilten Zufallsvariablen
Die Zufallsvektoren $(Y_1, \dots, Y_n)$ und R sind also unabhängig und wegen

$$\frac{e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r^{n-1}}{(2\pi)^{n/2}} = \frac{r^{n-1} e^{-\frac{r^2}{2}}}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}}} = f_{\chi_n}(r) \cdot \frac{1}{A_{K_n^O(0,1)}}$$

ist

$$R \sim \chi_n \quad \text{und} \quad \mathbf{Y} \sim R(K_n^O(0,1))$$

mit der Dichte $\frac{1}{A_{K_n^O(0,1)}}$, wobei

$$A_{K_n^O(0,1)} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

die Fläche der n-dimensionalen Einheitskugel ist.

*Simulation von auf der Kugeloberfläche

gleichverteilten Zufallsvariablen

Bem.: Die Fläche der n-dimensionalen Kugeloberfläche ist, vgl. Fichtenholz 3, S.389,

$$A_{K_n^O(0,r)} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} r^{n-1}$$

$n = 2$: $2\pi r$

$n = 3$: $4\pi r^2$ $\quad \left(\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$

$n = 4$: $4\pi^2 r^3$

17 Markov'sche Ketten

Markov'sche Ketten

Beispiele

Irrfahrten (auf der Geraden, der Ebene, im Raum) Ruin des Spielers Markov Chain Monte Carlo (z.B. Simulated Annealing)

Fragestellungen

Rückkehr-, Absorptionswahrscheinlichkeiten Erste Rückkehr Stationäre Verteilungen

17.1 Begriffe und einfache Zusammenhänge

$\{X_t\}_{t\in T}$: Famile von Zufallsgrößen.

T: total geordnete Menge (mit kleinstem Element t_0).

T endlich, o.B.d.A. $T = \{0, 1, 2, \ldots, k\}$ oder

T abzählber, o.B.d.A. $T \in \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}$

Wir betrachten ein System, das aus einem Anfangszustand für $t = t_0$ schrittweise übergeht in Zustände für $t = t_1, t = t_2, \ldots$.

Menge der Zustände: Zustandsraum S, $S = \{1, 2, \ldots, m\}$ oder $S = \mathbb{N}$ oder $S = \mathbb{Z}$.

Definitionen (2)

Für jedes t wird der (aktuelle) Zustand durch eine Zufallsvariable X_t beschrieben,

$$P(X_t \in S) = 1, \qquad F_t(x) := P(X_t < x)$$

Def. 69 (Markov Kette)

Eine Familie $\{X_t\}_{t\in T}$ Zufallsgrößen heißt Markov Kette, falls gilt:

$$\begin{aligned} P(X_{t+1} = j | X_t = i, X_{t-1} = i_{t-1}, \ldots, X_0 = i_0) &= P(X_{t+1} = j | X_t = i) \\ &= p_{ij}^{(t)}. \end{aligned}$$

Die Anfangsverteilung der MARKOV-Kette bezeichnen wir mit $p_i^{(0)} = P(X_0 = i)$.

Definitionen (3)

Bem.: Wir stellen uns also vor, dass wir, beginnend im Zustand i_0, über die Zustände $i_1, \ldots, i_{t-1}$ in den Zustand i gelangt sind und nun in einen weiteren Zustand übergehen wollen. Eine Familie von Zufallsgrößen ist eine MARKOV'sche Kette, wenn für den Übergang in diesen Zustand nur der unmittelbar vorangegangene Zustand, also der Zustand i, relevant ist. (Markov-Eigenschaft)

Definitionen (4)

Def. 70 (homogene Markov-Kette)

Eine MARKOV-Kette heißt homogen, wenn für alle $i, j \in S$ und für alle $t \in T$ gilt, daß $p_{ij}^{(t)} = p_{ij}$, d.h. wenn die Übergangswahrscheinlichkeiten unabhängig vom jeweiligen Schritt t sind.

p_{ij} heißt Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand i in den Zustand j.

Definitionen (4)

Def. 71 (Übergangsmatrix)
Die Matrix $\mathbf{M} = (p_{ij})_{i,j\in S}$,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix},$$

heißt Übergangsmatrix, falls

$$p_{ij} \geq 0, \quad \forall i,j \in S \text{ und } \sum_{j\in S} p_{ij} = 1 \quad \forall i \in S,$$

Definitionen (5)
Wir werden ausschließlich homogene MARKOV-Ketten betrachten.

Def. 72 (n-Schritt Übergangswahrscheinlichkeit)
Es sei $\{X_t\}_{t\in T}$ eine solche homogene MARKOV-Kette. Wir definieren:

$$p_{ij}(n) := P(X_{m+n} = j|\, X_m = i).$$

Das ist die Wahrscheinlichkeit, daß man nach n Schritten aus dem Zustand i in den Zustand j gelangt.

Da die Kette homogen ist, gilt:

$$p_{ij}(n) = P(X_n = j|\, X_0 = i).$$

Einfache Zusammenhänge (1)
Wie kann man die Matrix für die Wahrscheinlichkeiten $p_{ij}(n)$ aus der (Ein–Schritt–)-Übergangsmatrix berechnen?

$$\begin{aligned} p_{ij}(0) &= \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \\ p_{ij}(1) &= p_{ij} \\ p_{ij}(2) &= P(X_2 = j|\, X_0 = i) \\ &= \sum_{k\in S} P(X_2 = j, X_1 = k|\, X_0 = i) \end{aligned}$$

Einfache Zusammenhänge (2)
Wenden die Formel der Totalen Wahrscheinlichkeit an,

- $A_i := \{X_1 = i\}$, für alle $i \in S$, denn: $\bigcup_{i\in S} A_i = \Omega$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$, für alle $i, j \in S$ mit $i \neq j$;

$$\begin{aligned} p_{ij}(2) &= \sum_{k\in S} P(X_2 = j|\, X_1 = k, X_0 = i) \cdot P(X_1 = k|\, X_0 = i) \\ &= \sum_{k\in S} P(X_2 = j|\, X_1 = k) \cdot P(X_1 = k|\, X_0 = i) \\ &= \sum_{k\in S} p_{kj} \cdot p_{ik} = (\mathbf{M}^2)_{ij} \end{aligned}$$

Einfache Zusammenhänge (3)

Rekursion von Chapman–Kolmogorov

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_n &= \mathbf{M}^n \\ p_{ij}(n) &= \sum_{k\in S} p_{ik}(n-m)\cdot p_{kj}(m) \\ &= \sum_{k\in S} p_{ik}(n-1)\cdot p_{kj}, \quad (m=1).\end{aligned}$$

Einfache Zusammenhänge (4)

Folgerung

$$P(X_n=j)=\sum_k p_{kj}(n)\cdot p_k^0.$$

Beweis: Seien $\pi_j = P(X_n = j)$, $\boldsymbol{\pi}^T = (\pi_1, \pi_2, \ldots)$ und $\mathbf{p}^{0^T} = (p_1^0, p_2^0, \ldots)$. Es gilt

$$\begin{aligned}P(X_n=j) &= \sum_k P(X_n=j, X_0=k) \\ &= \sum_k P(X_n=j|X_0=k)\cdot P(X_0=k) \\ &= \sum_k p_{kj}(n)\cdot p_k^0 \\ \boldsymbol{\pi} &= \mathbf{M}^{n^T}\cdot\mathbf{p}^0, \qquad \boldsymbol{\pi}^T=\mathbf{p}^{0^T}\cdot\mathbf{M}^n\end{aligned}$$

□

Beispiele

Ein-Prozessorsystem **mit einer I/O–Einheit**
$S = \{1, 2\}$
1: Programmstatus, in dem sich das System befindet, wenn es ein Programm abarbeitet (Prozessor aktiv)
2: I/O–Status, der dann angenommen wird, wenn die I/O–Einheit aktiviert wird.
Für jeden Schritt n, den das System macht, definieren wir eine Zufallsgröße X_n, $X_n = i$, $i \in S$.

Ein-Prozessorsystem (2)

$$\begin{aligned}X_n=1 &\implies X_{n+1}=1, \text{ mit Wahrscheinlichkeit } 1-p \\ X_n=1 &\implies X_{n+1}=2, \text{ mit Wahrscheinlichkeit } p \\ X_n=2 &\implies X_{n+1}=1, \text{ mit Wahrscheinlichkeit } 1 \\ X_n=2 &\implies X_{n+1}=2, \text{ mit Wahrscheinlichkeit } 0\end{aligned}$$

Übergangsmatrix:

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}1-p & p \\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Ein-Prozessorsystem (3)
Anfangsverteilung $p_i^{(0)} = P(X_0 = i)$:

- $p_1^{(0)} = 1$, d.h. die erste Aktion ist mit Wahrscheinlichkeit Eins die Ausführung eines Programms;
- $p_2^{(0)} = 0$, d.h. die erste Aktion ist mit Wahrscheinlichkeit Null die Aktivierung der I/O–Einheit.

$$\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} (1-p)^2 + p & p(1-p) \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

17.2 Klassifikation der Zustände

Def. 73 (Erreichbarkeit)
Ein Zustand j heißt vom Zustand i aus erreichbar, wenn es eine Zahl n gibt, so daß gilt: $p_{ij}(n) > 0$. Bez.: $i \longrightarrow j$.

Def. 74 (Kommunikation)
Zwei Zustände i und j kommunizieren, wenn gilt: $i \longrightarrow j$ und $j \longrightarrow i$. Wir schreiben dann: $i \longleftrightarrow j$.

Klassifikation der Zustände
Die Relation „$\longleftrightarrow$“ ist eine Äquivalenzrelation:

1. Sie ist **reflexiv**. Es gilt: $i \longleftrightarrow i$ wegen $p_{ii}(0) = 1$.
2. Sie ist **symmetrisch**. $i \longleftrightarrow j$ gdw. $j \longleftrightarrow i$.
3. Sie ist **transitiv**. Es gelte $i \longleftrightarrow j$ und $j \longleftrightarrow k$. D.h. es existieren Zahlen $m, n \geq 0$, so dass gilt:

$$p_{ij}(m) > 0, \quad p_{jk}(n) > 0.$$

Dann folgt aus Chapman–Kolmogorov

$$\begin{aligned} p_{ik}(m+n) &= \sum_{l \in S} p_{il}(m) \cdot p_{lk}(n) \\ &\geq p_{ij}(m) \cdot p_{jk}(n) > 0. \end{aligned}$$

Klassifikation der Zustände
Nach $m+n$ Schritten erreicht man folglich vom Zustand i aus den Zustand k. Es gilt also: $i \longrightarrow k$. Mit Hilfe der Symmetrieeigenschaft der Relation „$\longleftrightarrow$“, angewendet auf die Voraussetzung, folgt $k \longrightarrow i$.

Folgerung
Es sei S der Zustandsraum einer MARKOV’schen Kette. Es gibt eine Zerlegung von S in Äquivalenzklassen bzgl. der Relation „$\longleftrightarrow$“.

Klassifikation der Zustände
Die Menge der Zustände lässt sich weiter unterteilen.

Def. 75 (wesentliche und unwesentliche Zustände)
Gibt es für einen Zustand i einen Zustand j und eine Zahl $n \geq 0$, so dass

$$p_{ij}(n) > 0, \text{ aber } p_{ji}(m) = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

gilt, so heißt i unwesentlicher oder auch vorübergehender Zustand. Andernfalls heißt i wesentlicher Zustand.

Klassifikation der Zustände

Beispiel

Wir betrachten den Zustandsraum $S = \{1, 2, 3, 4\}$
und eine MARKOV- Kette mit der Übergangsmatrix

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Zustände 1 und 2: unwesentlich. Für den Zustand 1 existiert der Zustand 3, für den gilt, daß $p_{13}(1) = \frac{1}{2} > 0$ ist. Eine Zahl m, für die $p_{31}(m) > 0$ ex. nicht. Zustände 2 mit 4: analog.

Klassifikation der Zustände

Fortsetzung des Beispiels

Die Zustände 3 und 4 sind dagegen wesentlich.
An der Matrix $\mathbf{M}$ (vgl. folgende Folie) kann man die Klassen ablesen.
Die Elemente des Zustandsraumes sind in hier bereits so sortiert, daß die unwesentlichen Zustände vorn stehen. In der Matrix stehen in den ersten beiden Spalten im unteren Bereich nur noch Nullen. Sie zeigen an, daß man aus den durch die Zeilennummern bezeichneten Zuständen nicht mehr in die Zustände, die durch die betreffenden Spaltennummern gekennzeichnet werden, zurückkehren kann.

Übergangsmatrix, geordnet

Zustände	unwesentliche	wesentliche		
	S_0	S_1	...	S_k
unwesentlich				
wesentlich	0..0		0..0	0..0
	0..0	0..0		0..0
	0..0	0..0	0..0	

S_i: die Zustandsklassen, in die der Zustandsraum S bzgl. der Äquivalenzrelation „$\longleftrightarrow$“ zerlegt werden kann.

Klassifikation der Zustände

S_0 ist die Klasse der unwesentlichen Zustände, S_i $(i \geq 1)$ sind die Klassen der wesentlichen Zustände.
Die leeren Felder sind Teilmatrizen der Matrix M, die mit Übergangswahrscheinlichkeiten bestzt sind.
Man sieht, dass in S_i, $i \geq 1$, Übergänge nur innerhalb einer Zustandsklasse möglich sind.

Def. 76 (absorbierender Zustand)
Besteht eine Äquivalenzklasse s_i bzgl. „$\longleftrightarrow$“ nur aus einem einzigen Zustand ($s_i = \{j_i\}$), so heißt dieser Zustand absorbierender Zustand.

Klassifikation der Markov-Kette

Def. 77 (Irreduzibilität)
Eine MARKOV'sche Kette heißt irreduzibel oder unzerlegbar, wenn der Zustandsraum S aus genau einer Klasse besteht, und alle Zustände wesentlich sind.

$S = \{1, 2\}$, *Übergangsmatrix:*

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = M_n \quad \forall n \geq 1.$$

$\{X_t\}$ ist reduzibel! Zustand 1 ist absorbierend! Zustand 2 ist unwesentlich.

Beispiel einer irreduziblen MK

Sei $S = \{1, 2, 3\}$, *Übergangsmatrix:*

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{19}{48} & \frac{11}{48} \\ \frac{1}{6} & \frac{11}{36} & \frac{19}{36} \end{pmatrix}$$

$p_{ij}(2) > 0 \quad \forall i, j \in S.$ $\{X_t\}$ ist irreduzibel!
Alle Zustände kommunizieren miteinander.

17.3 Rekurrente und transiente Zustände

Sei i fest und

$$f_i(n) = P(X_n = i, X_{n-1} \neq i, \ldots, X_1 \neq i, X_0 = i)$$

die Wahrscheinlichkeit, dass nach n Schritten erstmalig wieder der Zustand i erreicht wird. Es gilt:

$$f_i(0) := 0 \text{ und } f_i(1) = p_{ii}.$$

B_k: Ereignis, erstmals nach k Schritten wieder in i.

$$B_k = \{X_k = i, X_\nu \neq i \quad \forall \nu = 1, \ldots, k-1 | X_0 = i\}$$

$B_{n+1} = \{$System befand sich während der ersten n Schritte nie im Zustand $i\}$.

Rekurrente und transiente Zustände

Offenbar

$$\bigcup_{l=1}^{n+1} B_l = \Omega, \qquad B_l \cap B_{l'} = \emptyset \quad (l \neq l').$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} p_{ii}(n) &= P(X_n = i | X_0 = i) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} P(X_n = i | B_k) \cdot P(B_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} p_{ii}(n-k) f_i(k) + \underbrace{P(X_n = i | B_{n+1})}_{=0} \cdot P(B_{n+1}) \end{aligned}$$

Rekurrente und transiente Zustände

Wegen $P(X_n = i|B_{n+1}) = 0$ folgt

$$p_{ii}(n) = \sum_{k=1}^{n} f_i(k) \cdot p_{ii}(n-k) \qquad (n \geq 1).$$

Damit läßt sich $f_i(k)$ rekursiv berechnen:

$$\begin{aligned} f_i(0) &= 0, \qquad f_i(1) = p_{ii} \\ p_{ii}(2) &= f_i(1) \cdot p_{ii}(1) + f_i(2) \cdot p_{ii}(0) \\ &= p_{ii}^2 + f_i(2) \\ f_i(2) &= p_{ii}(2) - p_{ii}^2 \qquad \text{usw.} \\ \big(p_{ii}(2) &= \sum_k p_{ik}p_{ki} \geq p_{ii}^2\big). \end{aligned}$$

Rekurrente und transiente Zustände

Wir bezeichnen mit

$$F_i := \sum_{j=1}^{\infty} f_i(j)$$

die Wahrscheinlichkeit, dass man irgendwann in den Zustand i zurückkehrt.

Def. 78 (rekurrente und transiente Zustände)

Ein Zustand $i \in S$ heißt rekurrent, wenn $F_i = 1$ gilt. Ist dagegen $F_i < 1$, so heißt er transient.

Rekurrente und transiente Zustände

Satz

Zustand i rekurrent $\Rightarrow$ er wird unendlich oft erreicht mit Wahrscheinlichkeit 1.

Zustand i transient $\Rightarrow$ er kann höchstens endlich oft erreicht werden.

Beweis des Satzes (1)

Sei $r_i(k)$ die Wahrscheinlichkeit, dass die MK mindestens k mal nach i zurückkehrt.

$$\begin{aligned} r_i(k) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(\geq k \text{ mal zurück}|\text{erstmals nach n Schritten zurück}) \cdot \\ &\qquad P(\text{erstmals nach } n \text{ Schritten zurück}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} r_i(k-1) f_i(n) \\ &= r_i(k-1) \sum_{n=1}^{\infty} f_i(n) = r_i(k-1) F_i \end{aligned}$$

$\Rightarrow r_i(k) = F_i^k$

Beweis des Satzes (2)

Ist i rekurrent, also $F_i = 1$, dann $r_i(k) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Sei i transient, d.h. $F_i < 1$.

Sei Z_i die Anzahl der Besuche in i.

$$P(Z_i = k) = F_i^k (1 - F_i)$$

geometrische Verteilung mit Parameter $(1 - F_i)$.

$$\mathbf{E}Z_i = \frac{1}{1 - F_i} < \infty$$

Rekurrente und transiente Zustände

Satz
Ein Zustand i ist genau dann rekurrent, wenn gilt: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty$.

Er ist genau dann transient, wenn $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ii}(n) < \infty$ ist.
Beweis: (für einen anderen Beweis siehe z.B. Mathar/Pfeifer, Satz 3.2.1) □
Erinnerung:

$$p_{ii}(n) = \sum_{k=1}^{n} f_i(k) \cdot p_{ii}(n-k) \qquad (n \geq 1)$$

Multiplizieren diese Gleichung mit z^n und summieren über n:

Beweis des Satzes (1)
Es gilt $P_i(z) :=$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) z^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} z^n \Bigg(\sum_{k=1}^{n} f_i(k) \cdot p_{ii}(n-k) \Bigg) \\
&= \quad z f_i(1) \cdot p_{ii}(1-1) \\
&\quad + z^2 \big(f_i(1) \cdot p_{ii}(2-1) + f_i(2) \cdot p_{ii}(2-2) \big) \\
&\quad + z^3 \big(f_i(1) \cdot p_{ii}(3-1) + f_i(2) \cdot p_{ii}(3-2) + f_i(3) \cdot p_{ii}(3-3) \big) \\
&\quad + \ldots \\
&\quad + z^n \big(f_i(1) \cdot p_{ii}(n-1) + \ldots + f_i(n) \cdot p_{ii}(0) \big) + \ldots
\end{aligned}$$

Beweis des Satzes (2)
Es gilt

$$\begin{aligned}
P_i(z) &= \quad z f_i(1) \Bigg(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} z^\nu p_{ii}(\nu) \Bigg) \\
&\quad + z^2 f_i(2) \Bigg(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} z^\nu p_{ii}(\nu) \Bigg) \quad + \ldots \\
&\quad + z^n f_i(n) \Bigg(1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} z^\nu p_{ii}(\nu) \Bigg) \quad + \ldots \\
&= \sum_{\nu=1}^{\infty} z^\nu f_i(\nu) \cdot \big(1 + P_i(z) \big) \\
&= F_i(z) \cdot \big(1 + P_i(z) \big)
\end{aligned}$$

Beweis des Satzes (3)
wobei
$$F_i(z) := \sum_{\nu=1}^{\infty} z^{\nu} f_i(\nu).$$
Die Funktionen $F_i(z)$ und $P_i(z)$ sind analytisch für $|z| < 1$.
$$F_i(z) = \frac{P_i(z)}{1 + P_i(z)}, \quad P_i(z) = \frac{F_i(z)}{1 - F_i(z)}$$
$$\lim_{z \to 1} F_i(z) = F_i(1) = F_i = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_i(\nu)$$
ist die Wahrscheinlichkeit für eine Rückkehr nach i. Sei
$$\lim_{z \to 1} P_i(z) = P_i = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty$$

Beweis des Satzes (4)
Daraus folgt
$$F_i = \lim_{z \to 1} \frac{P_i(z)}{1 + P_i(z)} = 1,$$
d.h. i ist rekurrent.
Sei umgekehrt $F_i = 1$. Dann folgt
$$P_i = \lim_{z \to 1} P_i(z) = \frac{1}{1 - \lim_{z \to 1} F_i(z)} = \infty.$$
Der zweite Teil des Satzes ist die Kontraposition des ersten Teils.

Transiente und rekurrente Zustände

Folgerung
Sei i transient. dann
$$F_i = \frac{P_i}{1 + P_i},$$
d.h. F_i kann mit Hilfe von P_i ausgerechnet werden.

Diese beiden Aussagen können zum Beweis des folgenden Lemmas verwendet werden.

Lemma
Ist ein Zustand i rekurrent (transient) und kommuniziert er mit einem Zustand j ($i \longleftrightarrow j$), so ist auch der Zustand j rekurrent (transient).

Beweis des Lemmas, Rekurrente Zustände

1. Sei i rekurrent und $i \longleftrightarrow j$. Dann existieren $m, k > 0$: $p_{ij}(k) > 0$ und $p_{ji}(m) > 0$. Für alle $n \in \mathbf{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} p_{jj}(m + n + k) &= \sum_l \left(\sum_{k'} p_{jk'}(m) p_{k'l}(n) \right) p_{lj}(k) \\ &= \sum_l p_{jl}(m + n) p_{lj}(k) \\ &\geq p_{ji}(m) p_{ii}(n) p_{ij}(k) \qquad (l = i). \end{aligned}$$

Daraus folgt (da i rekurrent)
$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}(m + n + k) \geq p_{ji}(m) p_{ij}(k) \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty.$$

Beweis des Lemmas (2)
2. Sei $i \longleftrightarrow j$. und i transient. Angenommen, j wäre rekurrent, dann wäre nach 1. auch i rekurrent. Wid.

Folgerung
Eine irreduzible MARKOV'sche Kette mit endlich vielen Zuständen hat nur rekurrente Zustände.

Beweis: Mindestens ein Zustand muß rekurrent sein. Da alle Zustände miteinander kommunizieren, sind alle Zustände rekurrent. □

Beispiel

Random Walk, eindimensionaler Fall
Der Zustandsraum ist $S = \mathbb{Z}$. Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind

$$\begin{aligned} p_{i,i+1} &:= p \\ p_{i,i-1} &:= 1-p \\ p_{ij} &:= 0, \quad \text{falls } |i-j| \neq 1. \end{aligned}$$

D.h. Übergänge zwischen Zuständen, die einen Abstand ungleich Eins zueinander haben, sind nicht möglich. Die Übergangsmatrix $\mathbf{M}$ hat folgende Gestalt:

Random Walk, Fortsetzung

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dots & 0 & p & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 1-p & 0 & p & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1-p & 0 & p & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1-p & 0 & \dots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Offenbar kommunizieren alle Zustände miteinander. Ist somit ein Zustand rekurrent, so sind es alle. Und umgekehrt.

Random Walk, Fortsetzung, 2
Es genügt also zu untersuchen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}(n).$$

Dazu siehe den Abschnitt Irrfahrten!
$\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}(n) = \infty$, wenn $p = \frac{1}{2}$.

Random Walk, Fortsetzung, 3

Random Walk, zwei- und dreidimensionaler Fall
Im zweidimensionalen Fall haben wir in jedem Zustand vier mögliche Übergänge, denen die Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, p_3 und p_4 zugeordnet werden. Die Zustände sind rekurrent, wenn $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{4}$ gilt.
Im dreidimensionalen Fall sind in jedem Punkt im dreidimensionalen ganzzahligen Gitter sechs Übergänge möglich. Auch wenn $p_1 = \ldots = p_6 = \frac{1}{6}$, so sind alle Zustände transient.

Dazu siehe den Abschnitt Irrfahrten!

Transiente Zustände

Sei der Zustand i Startzustand (fest) und

Y_1 = zufällige Anzahl der Schritte bis zur ersten Rückkehr nach i

Y_2 = zufällige Anzahl der Schritte bis zur zweiten Rückkehr

Y_k = zufällige Anzahl der Schritte bis zur k-ten Rückkehr

Satz (Transiente Zustände)

i transient $\Longrightarrow$ nach unendlich vielen Schritten tritt i höchstens endlich oft mit Wahrscheinlichkeit 1 ein.

Beweis:

$$\begin{aligned} P(Y_2 < \infty) &= P(Y_2 < \infty | Y_1 < \infty) \cdot P(Y_1 < \infty) = F_i^2 \\ P(Y_k < \infty) &= F_i^k \end{aligned}$$

Beweis: der Folgerung, Fortsetzung

i transient $\quad\Longrightarrow\quad F_i < 1 \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} P(Y_k < \infty) = \sum_{k=1}^{\infty} F_i^k < \infty$.

Bezeichnen wir $A_k = \{Y_k < \infty\}$ und $B_n = \bigcup_{k \geq n} A_k \downarrow$.

Dann offenbar $A_{k+1} \subseteq A_k$ und wegen $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty$ folgt

$$0 = \lim P(A_k) = P(\bigcup_{k \geq n} A_k) = P(\lim B_n) = \lim P(B_n) = P(B)$$

$$\begin{aligned} B &= \{\text{unendlich viele der } A_k, k = 1, 2, \ldots, \text{treten ein}\} \\ \overline{B} &= \{\text{nur endlich viele der } A_k, k = 1, 2, \ldots, \text{treten ein}\} \end{aligned}$$

$$P(\overline{B}) = 1$$

□

Rekurrente Zustände

Folgerung

Sei jetzt i rekurrent, d.h. $F_i = 1$. $\Longrightarrow$ i wird unendlich oft erreicht.

Beweis: Für beliebiges k gilt: $P(Y_k < \infty) = 1$.

$Y = \#$ der Rückkehren nach i bei unendlich vielen Schritten.

$$\{Y_k < \infty\} \Leftrightarrow \{Y \geq k\}$$

$$P(Y = \infty) = \lim_{k \to \infty} P(Y \geq k) = \lim_{k \to \infty} P(Y_k < \infty) = 1.$$

□

17.4 Grenzverteilungen

Def. 79 (Periode)

Ein Zustand i heißt periodisch mit der Periode d, falls d größter gemeinsamer Teiler aller der Zahlen $n \in \mathbb{Z}^+$ ist, für die $p_{ii}(n) > 0$ gilt. Ist $d = 1$, so heißt der Zustand i aperiodisch. Falls für alle Zahlen $n \in \mathbb{Z}^+$ $p_{ii}(n) = 0$ gilt, so setzen wir $d := \infty$.

Satz

Es sei $i \in S$ ein periodischer Zustand mit Periode d. Desweiteren kommuniziere er mit einem weiteren Zustand j ($i \longleftrightarrow j$). Dann hat auch der Zustand j die Periode d.

Beweis des Satzes (1)

Sei i periodischer Zustand mit Periode d. Dann lassen sich alle Zahlen k mit $p_{ii}(k) > 0$ durch $k = k_0 \cdot d$, für eine Zahl k_0, darstellen. Da die Zustände i und j miteinander kommunizieren, existieren weitere Zahlen n und m, so daß gilt:

$$p_{ij}(n) > 0 \text{ und } p_{ji}(m) > 0.$$

Nach CHAPMAN–KOLMOGOROV:

$$\begin{aligned} p_{ii}(n+m) &= \sum_{l \in S} p_{il}(n) \cdot p_{li}(m) \\ &\geq p_{ij}(n) \cdot p_{ji}(m) > 0 \end{aligned}$$

Beweis des Satzes (2)

Folglich ist d Teiler der Summe $n+m$.

Es gelte nun $p_{jj}(r) > 0$ für ein gewisses r. Dann gilt:

$$\begin{aligned} p_{ii}(n+m+r) &= \sum_{l,s \in S} p_{il}(n) \cdot p_{ls}(r) \cdot p_{si}(m) \\ &\geq p_{ij}(n) \cdot p_{jj}(r) \cdot p_{ji}(m) \\ &> 0 \end{aligned}$$

Wir stellen also fest:

$$\left.\begin{aligned} d \text{ teilt } m+n+r \\ d \text{ teilt } m+n \end{aligned}\right\} \Rightarrow d \text{ teilt } r.$$

Beweis des Satzes (3)

Folglich ist der Zustand j periodisch mit Periode d', wobei gilt: $d \leq d'$.

Da die Relation „$\longleftrightarrow$“ symmetrisch ist, gilt auch: $j \longleftrightarrow i$. Mit der gleichen Beweisführung wie oben können wir dann zeigen, daß gilt: $d' \leq d$. Daraus folgt: Die Zustände i und j haben die gleiche Periodenlänge.

Mittlere Rückkehrzeit (1)

Es sei nun $i \in S$ ein rekurrenter Zustand. Wir betrachten die folgende Zufallsgröße:

$$Y : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & \dots \\ f_i(1) & f_i(2) & \dots & f_i(n) & \dots \end{pmatrix}.$$

Def. 80 (mittlere Rückkehrzeit in den Zustand i)

$$\mu_i := \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_i(n) = \mathbf{E}Y.$$

Def. 81 (Nullrekurrenz, posive Rekurrenz)

Der Zustand i heißt <u>positiv</u> <u>rekurrent</u>, falls $\mu_i < \infty$. Ist $\mu_i = \infty$, so nennen wir den Zustand i <u>Null–rekurrent</u>.

Mittlere Rückkehrzeit (2)
Es gilt für einen beliebigen Zustand i (ohne Beweis):

- $\mu_i < \infty$ genau dann, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}(n) > 0$;
- $\mu_i = \infty$ genau dann, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}(n) = 0$.
- Ist der Zustand i positiv rekurrent und aperiodisch, so gilt:

$$\mu_i = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}(n)}.$$

Def. 82 (Ergodische Markov-Kette)
Eine MARKOV-Kette $\{X_t\}_{t\in T}$ heißt ergodisch, falls der Zustandsraum S nur aus positiv–rekurrenten und aperiodischen Zuständen besteht.

Stationäre Verteilung und Ergodensatz
Erinnerung: $\pi_j = P(X_n = j)$, $\quad \boldsymbol{\pi}^T = (\pi_1, \pi_2, \ldots)$

Def. 83 (Stationäre Verteilung)

$$\boldsymbol{\pi} \quad \text{heißt stationär, falls} \qquad \boldsymbol{\pi} = M^T\boldsymbol{\pi}$$

Ergodensatz
Sei $\{X_t\}_{t\in T}$ eine homogene, irreduzible MARKOV-Kette. Seien außerdem alle Zustände ergodisch (positiv rekurrent und aperiodisch). Dann gilt für alle Zustände $i, j \in S$:

$$\pi_j := \lim_{n\to\infty} p_{ij}(n) > 0.$$

Außerdem gilt $\mu_j = \frac{1}{\pi_j}$ und π_j ist eindeutig bestimmt durch:

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \cdot p_{ij}. \qquad \text{d.h. } \boldsymbol{\pi} \quad \text{ist stationär}$$

Stationäre Verteilung
Die Grenzverteilung $\mathbf{p} = (p_1, \ldots)$ ist also stationäre oder Finalverteilung. Die stationäre Verteilung kann nach obiger Gleichung ermittelt werden.

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \mathbf{M}^T \cdot \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_j \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Stationäre Verteilung (2)
Also gilt: $\mathbf{M}^T \cdot \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} = \lambda \cdot \boldsymbol{\pi}$ mit $\lambda = 1$. Eigenwertgleichung für den Eigenwert 1. Der Vektor $\boldsymbol{\pi}$ ist Eigenvektor von $\mathbf{M}^T$ zum Eigenwert 1.

Bem.: $\mathbf{M}$ und $\mathbf{M}^T$ haben dieselben Eigenwerte.

Folgerung
Sei $\mathbf{M}$ die Übergangsmatrix einer MARKOV'schen Kette mit endlich vielen Zuständen (in der Form, in der die Äquivalenzklassen ablesbar sind) Dann gilt: Die Vielfachheit des Eigenwertes 1 ist gleich der Anzahl der rekurrenten Äquivalenzklassen.

Stationäre Verteilung, Beispiel

Beweis: Jede Teilübergangsmatrix von Äquivalenzklassen hat den einfachen Eigenwert 1 (Finalverteilung eindeutig!) $\square$

Wir betrachten eine MARKOV*'sche Kette über $S = \{1, 2, 3\}$ mit Übergangsmatrix*

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Äquivalenzklassen: $\{1, 2\}, \{3\}$.

Stationäre Verteilung, Beispiel (Fortsetzung)

Wir ermitteln die Eigenwerte:

$$\begin{aligned} 0 &= \det(M - \lambda \cdot I) \\ &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda) \cdot \left[\left(\tfrac{1}{2} - \lambda\right) \cdot \left(\tfrac{1}{4} - \lambda\right) - \tfrac{3}{8}\right] \end{aligned}$$

Stationäre Verteilung, Beispiel (Fortsetz.,2)

Der erste Eigenwert: $\lambda_1 = 1$. Weiter:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\tfrac{1}{2} - \lambda\right) \cdot \left(\tfrac{1}{4} - \lambda\right) - \tfrac{3}{8} \\ &= \frac{1}{8} - \frac{3}{4}\lambda + \lambda^2 - \frac{3}{8} = \lambda^2 - \frac{3}{4}\lambda - \frac{1}{4} \\ \lambda_{2,3} &= \frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{9}{64} + \frac{16}{64}} = \frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{25}{64}} \\ \lambda_2 &= \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = 1 \qquad \lambda_3 = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Also: Eigenwerte: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = -\frac{1}{4}$. Der Eigenwert 1 hat folglich die Häufigkeit 2, und somit gibt es zwei rekurrente Äquivalenzklassen.

Stationäre Verteilung uniform?

Folgerung: Sei die Markov-Kette endlich und irreduzibel. Falls

$$\sum_i p_{ij} = \sum_j p_{ij} = 1$$

so sind die stationären Verteilungen Gleichverteilungen.

Beweis: Es gilt für die stationäre Verteilung $(\pi_1, \ldots, \pi_n, \ldots)$:

$$\begin{aligned} \sum_i \pi_i p_{ij} &= \pi_j = \pi_j \sum_i p_{ij} \qquad \forall j \\ \sum_i (\pi_i - \pi_j) p_{ij} &= 0, \quad \text{insbesondere} \\ \sum_i (\pi_i - \pi_{j_0}) p_{ij_0} &= 0, \quad j_0 = \min_j \pi_j \end{aligned}$$

Wegen $(\pi_i - \pi_{j_0}) \geq 0$ folgt $\pi_{j_0} = \pi_i \quad \forall i$, d.h. $\pi_i = \frac{1}{n}$. $\square$

Ergodensatz

Veranschaulichung von $\lim p_{jj}(n) = \pi_j = \frac{1}{\mu_j}$

μ_j: Erwartete Anzahl der Schritte bis zur Rückkehr nach j

Y : zufällige Anzahl der Schritte bis zur Rückkehr nach j,

$$Y \sim Geo(\pi_j) \qquad (etwa)$$

$$\mu_j = \mathbf{E}Y = \frac{1}{\pi_j}$$

Ergodensatz

Veranschaulichung von $\lim p_{jj}(n) = \frac{1}{\mu_j}$

$\{X_t\}$: homogene Markovsche Kette

j: rekurrenter Zustand, $X_0 = j$ (j fest).

$$Y_k = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad X_k = j \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$P(Y_k = 1) = p_{jj}(k), \quad \mathbf{E}Y_k = p_{jj}(k)$$

Anzahl der Wiederkehrzeitpunkte im Zeitraum $1, \ldots, N$

$$\sum_{k=1}^{N} Y_k = k_N.$$

Ergodensatz

Beobachtete mittlere Anzahl der Wiederkehrpunkte pro Schritt (im Zeitraum $1, \ldots, N$)

$$\begin{aligned} \frac{k_N}{N} \quad &\sim \quad \mathbf{E}\frac{k_N}{N} = \frac{1}{N}\mathbf{E}\big(\sum_{n=1}^{N} Y_k\big) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mathbf{E}Y_k \\ &= \quad \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} p_{jj}(n) \end{aligned}$$

Mittlere beobachtete Wiederkehrzeit im Zeitraum $1, \ldots, N$

$$\frac{N}{k_N} \to \mu_j$$

Ergodensatz

$\Longrightarrow$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} p_{jj}(n) \to_{N\to\infty} \frac{1}{\mu_j}$$

Andererseits:

$$\lim_{n\to\infty} p_{jj}(n) = \pi_j \Longrightarrow \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} p_{jj}(n) \to_{N\to\infty} p_j = \frac{1}{\mu_j}.$$

Ergodensatz, Beispiel

Ein-Prozessorsystem mit mehreren E/A-Einheiten.
Ein Programm, das sich in der CPU befindet, geht mit Wahrscheinlichkeit q_i in die I/O-Einheit i über, oder endet (mit Wahrscheinlichkeit q_0) und macht Platz für ein neues Programm in der CPU.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & \dots & q_m \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ .. & & & \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Frage: Ist die zugehörige Markov-Kette irreduzibel?

Ergodensatz, Beispiel (2)

Ein-Prozessorsystem (Fortsetzung)

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} q_0^2 + \sum_{i=1}^m q_i & q_0 q_1 & \dots & q_0 q_m \\ q_0 & q_1 & \dots & q_m \\ .. & & & \\ q_0 & q_1 & \dots & q_m \end{pmatrix}$$

also $p_{ij}(2) > 0 \quad \forall i, j \Longrightarrow X_t$ irreduzibel.

Ein-Prozessorsystem
Stationäre Verteilung

Ein-Prozessorsystem (Fortsetzung, 2)

$$\mathbf{M}^T \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ .. \\ \pi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_0 q_0 + \sum_{i=1}^m \pi_i \\ \pi_0 q_1 \\ .. \\ \pi_0 q_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ .. \\ \pi_m \end{pmatrix}$$

Ein-Prozessorsystem
Stationäre Verteilung

$$\begin{aligned} q_0\pi_0 + 1 - \pi_0 &= \pi_0 \\ 2\pi_0 - q_0\pi_0 &= 1 \\ \pi_0(2 - q_0) &= 1 \\ \pi_0 &= \frac{1}{2 - q_0} \\ \pi_i &= \pi_0 q_i = \frac{q_i}{2 - q_0}, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^m \pi_i = \frac{1}{2 - q_0} + \sum_{i=1}^m \frac{q_i}{2 - q_0} = \frac{1}{2 - q_0} + \frac{1 - q_0}{2 - q_0} = 1.$$

Multiprozessorsystem

Multiprozessorsystem
Ein “Job” (oder ein Prozessor) greift zufällig auf bestimmte Speichermodule zu.
Er wird bedient, wenn der angeforderte Speichermodul frei ist, sonst muß er warten.
Die Zeit für einen Speicherzugriff sei konstant und für alle Speichermodule gleich.
Neue Anforderungen beginnen sofort nach Abarbeitung der alten.
m “Jobs”, n Speichermodule.

Multiprozessorsystem

Multiprozessorsystem (2)
N_i: Anzahl der “Jobs” (Wartenden) am Speichermodul M_i (Bedienplätze) (wartend oder in Arbeit), $i = 1, \ldots, n$
Zustandsraum $S = \{(N_1, N_2, \ldots, N_n) \in \mathbb{Z}^+ : \sum_i N_i = m\}$

Bsp.: $m = n = 2$: $S = \{(1,1), (0,2), (2,0)\}$
q_1: Wahrscheinlichkeit, 1. Speichermodul wird angefordert
q_2: Wahrscheinlichkeit, 2. Speichermodul wird angefordert

Multiprozessorsystem (3)
Übergangsmatrix

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2q_1q_2 & q_2^2 & q_1^2 \\ q_1 & q_2 & 0 \\ q_2 & 0 & q_1 \end{pmatrix}$$

Stationäre Verteilung

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}\mathbf{M} &= \boldsymbol{\pi} \\ (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{pmatrix} 2q_1q_2 & q_2^2 & q_1^2 \\ q_1 & q_2 & 0 \\ q_2 & 0 & q_1 \end{pmatrix} &= (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \end{aligned}$$

Multiprozessorsystem (4)
Stationäre Verteilung (Fortsetz.)

$$\begin{aligned} \pi_1 \cdot 2q_1q_2 + \pi_2 q_1 + \pi_3 q_2 &= \pi_1 \\ \pi_1 \cdot q_2^2 + \pi_2 \cdot q_2 + \pi_3 \cdot 0 &= \pi_2 \\ \pi_1 \cdot q_1^2 + \pi_2 \cdot 0 + \pi_3 \cdot q_1 &= \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_1 \cdot q_2^2 &= \pi_2(1 - q_2) \\ \pi_1 \cdot q_1^2 &= \pi_3(1 - q_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_2 &= \frac{q_2^2}{1 - q_2} \cdot \pi_1 \\ \pi_3 &= \frac{q_1^2}{1 - q_1} \cdot \pi_1 \end{aligned}$$

$$\pi_1 = \frac{1}{1 + \frac{q_1^2}{1-q_1} + \frac{q_2^2}{1-q_2}} = \frac{q_1 q_2}{1 - 2q_1 q_2}$$

Multiprozessorsystem (5)

X : # erledigten Speicherplatz-Anforderungen pro Zyklus im stationären Zustand:

$$\begin{aligned} (X|(1,1)) &= 2 \\ (X|(2,0)) &= 1 \\ (X|(0,2)) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X &= 2 \cdot \pi_1 + 1 \cdot \pi_2 + 1 \cdot \pi_3 \\ &= \big(2 + \frac{q_1^2}{1-q_1} + \frac{q_2^2}{1-q_2}\big)\pi_1 = \frac{1 - q_1 q_2}{1 - 2q_1 q_2} \end{aligned}$$

$q_1 = q_2 = \frac{1}{2}$: $\quad \mathbf{E}X = \frac{3}{2}$. $\quad$ maximal möglicher Wert.

Betriebssystem

Das Betriebssystem schalte zwischen den Zuständen:

1: Benutzerprogramm aktiv

2: Scheduler aktiv

3: Operatorkommunikation aktiv

4: Nullprozess

$$M = \begin{pmatrix} 0.90 & 0.04 & 0.05 & 0.01 \\ 0.94 & 0.00 & 0.05 & 0.01 \\ 0.85 & 0.10 & 0.04 & 0.01 \\ 0.75 & 0.00 & 0.05 & 0.20 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{pmatrix} 0.897 \\ 0.041 \\ 0.05 \\ 0.012 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{\pi}$ ist stationäre Verteilung. (ÜA)

17.5 Klassische Beispiele

Ruin des Spielers

Zwei Spieler werfen abwechselnd eine (nicht manipulierte) Münze. Fällt Kopf, so erhält Spieler A den vereinbarten Einsatz (1 Euro) von Spieler B, anderenfalls erhält Spieler B denselben Einsatz von Spieler A. Zu Beginn des Spieles besitzt A a Euro und B b Euro. Das Spiel wird solange fortgesetzt, bis einer der beiden Spieler kein Geld mehr besitzt.

Ruin des Spielers (Fortsetzung)

Zustände: $S = \{0, 1, \ldots, N\}, \quad N = a + b.$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & \cdots & & 0 \\ .. & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit des Ruins von Spieler A bzw. B?

Ruin des Spielers (Fortsetzung, 2)

Sei E_i das Ereignis, daß ein Spieler, der genau i Euro besitzt, ruiniert wird und sei $p_i = P(E_i)$.

1. Die Übergangswktn. sind
$$p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = \frac{1}{2}$$
und offenbar ist $p_0 = 1$ und $p_N = 0$.

2. Satz der totalen Wkt.: Es gilt für alle $i, i = 0, \ldots, N$:
$$\begin{aligned} p_i = P(E_i) &= P(E_i|\text{Übergang nach } i\text{-}1) \cdot p_{i,i-1} + \\ & \quad P(E_i|\text{ Übergang nach } i\text{+}1) \cdot p_{i,i+1} \end{aligned}$$

Ruin des Spielers (Fortsetzung, 3)

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{1}{2}p_{i-1} + \frac{1}{2}p_{i+1} \qquad 2p_i = p_{i-1} + p_{i+1} \\ p_i - p_{i-1} &= p_{i+1} - p_i =: d \\ p_i - p_0 &= \underbrace{p_i - p_{i-1}}_{=d} + \underbrace{p_{i-1} - p_{i-2}}_{=d} + p_{i-2} - + \cdots - p_1 \\ & \quad + \underbrace{p_1 - p_0}_{=d} \\ p_i - 1 &= i \cdot d \\ p_i &= 1 + i \cdot d, \quad \text{insbesondere} \\ p_N &= 1 + N \cdot d \\ d &= -\frac{1}{N}, \quad N = a + b \end{aligned}$$

Ruin des Spielers (Fortsetzung, 4)

3.
$$p_i = 1 - i \cdot \frac{1}{a+b} = \frac{a+b-i}{a+b}$$
$$p_a = \frac{b}{a+b}, \quad p_b = \frac{a}{a+b}$$

4. $a = b : p_a = p_b = \frac{1}{2} \quad a >> b : p_a \approx 0, p_b \approx 1.$

3 Klassen von Zuständen:
$T = \{1, \ldots, N-1\}$: unwesentliche Zustände $S_1 = \{0\}$, $S_2 = \{N\}$: absorbierende Zustände $T^c := S_1 \cup S_2$

Ruin des Spielers (Fortsetzung, 5)
Umordnung von $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{Q} = (p_{ij}; i, j \in T\}$ $\qquad \mathbf{P} = (p_{ij}; i, j \in T^c\}$
$\mathbf{R} = (p_{ik}; i \in T, k \in T^c\}$
Übergang von $i \in T$ nach $k \in T^c$ einschrittig oder nach Übergängen innerhalb von T und anschließendem Übergang von T nach k.

Ruin des Spielers (Fortsetzung, 6)
u_{ik}: Wkt. von $i \in T$ (irgendwann) nach $k \in T^c$ zu kommen

$$u_{ik} = \sum_{j \in T} Q_{ij} u_{jk} + p_{ik}, \quad Q_{ij} = p_{ij}$$

$\mathbf{U} = \big(U_{ik}\big)_{i \in T, k \in T^c}$

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{QU} + \mathbf{R}, \quad \text{Rekursionsformel} \\ \mathbf{U} &= (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{R} \end{aligned}$$

Die Matrix $(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}$ existiert, falls T endlich!

Lit.: Resnick, S.I. Adventures in Stochastic Processes, Birkhäuser 1992.

Ruin des Spielers (Fortsetzung, 7)
hier:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{U} = \mathbf{R}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ .. & & & & & \\ & & & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ & & & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{10} & u_{1N} \\ u_{20} & u_{2N} \\ u_{30} & u_{3N} \\ .. & \\ u_{N-2,0} & u_{N-2,N} \\ u_{N-1,0} & u_{N-1,N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ .. & \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ruin des Spielers (Fortsetzung, 8)

$$\begin{array}{cccccccc}
u_{1,0} & -\frac{1}{2}u_{2,0} & & & & & = & \frac{1}{2} \\
-\frac{1}{2}u_{1,0} & +u_{2,0} & -\frac{1}{2}u_{3,0} & & & & = & 0 \\
 & -\frac{1}{2}u_{2,0} & +u_{3,0} & -\frac{1}{2}u_{4,0} & & & = & 0 \\
 & & .. & & & & & \\
 & & & -\frac{1}{2}u_{N-3,0} & +u_{N-2,0} & -\frac{1}{2}u_{N-1,0} & = & 0 \\
 & & & & -\frac{1}{2}u_{N-2,0} & +u_{N-1,0} & = & 0
\end{array}$$

Ruin des Spielers (Fortsetzung, 9)

$N-1$. Gleichung (1. **U**-Spalte)

$$u_{N-1,0} = \frac{1}{2}u_{N-2,0}$$

$N-2$. Gleichung (1. **U**-Spalte)

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}u_{N-3,0} + u_{N-2,0} - \frac{1}{2}u_{N-1,0} &= 0 \\
u_{N-2,0} - \frac{1}{4}u_{N-2,0} &= \frac{1}{2}u_{N-3,0} \\
\frac{3}{4}u_{N-2,0} &= \frac{1}{2}u_{N-3,0} \\
u_{N-2,0} &= \frac{2}{3}u_{N-3,0}
\end{aligned}$$

Ruin des Spielers (Fortsetzung, 10)

$N-3$. Gleichung (1. **U**-Spalte)

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}u_{N-4,0} + u_{N-3,0} - \frac{1}{2}u_{N-2,0} &= 0 \\
u_{N-3,0} - \frac{1}{3}u_{N-3,0} &= \frac{1}{2}u_{N-4,0} \\
\frac{2}{3}u_{N-3,0} &= \frac{1}{2}u_{N-4,0} \\
u_{N-3,0} &= \frac{3}{4}u_{N-4,0}
\end{aligned}$$

$N-i$. Gleichung (1. **U**-Spalte)

$$u_{N-i,0} = \frac{i}{i+1}u_{N-(i+1),0}, \quad i = 1, \ldots, N-2$$

Ruin des Spielers (Fortsetzung, 11)

1. Gleichung:

$$u_{1,0} - \frac{1}{2}u_{2,0} = \frac{1}{2}$$

Da

$$u_{2,0} = u_{N-(N-2),0} = \frac{N-2}{N-1}u_{N-(N-1),0} = \frac{N-2}{N-1}u_{1,0}$$

folgt

Ruin des Spielers (Fortsetzung, 12)

$$\begin{aligned} u_{1,0} - \frac{1}{2}\frac{N-2}{N-1}u_{1,0} &= \frac{1}{2} \\ u_{1,0}\big(1 - \frac{N-2}{2(N-1)}\big) &= \frac{1}{2} \\ u_{1,0}\frac{N}{2(N-1)} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{1,0} &= \frac{N-1}{N} = 1 - \frac{1}{N} \\ u_{2,0} &= \frac{N-2}{N-1}u_{1,0} = \frac{N-2}{N-1}\cdot\frac{N-1}{N} = \frac{N-2}{N} = 1 - \frac{2}{N} \\ u_{N-i,0} &= \frac{N-i}{N} = 1 - \frac{i}{N}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1. \end{aligned}$$

Münzwurfspiel (1), vgl. ÜA 14

Seien die Zustände 000, 001, 010, 011, 100,101, 110 und 111 nacheinander mit 1-8 bezeichnet. Dann hat die Übergangsmatrix die Gestalt (wir tragen nur Einträge ein, die nicht Null sind)

$$M := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Markov-Kette besteht aus einer Äquivalenzklasse, ist irreduzibel und aperiodisch (Diagonaleintrag $\neq 0$). Alle Zustände sind positiv rekurrent.

Münzwurfspiel (2)

vgl. ÜA 14

Seien die Zustände 000, 001, 010, 011, 100,101, 110 und 111 nacheinander mit 1-8 bezeichnet.

Es existiert eine stationäre Verteilung

Die Markov-Kette besteht aus einer Äquivalenzklasse, ist irreduzibel und aperiodisch (Diagonaleintrag $\neq 0$). Alle Zustände sind positiv rekurrent.

Berechnung der stationären Verteilung

Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{M}^T\mathbf{p} = \mathbf{p} \qquad \longrightarrow \qquad (\mathbf{M}^T - I)\mathbf{p} = \mathbf{0}$$

Münzwurfspiel (3)

$$
\frac{1}{2}\begin{pmatrix}
-1 & & & & 1 & & & \\
1 & -2 & & & 1 & & & \\
 & 1 & -2 & & & 1 & & \\
 & 1 & & -2 & & 1 & & \\
 & & 1 & & -2 & & 1 & \\
 & & 1 & & & -2 & 1 & \\
 & & & 1 & & & -2 & 1 \\
 & & & 1 & & & & -1
\end{pmatrix}\mathbf{p} = \mathbf{0}
$$

Stationäre Verteilung ist die Gleichverteilung.

Münzwurfspiel (4)

vgl. ÜA 14

Spiel: 7 (110) gegen 4 (011)

Zustände 7 und 4: absorbierend, andere Zustände: unwesentlich

$$
\mathbf{M}_{4,7} := \frac{1}{2}\begin{pmatrix}
1 & 1 & & & & & & \\
 & & 1 & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & & \\
 & & & 2 & & & & \\
1 & 1 & & & & & & \\
 & & 1 & 1 & & & & \\
 & & & & & & 2 & \\
 & & & & & & 1 & 1
\end{pmatrix}
\qquad
\mathbf{M}'_{4,7} := \frac{1}{2}\left(\begin{array}{cccccccc}
1 & 1 & & & & & & \\
 & & 1 & & & & 1 & \\
 & & & 1 & 1 & & & \\
1 & 1 & & & & & & \\
 & & 1 & & & & 1 & \\
 & & & & & 1 & & 1 \\
\hline
 & & & & & & 2 & \\
 & & & & & & & 2
\end{array}\right)
$$

wobei $M'_{4,7}$ die umgeordnete Matrix ist.

Münzwurfspiel (5)

$$
\mathbf{M}'_{4,7} = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{cccccccc}
1 & 1 & & & & & & \\
 & & 1 & & & & 1 & \\
 & & & 1 & 1 & & & \\
1 & 1 & & & & & & \\
 & & 1 & & & & 1 & \\
 & & & & & 1 & & 1 \\
\hline
 & & & & & & 2 & \\
 & & & & & & & 2
\end{array}\right) = \begin{pmatrix}
\mathbf{Q}_{4,7} & \mathbf{R} \\
\mathbf{0} & \mathbf{I}_2
\end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{Q}_{4,7} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}
1 & 1 & & & & \\
 & & 1 & & & \\
 & & & 1 & 1 & \\
1 & 1 & & & & \\
 & & 1 & & & \\
 & & & & & 1
\end{pmatrix}
\qquad
\mathbf{R} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}
0 & 0 \\
1 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
1 & 0 \\
0 & 1
\end{pmatrix}
$$

Das Gleichungssystem

$$
(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{U} = \mathbf{R}
$$

ist zu lösen.

In unserem Beispiel ist die Gewinnwahrscheinlichkeit von 110 gegen 011: 0.25.

Irrfahrten

Irrfahrt auf der Geraden
Zustände: $k \in \mathbb{Z}$, Anfangszustand: 0
Bewegung: ein Schritt nach rechts mit Wkt. p oder nach links mit Wkt. $q = 1 - p$

$$p_{k,k+1} = p = 1 - p_{k,k-1}; \quad p_{ij} = 0, \text{falls} |i-j| \neq 1$$

$$M = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ & 0 & q & 0 & p & 0 & & \\ & & 0 & q & 0 & p & 0 & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \end{pmatrix}$$

Irrfahrten, Fortsetzung, 1

$A_{n,k}$: Ereignis, nach n Schritten im Zustand k zu sein $D_{n,k} := P(A_{n,k})$, $\quad \Omega_{n-1} = A_{n-1,k-1} \cup A_{n-1,k+1}$
Satz der totalen Wkt. ($k = -n, \dots, n$):

$$\begin{aligned} D_{n,k} &= P(A_{n,k}) \\ &= P(A_{n,k}|A_{n-1,k-1}) \cdot P(A_{n-1,k-1}) + \\ &\quad P(A_{n,k}|A_{n-1,k+1}) \cdot P(A_{n-1,k+1}) \\ &= pD_{n-1,k-1} + qD_{n-1,k+1} \\ &= \begin{cases} \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}} & \text{falls } k = -n, -n+2, \dots, n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Irrfahrten, Fortsetzung, 2

Explizite Formel:

$$D_{n,k} = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}} & \text{falls } k = -n, -n+2, \dots, n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Irrfahrten, Fortsetzung, 3

In den Zustand k gelangt man in genau n Schritten, indem man $\frac{n+k}{2}$ mal nach rechts und $\frac{n-k}{2}$ mal nach links geht.
Es gibt genau $\binom{n}{\frac{n+k}{2}}$ Möglichkeiten die Zeitpunkte für einen Schritt nach rechts auszuwählen.
Insbesondere

$$D_{2n,0} = \binom{2n}{n} p^n q^n.$$

Abschätzung: Stirling'sche Formel

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{1}{12n}}.$$

Irrfahrten, Fortsetzung, 4

Damit

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &= \frac{(2n)!}{n!n!} \\ &\sim \frac{\sqrt{2\pi 2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2} \frac{e^{\frac{1}{12\cdot 2n}}}{\left(e^{\frac{1}{12n}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi n}} 2^{2n} e^{-\frac{3}{4n}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
p = q = \frac{1}{2}: \quad & D_{2n,0} & \sim & \quad \frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{-\frac{3}{4n}} \\
p \neq q: \quad & D_{2n,0} & \sim & \quad \frac{1}{\sqrt{\pi n}} 4^n p^n (1-p)^n e^{-\frac{3}{4}n}.
\end{aligned}
$$

Irrfahrten, Fortsetzung, 5

Mittlere Rückkehrhäufigkeit:

$$
\sum_{n=1}^{\infty} D_{2n,0} \sim \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \infty & (p = \frac{1}{2}) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}} < \infty & (p \neq \frac{1}{2}) \end{cases}
$$

Irrfahrten, Fortsetzung, 6

Der Zustand "0" (und die anderen Zustände auch) ist also falls $p = q = \frac{1}{2}$: *rekurrent* falls $p \neq q$: *transient* falls

$p = q = \frac{1}{2}$: *nullrekurrent* da $D_{2n,0} \to_{n\to\infty} 0$.

$$
D_{2n,0} = p_{00}(n) \to 0 \Rightarrow \mu_i = \infty
$$

Irrfahrten

symmetrische Irrfahrt in der Ebene

Zustände: $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$, Anfangszustand: $(0,0)$ Bewegung: Punkt (X,Y)

X: ein Schritt nach rechts mit Wkt. $p = \frac{1}{2}$ oder nach links mit Wkt. $q = \frac{1}{2}$

Y: ein Schritt nach oben mit Wkt. p oder nach unten mit Wkt. $q = \frac{1}{2}$

Die Zufallsvariablen X und Y sind unabhängig.

$B_{n,k}$: Ereignis, nach n Schritten im Zustand k zu sein $E_{n,k} := P(B_{n,k})$

symmetrische Irrfahrt in der Ebene

$$
E_{2n,0} = P(X_{2n,0} = 0 \wedge Y_{2n,0} = 0) = D_{2n,0}^2 \sim (\frac{1}{\sqrt{\pi n}})^2
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} E_{2n,0} & \sim & \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \\
\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} & \sim & \frac{\ln N}{\pi} \to_{N\to\infty} \infty.
\end{aligned}
$$

Der Zustand "0" (und die anderen Zustände auch) ist also *rekurrent*, falls $p = q = \frac{1}{2}$

Irrfahrten

symmetrische Irrfahrt im Raum

Zustände: $(j,k,l) \in \mathbb{Z}^3$, Anfangszustand: $(0,0,0)$

Bewegung: Punkt (X,Y,Z)

X: ein Schritt nach rechts mit Wkt. $p = \frac{1}{2}$ oder nach links mit Wkt. $q = 1 - p$

Y: ein Schritt nach oben mit Wkt. p oder nach unten mit Wkt. $q = 1 - p$

Z: ein Schritt nach hinten mit Wkt. p oder nach vorn mit Wkt. $q = 1 - p$

Die Zufallsvariablen X, Y und Z sind unabhängig.

Irrfahrten im Raum

$C_{n,k}$: Ereignis, nach n Schritten im Zustand k. $F_{n,k} := P(C_{n,k})$

$$\begin{aligned} F_{2n,0} &= P(X_{2n,0} = 0, Y_{2n,0} = 0, Z_{2n,0} = 0) = D^3_{2n,0} \\ &\sim (\frac{1}{\sqrt{\pi n}})^3 \\ \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n,0} &\sim \frac{1}{(\pi)^{3/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty \end{aligned}$$

Der Zustand “0” (und die anderen Zustände auch) ist also *transient*.

Irrfahrten mit Barriere

Irrfahrt auf der Geraden mit Barriere

Zustände: $k \in \mathbb{N}$, Anfangszustand: 0

Bewegung: ein Schritt nach rechts mit Wkt. p oder nach links mit Wkt. $q = 1 - p$ von $k = 0$ aus geht es nur nach rechts $0 < p, q < 1$.

Übergangswktn.:

$$\begin{aligned} p_{k,k+1} &= p = 1 - p_{k,k-1} \\ p_{ij} &= 0, \quad \text{falls} \quad |i - j| \neq 1 \quad \text{und} \quad i \neq 0 \\ p_{01} &= 1 \end{aligned}$$

Irrfahrt mit Barriere

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ q & 0 & p & 0 & & & \\ 0 & q & 0 & p & 0 & & \\ & & & . & . & . & \\ & & & & . & . & . \end{pmatrix}$$

wenn $p = q = \frac{1}{2}$ so alle Zustände nullrekurrent. wenn $p > q$ so alle Zustände transient. falls $q > p$ so alle Zustände positiv rekurrent. Alle Zustände haben die Periode 2.

Irrfahrt mit Barriere

Die ersten beiden Fälle sind analog zur Irrfahrt ohne Barriere (wir spiegeln ggf. in Zustand 0)

Der dritte Fall erfordert etwas Rechenaufwand.

Stationäre Verteilung $\boldsymbol{\pi}$ im Fall $p < q$: Sie ist (falls sie existiert) Lösung von

$$\mathbf{M}^T \cdot \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}$$

$$\begin{aligned} \pi_0 &= q\pi_1 \\ \pi_1 &= \pi_0 + q\pi_2 \\ \pi_i &= p\pi_{i-1} + q\pi_{i+1}, \quad i \geq 2 \end{aligned}$$

Irrfahrt mit Barriere

$$1 = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j$$

Behauptung:

$$\pi_i = \frac{p^{i-1}}{q^i}\pi_0, \quad i \geq 1$$

Beweis: vollständige Induktion.

Irrfahrt mit Barriere

Stationäre Verteilung

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = \pi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p^{i-1}}{q^i}\pi_0 \\
&= \pi_0 + \frac{1}{q}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{p^i}{q^i}\pi_0 = \pi_0 + \frac{1}{q}\frac{1}{1-\frac{p}{q}}\pi_0 \\
&= \pi_0 + \frac{1}{q-p}\pi_0 \\
\pi_0 &= \frac{1}{1+\frac{1}{q-p}} = \frac{q-p}{q-p+1} \\
\pi_i &= \frac{p^{i-1}}{q^i} \cdot \frac{q-p}{q-p+1}
\end{aligned}$$

17.6 Markov Chain Monte Carlo

Markov Chain Monte Carlo

Idee

- Erinnerung: Eine irreduzible ergodische Markov-Kette X_n hat eine stationäre Verteilung, $X_n \to X$, $X \sim \pi$
- Wenn g beschränkt so (Gesetz der großen Zahlen für MK):
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i) \to_p \mathbf{E}_\pi g(X) = \sum_j g(j)\pi_j$$
wobei über alle Zustände von X summiert wird.
- Wir konstruieren eine Markov-Kette mit stationärer Verteilung f. Dann können wir z.B. das Integral $\int h(x)f(x)\,dx$ approximieren:
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(X_i) \to_p \mathbf{E}_f h(X) = \int h(x)f(x)\,dx$$

Markov Chain Monte Carlo

Metropolis-Hastings Algorithmus

Sei $q(y|x)$ eine beliebige leicht zu simulierende Dichte.

0. Wähle X_0 beliebig. Seien $X_0, X_1, \ldots, X_i$ gegeben. X_{i+1} wird wie folgt generiert:
1. Generiere $Y \sim q(y|X_i)$
2. Berechne $r(X_i, Y)$, wobei
$$r(x,y) = \min\left(\frac{f(y)}{f(x)}\frac{q(x|y)}{q(y|x)}, 1\right)$$
3. Setze
$$X_{i+1} = \begin{cases} Y & \text{mit Wahrscheinlichkeit } r \\ X_i & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1-r \end{cases}$$

Markov Chain Monte Carlo

Metropolis-Hastings Algorithmus, Anmerkung

Eine übliche Wahl der "freundlichen" Dichte ist $q(y|x) : \mathcal{N}(x, b^2)$ (Normalverteilung, zentriert auf den aktuellen Wert x)
$$q(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}b} e^{-\frac{1}{2b^2}(y-x)^2} = q(x|y).$$
Damit vereinfacht sich r zu
$$r(x,y) = \min\left(\frac{f(y)}{f(x)}, 1\right)$$
Wahl von b: noch offen.

Markov Chain Monte Carlo

Metropolis-Hastings Algorithmus, Beispiel

Angenommen, wir wollen eine Cauchy-Verteilung simulieren,
$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}.$$
Wenn wir, wie im Vorschlag oben $q(y|x) \sim \mathcal{N}(x, b^2)$ setzen,
$$r(x,y) = \min\left(\frac{f(y)}{f(x)}, 1\right) = \min\left(\frac{1+x^2}{1+y^2}, 1\right)$$
Algorithmus:

- 1. Ziehe $Y \sim \mathcal{N}(x, b^2)$.
- 2.

$$X_{i+1} = \begin{cases} Y & \text{mit Wahrscheinlichkeit } r(X_i, Y) \\ X_i & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - r(X_i, Y) \end{cases}$$

Markov Chain Monte Carlo
Metropolis-Hastings Algorithmus, Wahl des Tuning-Parameters b

- b zu klein: nur kleine Schritte, es wird nicht der ganze Stichprobenraum untersucht
- b zu groß: viele Vorschläge Y, die weit in den Tails sind, d.h. r wird klein, die Markov-Kette bleibt lange in derselben Position.
- b mittel: gut.

Markov Chain Monte Carlo
Korrektheit des Metropolis-Hastings Algorithmus (1)

Stationäre Verteilung, bei diskreten Zufallsvariablen

$$\pi = \pi \mathbf{M}$$

wobei $\mathbf{M}$ übergangsmatrix der Markov-Kette ist.

Def. 84 (Detailed balance)
Wir sagen, eine Markov-Kette hat Detailed balance, wenn

$$p_{ij}\pi_i = p_{ji}\pi_j \quad \forall i, j$$

Erinnerung: Wenn eine Markov-Kette X_n detailed balance mit π hat so ist π stationäre Verteilung von X_n: $\boldsymbol{\pi}\mathbf{M}_j = \sum_i \pi_i p_{ij} = \sum_i \pi_j p_{ji} = \pi_j$.

Markov Chain Monte Carlo
Korrektheit des Metropolis-Hastings Algorithmus (2)

Stationäre Verteilung, bei stetigen Zufallsvariablen

$$f(x) = \int f(y)p(x, y)\, dy$$

wobei $p(x, y)$ Übergangdichte von Zustand x in Zustand y ist.

Detailed balance, falls

$$f(x)p(x, y) = f(y)p(y, x) \quad \forall x, y$$

Satz: falls f detailed balance besitzt, so ist f stationär.
Beweis: Aus detailed balance folgt:

$$\int f(y)p(y, x)\, dy = \int f(x)p(x, y)\, dy = f(x) \int p(x, y)\, dy = f(x).$$

Markov Chain Monte Carlo

Korrektheit des Metropolis-Hastings Algorithmus (3)

Bleibt zu zeigen, f erfüllt detailed balance.

Seien x, y beliebige Punkte. Es gilt $f(x)q(y|x) > f(y)q(x|y)$ oder $f(x)q(y|x) < f(y)q(x|y)$ (oder $f(x)q(y|x) = f(y)q(x|y)$, aber letzteres nur mit Wahrscheinlichkeit Null). Sei o.B.d.A. $f(x)q(y|x) > f(y)q(x|y)$. Dann

$$r(x,y) = \frac{f(y)}{f(x)}\frac{q(x|y)}{q(y|x)} \quad \text{und} \quad r(y,x) = 1.$$

Markov Chain Monte Carlo

Korrektheit des Metropolis-Hastings Algorithmus (4)

$p(x, y)$ ist Übergangsdichte von x nach y

Forderung: 1. Vorschlagsdichte $q(y|x)$ muss y generieren und 2. y muss akzeptiert werden.

$$p(x,y) = \underbrace{q(y|x)}_{1.}\underbrace{r(x,y)}_{2.} = q(y|x)\frac{f(y)}{f(x)}\frac{q(x|y)}{q(y|x)} = \frac{f(y)}{f(x)}q(x|y)$$

Daraus folgt:

$$f(x)p(x,y) = f(y)q(x|y)$$

Markov Chain Monte Carlo

Korrektheit des Metropolis-Hastings Algorithmus (5)

$p(y, x)$ ist Übergangsdichte von y nach x

Forderung: 1. Vorschlagsdichte $q(x|y)$ muss x generieren und 2. x muss akzeptiert werden.

$$p(y,x) = \underbrace{q(x|y)}_{1.}\underbrace{r(y,x)}_{2.} = q(x|y) \Rightarrow$$
$$f(y)p(y,x) = f(y)q(x|y)$$

Zusammen mit der letzten Gleichung auf der vorigen Folie folgt:

$$f(x)p(x,y) = f(y)p(y,x).$$

Gibbs Sampling

Problemstellung

Simulation aus einer "schwierigen" zweidimensionalen Dichte

aber Simulation aus bedingten Dichten $f_{X|Y}(x|y)$ und $f_{Y|X}(y|x)$ sei einfach

Gibbs Sampling Algorithmus

Sei (X_0, Y_0) beliebiger Startwert und $(X_0, Y_0), \ldots, (X_n, Y_n)$ bereits simuliert.

- $X_{n+1} \sim f_{X|Y}(x|Y_n)$
- $Y_{n+1} \sim f_{Y|X}(y|X_{n+1})$

Simulation aus den bedingten Verteilungen nicht so einfach $\Longrightarrow$ Metropolis-Hastings Algorithmus.

18 Zusammenfassung

- Wahrscheinlichkeitsbegriff
- Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten
- Einfache kombinatorische Formeln
- Stirling-Formel
- Bedingte Wahrscheinlichkeiten, Unabhängigkeit
- Satz der Totalen Wahrscheinlichkeit
- Satz von Bayes
- Verteilungsfunktion, Eigenschaften
- Erwartungwert, Varianz, Rechnen mit Erwartungwert, Varianz

Zusammenfassung (2)
Wahrscheinlichkeitsmodelle und Transformationen

- Diskrete Gleichverteilung
- Binomialverteilung
- Poisson-Verteilung
- Geometrische Verteilung
- Gleichverteilung
- Exponentialverteilung, Anwendungen
- Normalverteilung, Eigenschaften
- Transformationssatz für eindimensionale Zufallsvariablen
- Faltungsformel

Zusammenfassung (3)
Mehrdimensionale Verteilungen, Ungleichungen, Konvergenzarten

- Zweidimensionale Zufallsvariablen
- Unabhängigkeit und Korrelation, Berechnung von Korrelationskoeffizienten für diskrete und für stetige Zufallsvariablen
- Markov-Ungleichung, Tschebyschev-Ungleichung, Jensen-Ungleichung
- Konvergenzarten: in Wahrscheinlichkeit, Verteilung, im quadratischen Mittel

Zusammenfassung (4)

Grenzwertsätze, Schätzmethoden und Zufallszahlen

- Gesetz der Großen Zahlen
- Empirische Verteilungsfunktion
- Satz von Glivenko-Cantelli
- Zentraler Grenzwertsatz
- Schätzmethoden (Momentenschätzung, Maximum-Likelihood-Methode)
- Erzeugung und Eigenschaften von Zufallszahlen
- Statistische Tests von Zufallszahlen
- Methoden zur Erzeugung spezieller Verteilungen, Berechnung der inversen Verteilungsfunktion

Zusammenfassung (5)

Markov-Ketten

- Begriff der Markov'schen Kette, Eigenschaften
- Klassifikation der Zustände (Kommunikation, wesentliche, unwesentliche Zustände, Periodizität)
- Positiv rekurrente, nullrekurrente und transiente Zustände, mittlere Rückkehrzeit
- Ergodensatz, stationäre Verteilung, Berechnung stationärer Verteilungen
- Irrfahrten

Zusammenfassung (6)

Übungsaufgaben

- 8, 9 (Binomialverteilung)
- 10, 11 (Satz der Totalen Wkt., Satz von Bayes)
- 12 (Poisson-, Binomialverteilung, Satz der Totalen Wahrscheinlichkeit)
- 15 (Berechnen der Dichtefunktion, Berechnen von Wahrscheinlichkeiten)
- 16 (Geometrische Verteilung)
- 17, 18 (Rechnen mit Erwartungswert und Varianz)
- 20 (Normalverteilung)
- 21 (Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten, Exponentialverteilung)

Zusammenfassung (7)
Übungsaufgaben (2)

- 22, 24a,b,c (Transformationsformel)
- 23 (Geometrische Verteilung, Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten)
- 26 (Faltung)
- 28 (Berechnen von Erwartungswerten)
- 28, 31, 32 (Zweidimensionale Zufallsvariablen, Berechnung von Kovarianzen und Korrelationskoeffizienten)
- 30a (Randverteilungen)

Zusammenfassung (8)
Übungsaufgaben (3)

- 33,34 (Zentraler Grenzwertsatz, Tschebyschev-Ungleichung)
- 35,36 (Momentenschätzung, ML-Schätzung)
- 38,39 (Dichte, Zufallszahlen, Akzeptanzmethode)
- 40,41,42,43,44 (Markov-Ketten)