

Aufgaben zur “Stochastik für Informatiker”

Aufg. 42) (2 P.) Klassifizieren Sie die Zustände der durch die Übergangsmatrizen M_1 und M_2 gegebenen Markov'schen Kette!

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufg. 43) Es sei $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Markov'sche Kette mit den Übergangswahrscheinlichkeiten

$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

- a) (1 P.) Klassifizieren Sie die Zustände!
- b) (2 P.) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $f_1(n)$ erstmalig nach n Schritten in den Zustand 1 zurückzukehren.
- c) (2 P.) Berechnen Sie die mittlere Rückkehrzeit in den Zustand 1, d.h.

$$\mu_1 = E(T_1 | X_0 = 1), \quad \text{wobei } T_1 = \inf\{n \geq 1 : X_n = 1\}!$$

Aufg. 44) (3 P.) Harry's Restaurant wechselt von Jahr zu Jahr zwischen den Zuständen 0 (bankrott), 1 (nahezu bankrott) und 2 (solvent). Die Übergangsmatrix ist

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

- a) Berechnen Sie den Erwartungswert für die Anzahl der Jahre bis der Zustand 0 erreicht wird, wenn im Zustand 2 gestartet wird!
- b) Harry's reicher Onkel Dagobert kann es nicht ertragen, dass jemand aus seiner Familie bankrott ist und fürchtet einen Imageverlust in der Öffentlichkeit. Jedes mal wenn der Zustand 0 erreicht wird, versetzt er deshalb Harry's Restaurant durch eine kräftige Finanzspritze in den Zustand 2. Wie groß ist nun der Erwartungswert $\mu_{20} = E(T_{20})$, wobei $T_{20} = \inf\{n \geq 0 : X_n = 0 | X_0 = 2\}$?