1.5 Folgerungen aus dem Kolmogoroff- Axiomensystem

Folg. 2 *Sei* $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ *W.-raum.*
Seien $A, B, A_1, \ldots, A_n$ *Ereignisse. Es gelten die folgenden Aussagen:*

1. $$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

2. *Für das unmögliche Ereignis gilt:*
$$P(\emptyset) = 0.$$

3. *Es seien* $A, B \in \mathcal{E}$ *zwei Ereignisse mit* $A \subseteq B$*. Dann gilt:*
   (a) $B \setminus A \in \mathcal{E}$*;*
   (b) $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ *(Subtraktivität);*
   (c) $P(A) \leq P(B)$ *(Monotonie der Wahrscheinlichkeit).*

4.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B).$$

Sind A und B unvereinbar, so gilt die Gleichheit.

5. *Es sei $\{A_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge von Ereignissen mit der Eigenschaft $A_n \subseteq A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

$$P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Wir sprechen von der „Stetigkeit von unten“ bzw. der Stetigkeit von P für eine wachsende Folge von Ereignissen.

6. *Es sei $\{A_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge von Ereignissen mit der Eigenschaft $A_n \supseteq A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

$$P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Wir sprechen hier von der „Stetigkeit von oben“ bzw. von der Stetigkeit von P für eine fallende Folge von Ereignissen.

Beweis:

1. Es gilt: $\Omega = A \cup (\Omega \setminus A) = A \cup \overline{A}$, für alle $A \in \mathcal{E}$.

   Wegen $A \cap \overline{A} = \emptyset$ folgt:

$$\begin{aligned} 1 &= P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) \\ &= P(A) + P(\overline{A}) \end{aligned}$$

   Wir stellen um und erhalten: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

2. Wegen $\emptyset = \Omega \setminus \Omega = \overline{\Omega}$ folgt aus Aussage 1:

$$P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 0.$$

3. Es seien $A, B \in \mathcal{E}$ zwei Ereignisse mit $A \subseteq B$. Wir zeigen die drei Aussagen:

   (a) Es gilt:

$$B \setminus A = B \cap \overline{A}.$$

   Wegen $B \in \mathcal{E}$ und $\overline{A} \in \mathcal{E}$ folgt nach Def. 1.4.(2.), daß auch die Menge $B \setminus A$ Element der Menge $\mathcal{E}$ ist.

   (b) Aus $B = A \cup (B \setminus A)$ und $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ folgt:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cup (B \setminus A)) \\ &= P(A) + P(B \setminus A) \end{aligned}$$

Wir stellen um und erhalten:

$$P(B) - P(A) = P(B \setminus A).$$

(c) Wenn wir die Subtraktivitätsgleichung etwas umstellen, erhalten wir:

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A).$$

Wegen Definition 1.6.(1.) folgt daraus sofort:

$$P(A) \leq P(B).$$

4. trivial

5. Es sei nun $\{A_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge von Ereignissen mit der Eigenschaft $A_n \subseteq A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
   Nach Definition der Ereignisfolge (A_n) gilt:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

   Wir definieren:

$$\begin{aligned} B_1 &:= A_1 \\ B_2 &:= A_2 \setminus A_1 \\ &\vdots \\ B_n &:= A_n \setminus A_{n-1} \qquad \text{usw.} \end{aligned}$$

Offenbar gilt für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$:

$$B_i \cap B_j = \emptyset.$$

Weiterhin gilt:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k.$$

Daraus ergibt sich die folgende Gleichungskette:

$$\begin{aligned}
P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P(B_k) \quad \text{(Definition 1.6.(3.))} \\
&= P(A_1) + \sum_{k=2}^{\infty} P(A_k \setminus A_{k-1}) \\
&= P(A_1) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} P(A_k \setminus A_{k-1}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(P(A_1) + \sum_{k=2}^{n} (P(A_k) - P(A_{k-1})) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(A_n)
\end{aligned}$$

Das ist die Aussage.

6. Es sei nun $\{A_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ eine Folge von Ereignissen mit der Eigenschaft $A_n \supseteq A_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Unter Anwendung der DE MORGAN'schen Regeln erhalten wir:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{A_k}}.$$

Außerdem gilt: $\overline{A_k} \subseteq \overline{A_{k+1}}$. Dann können wir die folgende Gleichungskette ableiten:

$$\begin{aligned} P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) &= P\left(\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{A_k}}\right) \\ &= 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{A_k}\right) \quad \text{(Aussage 1)} \\ &= 1 - P\left(\lim_{n\to\infty} \overline{A_n}\right) \\ &= 1 - \lim_{n\to\infty} P(\overline{A_n}) \quad \text{(Aussage 4)} \\ &= 1 - \lim_{n\to\infty} (1 - P(A_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} P(A_n) \end{aligned}$$

$\square$

Folg. 3 (Subadditivität von P) *Seien* $A_1, A_2, \ldots$ *Ereignisse. Dann gilt:*

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
B_1 &:= A_1\\
B_2 &:= A_2 \setminus A_1\\
B_3 &:= A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)\\
&\ldots\\
B_i &:= A_i \setminus (\bigcup_{j<i} A_j) \qquad \textit{usw.}
\end{aligned}$$

Ereignisse B_i *sind paarweise disjunkt.* $B_i \subseteq A_i$.

$\bigcup_{i\geq 1} B_i = \bigcup_{i \geq 1} A_i \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) &= P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)\\
&= \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \quad \textit{(3. Axiom)}\\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad \textit{(Monotonie der Wkt.)}
\end{aligned}$$

□

Folg. 4 (Siebformel) *Seien* $A_1, \ldots, A_n$ *Ereignisse. Dann gilt:*

$$
\begin{aligned}
P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) &= \sum_{I\subseteq\{1,\ldots,n\}, I\neq\emptyset} (-1)^{|I|-1} P(\bigcap_{i\in I} A_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + - \ldots \\
& \quad (-1)^{n+1} \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_n} P(\bigcap_{\nu=1}^{n} A_{i_\nu})
\end{aligned}
$$

Siebformel,

Prinzip von Inklusion und Exklusion

Formel von Poincare-Sylvester

(Montmort: Briefwechsel mit Bernoulli)

Beweis: (Induktion nach n)

1. IA $n=1$ trivial, ($n=2$: Subtraktivität)

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \\ &= \sum_{i=1}^{2} P(A_i) - \sum_{I=\{1,2\}} P(A_i \cap A_j) \\ &= \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|-1} P(\bigcap_{i \in I} A_i) \end{aligned}$$

2. IS: Aussage der Folgerung gelte für n. Dann

$$P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) + P(A_{n+1}) - P(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cap A_{n+1}))$$

wegen Subtraktivität. Auf den ersten und dritten Summanden wird jeweils die IV angewendet. Der dritte Summand ist gleich

$$\begin{aligned} &- P(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cap A_{n+1})) \\ &= - \sum_{J \subseteq \{1,\ldots,n\}, J \neq \emptyset} (-1)^{|J|-1} P(\bigcap_{i \in J}(A_i \cap A_{n+1})) \\ &= \sum_{\{n+1\} \subseteq J \subseteq \{1,\ldots,n+1\}, J \neq \{n+1\}} (-1)^{|J|-1} P(\bigcap_{i \in J} A_i). \end{aligned}$$

1. Summe: alle nichtleeren Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$

3. Summe: alle nichtleeren Teilmengen von $\{1, \ldots, n+1\}$, die das Element $n+1$ enthalten

2. Summe: das Element $n+1$.

$\square$

Bsp. 1.5 (Rencontre-Problem) *n Studenten sollen schriftlich von einer Änderung des Vorlesungstermins benachrichtigt werden. Im irrtümlichen Glauben, daß jeder der n Briefe den gleichen Inhalt aufweist, verteilt eine Sekretärin die Briefe willkürlich in die verschiedenen Umschläge.*

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens ein Brief in den richtigen Umschlag gelangt? Welchen Wert erhält man für $n \to \infty$?

Hinweis*: Sei A das Ereignis: "mindestens ein Brief im richtigen Umschlag" und A_i das Ereignis: "Brief i kommt in den richtigen Umschlag". Wenden Sie auf $P(A) = P(\bigcup_{i=1}^n A_i)$ das Prinzip von Inklusion und Exklusion (Siebformel) an.*

Sortierprobleme

geg.: Feld der Länge n

Daten zufällig angeordnet, gleichverteilt mit Wkt. $\frac{1}{n!}$.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens ein Feldelement schon an der richtigen Stelle liegt.? Welchen Wert erhält man für $n \to \infty$?

das ist dasselbe wie beim Rencontre-Problem.

Wie groß ist die Wkt., daß genau k Elemente bereits am richtigen Platz stehen? $\to$ Übung

Bem. 1 (Bonferroni-Ungleichungen) *Die Ungleichung*

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

heißt Bonferroni-Ungleichung. Weitere (Bonferroni)- Ungleichungen erhält man durch Abbruch der Siebformel nach Gliedern mit positivem (≤) bzw. negativem (≥) Vorzeichen.

Bsp. 1.6

$$\begin{aligned}
P(A \cup B \cup C) &\leq P(A) + P(B) + P(C) \qquad (n = 1) \\
P(A \cup B \cup C) &\geq P(A) + P(B) + P(C) \qquad (n = 2) \\
&\quad -P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\
P(A \cup B \cup C) &\leq P(A) + P(B) + P(C) \\
&\quad -P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\
&\quad +P(A \cap B \cap C)
\end{aligned}$$

(n=3, es gilt hier sogar Gleichheit)

1.6 Die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit

Wir betrachten für ein zufälliges Experiment die Menge der Elementarereignisse $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$. Sei $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$ und jedes Elementarereignis habe die gleiche Wahrscheinlichkeit (d.h. $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{N},\ \forall i = 1, \ldots, N$).
Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\#\{\omega\colon \omega \in A\}}{N} = \frac{n(A)}{N} \\ &= \frac{\#\text{ der für das Eintreten von } A \text{ günstigen Ereignisse}}{\#\text{ der möglichen Ereignisse}} \end{aligned}$$

Paradoxon von DE MÉRÉ

Es wird ein Experiment mit drei Würfeln durchgeführt, wobei die Würfel gleichzeitig geworfen werden. Folgende Ereignisse werden betrachtet:

A = Es fallen 11 Augen.

B = Es fallen 12 Augen.

Frage: $P(A), P(B)$?

Die Menge der Elementarereignisse ist

$$\Omega = \{(i, j, k) \colon 1 \le i, j, k \le 6\}.$$

Anzahl der Elementarereignisse $N := 6^3 = 216$.

$$P((i, j, k)) = \tfrac{1}{216}.$$

Sehen wir uns nun die beiden Ereignisse A und B an. Dabei geben wir in der ersten Spalte an, welche Ziffernkombinationen auftreten können. In der zweiten Spalte steht jeweils die Anzahl der

Möglichkeiten für die Anordnung der jeweiligen Zifferntrios.

A		**B**	
Ereignisse	#	Ereignisse	#
6-4-1	6	6-5-1	6
6-3-2	6	6-4-2	6
5-5-1	3	6-3-3	3
5-4-2	6	5-5-2	3
5-3-3	3	5-4-3	6
4-4-3	3	4-4-4	1
n(A)=27		n(B)=25	

Also:

$$P(A) = \frac{27}{216} > \frac{25}{216} = P(B).$$

Folglich ist das Werfen von 11 Augen wahrscheinlicher als das Werfen von 12 Augen!