

Aufgaben zur “Stochastik für Informatiker”

Aufg. 28) (2 P.) Seien X_1, \dots, X_n unabhängig, $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, $i = 1, \dots, n$. Zeigen Sie, daß

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim \text{Erlang}(n, \lambda).$$

mit der Dichte:

$$f_{\text{Erl}}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Hinweis: Induktion und Faltungsformel.

Aufg. 29) (2 P.) Es seien $U, V \sim R(0, 1)$ unabhängig. Berechnen Sie $P(U \leq V)$!

Aufg. 30) (4 P.) Es seien X, Y zwei zufällige Variablen mit der Dichtefunktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3}(4 - x - y) & , \text{ falls } 1 < x < 2, 0 < y < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie EX , EY und $E(X \cdot Y)$!

Aufg. 31) (2 P.) Es sei X eine nichtnegative stetige zufällige Variable mit Verteilungsfunktion $F(x)$ und dem Erwartungswert EX . Beweisen Sie die Identität

$$EX = \int_0^\infty (1 - F(x)) dx.$$

Aufg. 32) (+4 P.) Sei $p(l)$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein Seil der ganzzahligen Länge l bei Belastung mit einer gegebenen Last nicht reißt. Angenommen, es gilt $p(l_1 + l_2) = p(l_1)p(l_2)$ für alle ganzzahligen $l_1, l_2 > 0$ und $p(2) = \frac{1}{2}$. Können Sie daraus die erwartete Länge ermitteln, bei der das Seil reißt?

Anmerkung: Das Seil wird schrittweise um jeweils eine Einheit verlängert.