# 8 Mehrdimensionale Zufallsvariablen

## 8.1 Begriffe

**Def. 2.23** *Es seien $X_i$, $i = 1, \ldots, p$ reellwertige, zufällige Variablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{E}, P)$. Dann heißt*

$$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)^T \quad : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p,$$

*zufälliger Vektor.*

*Er transformiert den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ in den Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{R}^p, \mathcal{B}^p, P_X)$. $\mathcal{B}^p$ ist dabei die $\sigma$–Algebra der $p$–dimensionalen Borelmengen (im $\mathbb{R}^p$ also). Sie wird erzeugt von allen halboffenen ($p$–dimensionalen) Intervallen (Quadern).*

**Def. 2.24** *Die Funktion*

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_p) := P(\{\omega \colon X_1(\omega) < x_1, \ldots, X_p(\omega) < x_p\})$$

*heißt Verteilungsfunktion des zufälligen Vektors* $\mathbf{X}$*. Sie wird auch mit* $F_{X_1,\ldots,X_p}(x_1, \ldots, x_p)$ *bezeichnet.*

Es gilt:

$$F_{X_1,\ldots,X_p}(x_1, \ldots, x_p) = P\left(\bigcap_{i=1}^{p} \{\omega \in \Omega \colon X_i(\omega) < x_i\}\right).$$

Die Verteilungsfunktion für zufällige Vektoren besitzt folgende Eigenschaften:

1. Invarianz gegenüber Permutationen, d.h.

$$F_{X_1,\ldots,X_p}(x_1, \ldots, x_p) = F_{X_{i_1},\ldots,X_{i_p}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_p})$$

2. $\lim\limits_{x_p \to \infty} F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_p) = F_{X_1,\ldots,X_{p-1}}(x_1, \ldots, x_{p-1})$;

$$F_X(x_1, \ldots, x_p) =$$

$$P(\underbrace{\{\omega \colon X_1(\omega) < x_1\} \cap \ldots \cap \{\omega \colon X_{p-1}(\omega) < x_{p-1}\}}_{=:A} \cap$$

$$\underbrace{\{\omega \colon X_p(\omega) < x_p\}}_{\longrightarrow_{x_p \to \infty} \Omega}.$$

Damit gilt also:

$$\begin{aligned}\lim_{x_p \to \infty} F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_p) &= P(A \cap \Omega) = P(A) \\ &= F_{X_1,\ldots,X_{p-1}}(x_1, \ldots, x_{p-1}).\end{aligned}$$

3. $\lim\limits_{x_p \to -\infty} F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_p) = 0$;

   **Bem.:** Man kann wegen 1. auch jede beliebige Komponente wählen!

4. $\lim\limits_{(x_1,\ldots,x_p) \to (\infty,\ldots,\infty)} F_X(x_1, \ldots, x_p) = 1$;

5. $F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_p)$ ist in jedem Argument monoton wachsend;

6. $F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_p)$ ist in jedem Argument linksseitig stetig.

**Def. 2.25** *Ein zufälliger Vektor* $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)^T$ *heißt stetig verteilt, wenn seine Verteilungsfunktion charakterisiert ist durch:*

$$F(x_1, \ldots, x_p) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_p} f(t_1, \ldots, t_p)\, dt_p \ldots dt_1,$$

*wobei für die Funktion* $f$ *gilt:*

1. $f(x_1, \ldots, x_p) \geq 0, \ \forall x_1, \ldots, x_p$;

2. $\int\limits_{\mathbb{R}^p} f(x_1, \ldots, x_p)\, dx_1 \ldots dx_p = 1.$

*Die Funktion* $f(x_1, \ldots, x_p)$ *heißt dann* Dichtefunktion *des zufälligen Vektors* $\mathbf{X}$.

Falls die Dichtefunktion $f(x_1, \ldots, x_p)$ stetig ist, so gilt:

$$f(x_1, \ldots, x_p) = \frac{\partial^p F_X(x_1, \ldots, x_p)}{\partial x_1 \ldots \partial x_p}.$$

**Def. 2.26** *Ein zufälliger Vektor* $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)^T$ *heißt*

- *diskret, falls jede Komponente von* $\mathbf{X}$ *diskret ist, d.h. jedes* $X_i$ *besitzt höchstens abzählbar viele Argumente.*

- *mixed(gemischt), falls einige seiner Komponenten diskret, die restlichen dagegen stetig sind.*

- *stetig, falls alle Komponenten von* $\mathbf{X}$ *stetige Zufallsgrößen sind.*

**Def. 2.27** *Es sei* $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)^T$ *ein diskreter zufälliger Vektor. Für* $i = 1, \ldots, p$ *habe* $X_i$ *den Wertevorrat* $\{x_{i1}, \ldots, x_{ik}, \ldots\}$. *Dann definieren wir:*

$$p_{j\ldots k} = P(X_1 = x_{1j}, \ldots, X_p = x_{pk}).$$

Für die Verteilungsfunktion des zufälligen Vektors $\mathbf{X}$ gilt:

$$\begin{aligned} F(x_1, \ldots, x_p) &= P\left(\bigcap_{i=1}^{p} \{\omega \in \Omega \colon X_i(\omega) < x_i\}\right) \\ &= \sum_{j \colon x_{1j} < x_1} \cdots \sum_{k \colon x_{pk} < x_p} p_{j\ldots k} \end{aligned}$$

Es sei nun $p = 2$ und wir betrachten den zufälligen Vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$. Wir untersuchen zwei Fälle:

**– X ist diskret.** Dann gilt zunächst:

$$X_1 : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

$$X_2 : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & \dots \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n & \dots \end{pmatrix}$$

Daraus folgt (Definition 2.27):

$$p_{ij} = P(X_1 = x_i, X_2 = y_j) = P(\mathbf{X} = (x_i, y_j)).$$

Weiterhin gilt:

$$P(X_1 \in \{x_i : i \in \mathbb{N}\}) = 1$$
$$P(X_2 \in \{y_j : j \in \mathbb{N}\}) = 1$$

Wir bezeichnen:

$$\mathcal{X} := \{x_i : i \in \mathbb{N}\},$$
$$\mathcal{Y} := \{y_j : j \in \mathbb{N}\}.$$

Der zufällige Vektor $\mathbf{X}$ kann Werte der Form $(x_i, y_j) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ annehmen. Folglich gilt:

$$P(\mathbf{X} \in \mathcal{X}\times\mathcal{Y}) = P(X_1 \in \mathcal{X}, X_2 \in \mathcal{Y}) = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} p_{ij} = 1.$$

Es könnte evtl. interessant sein, die Wahrscheinlichkeit zu untersuchen, daß eine der zufälligen Variablen $X_1$ bzw. $X_2$ einen bestimmten Wert $x_i$ bzw. $y_j$ annimmt.

$$P(X_1 = x_i) = P(\{X_1 = x_i\} \cap \Omega)$$

$$= P(\{X_1 = x_i\} \cap$$

$$\underbrace{\{(X_2 = y_1) \vee (X_2 = y_2) \vee \ldots \vee (X_2 = y_n) \vee \ldots\}}_{= \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} \{X_2 = y_j\} = \Omega})$$

$$= P(\{X_1 = x_i\} \cap \left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \{X_2 = y_j\}\right)$$

$$= P\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \{(X_1 = x_i) \,\&\, (X_2 = y_j)\}\right)$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{N}} p_{ij} =: p_{i\cdot}$$

Wir erhalten also:

$$p_{i\cdot} = P(X_1 = x_i).$$

Analog erhalten wir, wenn wir die Betrachtung mit der zufälligen Variable $X_2$ wiederholen:

$$p_{\cdot j} = P(X_2 = y_j).$$

**Def. 2.28** *Die Wahrscheinlichkeiten $p_{i\cdot}$ bzw. $p_{\cdot j}$ ($i, j \in \mathbb{N}$) nennen wir die Randwahrscheinlichkeiten des zufälligen Vektors $X = (X_1, X_2)^T$.*

Das folgende Schema verdeutlicht noch einmal die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Wahrscheinlichkeiten:

| $X_1 \backslash X_2$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $\dots$ | $y_j$ | $\dots$ | $y_n$ | $\dots$ | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $p_{11}$ | $p_{12}$ | $p_{13}$ | $\dots$ | $p_{1j}$ | $\dots$ | $p_{1n}$ | $\dots$ | $p_{1\cdot}$ |
| $x_2$ | $p_{21}$ | $p_{22}$ | $p_{23}$ | $\dots$ | $p_{2j}$ | $\dots$ | $p_{2n}$ | $\dots$ | $p_{2\cdot}$ |
| $x_3$ | $p_{31}$ | $p_{32}$ | $p_{33}$ | $\dots$ | $p_{3j}$ | $\dots$ | $p_{3n}$ | $\dots$ | $p_{3\cdot}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ |
| $x_i$ | $p_{i1}$ | $p_{i2}$ | $p_{i3}$ | $\dots$ | $p_{ij}$ | $\dots$ | $p_{in}$ | $\dots$ | $p_{i\cdot}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ |
| $x_n$ | $p_{n1}$ | $p_{n2}$ | $p_{n3}$ | $\dots$ | $p_{nj}$ | $\dots$ | $p_{nn}$ | $\dots$ | $p_{n\cdot}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ | | $\vdots$ |
| $\sum$ | $p_{\cdot 1}$ | $p_{\cdot 2}$ | $p_{\cdot 3}$ | $\dots$ | $p_{\cdot j}$ | $\dots$ | $p_{\cdot n}$ | $\dots$ | $1$ |

**Bsp. 2.27** *Es wird eine Umfrage zum Thema „Rauchen“ durchgeführt. Dabei werden Männer und Frauen darüber befragt, ob sie Raucher oder Nichtraucher sind. Das ergibt die beiden folgenden Zufallsvariablen:*

$$X_1 = \begin{cases} 1 \text{ , falls weiblich} \\ 2 \text{ , falls männlich} \end{cases}$$

$$X_2 = \begin{cases} 1 \text{ , falls Raucher} \\ 2 \text{ , falls Nichtraucher} \end{cases}$$

*Folglich erhalten wir für den zufälligen Vektor* $X = (X_1, X_2)^T$ *das folgende Schema:*

| $X_1 \backslash X_2$ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 1 | $p_{11}$ | $p_{12}$ |
| 2 | $p_{21}$ | $p_{22}$ |

*Wir erstellen nun eine* $2 \times 2$*–Kontingenztafel. Dabei wird für jedes der vier Felder anhand der statistischen Erhebung die Anzahl der Personen ermittelt, für die die*

*beiden Eigenschaften zutreffen, die dieses Feld charakterisieren.*

| $X_1 \backslash X_2$ | 1 | 2 | |
|---|---|---|---|
| 1 | $n_{11}$ | $n_{12}$ | $n_{1.}$ |
| 2 | $n_{21}$ | $n_{22}$ | $n_{2.}$ |
| | $n_{.1}$ | $n_{.2}$ | $n_{..}$ |

*Dabei bedeuten:*

$n_{ij}$ *– die Anzahl der Personen mit dem Geschlecht* $i$ *und dem Raucherverhalten* $j$*;*

$n_{.1}$ *– die Anzahl der Raucher;*

$n_{.2}$ *– die Anzahl der Nichtraucher;*

$n_{1.}$ *– die Anzahl der Frauen;*

$n_{2.}$ *– die Anzahl der Männer;*

$n_{..}$ *– die Gesamtzahl der Befragten.*

*Mit* $\hat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_{..}}$ *ergibt sich nun eine Schätzung für die Wahrscheinlichkeit* $p_{ij}$*.*

**Bsp. 2.28** *Werfen zweier Würfel. Wir betrachten den zufälligen Vektor* $X = (X_1, X_2)^T$*, wobei* $X_1$ *die Augenzahl des ersten Würfels ist und* $X_2$ *die des zweiten. Für die zufälligen Variablen* $X_1$ *und* $X_2$ *gilt:*

$$X_1 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$X_2 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

*Da die Würfel voneinander unabhängig sind, gilt (Definition 1.10):*

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P(X_1 = i, X_2 = j) \\ &= P(\{X_1 = i\} \cap \{X_2 = j\}) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \end{aligned}$$

*Damit erhalten wir das folgende Schema:*

| $X_1 \backslash X_2$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |
| 2 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |
| 3 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |
| 4 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |
| 5 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |
| 6 | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

*Wir wollen nun wissen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, daß der erste Würfel weniger als vier Augen zeigt und der zweite Würfel weniger als drei. Wir wissen bereits, daß die beiden Würfel voneinander unabhängig sind. Es gilt:*

$$P(X_1 < 4, X_2 < 3) = \sum_{i<4;\, j<3} p_{ij} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

*Die hier addierten Wahrscheinlichkeiten sind in dem oben angegebenen Schema eingerahmt.*

Die Aussagen zu zweidimensionalen zufälligen Vektoren, die wir bis hierher gemacht haben, gelten analog erweitert auch für höherdimensionale zufällige Vektoren.

– $X$ **ist stetig.** In diesem Fall erhalten wir eine zweidimensionale Dichtefunktion $f(x, y)$, für die gilt (vgl. Definition 2.25):

1. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1$;
2. $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Die Verteilungsfunktion ergibt sich dann nach Definition 2.25 durch:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u, v)\, du\, dv = P(X_1 < x, X_2 < y).$$

Da die Dichtefunktion $f(x, y)$ stetig ist, gilt weiterhin:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y}.$$

Offenbar

$$\lim_{y\to\infty} F(x,y) = F_{X_1}(x) = P(X_1 < x).$$

$$\lim_{x\to\infty} F(x,y) = F_{X_2}(y) = P(X_2 < y).$$

**Def. 2.29** *Die Verteilungsfunktionen $F_{X_1}$ und $F_{X_2}$ bezeichnen wir als Randverteilungen von $X_1$ bzw. $X_2$.*

Integrieren wir die Dichtefunktion nur nach einer der beiden Variablen, so erhalten wir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \frac{dF_{X_1}(x)}{dx} =: f_{X_1}(x) \qquad (2.2)$$

Analog gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \frac{dF_{X_2}(y)}{dy} =: f_{X_2}(y).$$

**Def. 2.30** *Die Funktionen $f_{X_1}$ und $f_{X_2}$ bezeichnen wir als Randdichten von $X_1$ bzw. $X_2$.*

Offenbar,

$$F_{X_1}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{X_1}(t)\,dt$$

$$F_{X_2}(y) = \int_{-\infty}^{y} f_{X_2}(t)\,dt$$

**Bsp. 2.29** *Zweidimensionale Normalverteilung*

`Descr_normal_2D`

## 8.2 Unabhängigkeit von Zufallsgrößen

**Def. 2.31** *Es seien $X_1$ und $X_2$ zwei zufällige Variablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{E}, P)$. Diese beiden zufälligen Variablen $X_1$ und $X_2$ heißen stochastisch unabhäng wenn für alle $A, B \in \mathcal{B}^1$ gilt:*

- $P(X_1 \in A, X_2 \in B) = P(X_1 \in A) \cdot P(X_2 \in B)$;
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Erinnerung:

$$P(X_1 \in A, X_2 \in B) = P(\{\omega\colon X_1(\omega) \in A\} \cap \{\omega\colon X_2(\omega) \in B\}).$$

Es sei $X = (X_1, X_2)^T$ ein zufälliger Vektor, für den gilt, daß die zufälligen Variablen $X_1$ und $X_2$ stochastisch unabhängig sind. Dann gilt:

$$\begin{aligned} F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &= P(X_1 < x_1, X_2 < x_2) \\ &= P(X_1 \in \underbrace{(-\infty, x_1)}_{A \in \mathcal{B}^1}, X_2 \in \underbrace{(-\infty, x_2)}_{B \in \mathcal{B}^1}) \\ &= P(X_1 \in (-\infty, x_1)) \cdot P(X_2 \in (-\infty, x_2)) \\ &= F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2) \end{aligned}$$

- Ist der zufällige Vektor $X = (X_1, X_2)^T$ außerdem stetig, so folgt:

$$\underbrace{f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)}_{\substack{\text{zweidimensio–} \\ \text{nale Dichte}}} = \underbrace{f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2)}_{\text{Randdichten}}.$$

- Ist der zufällige Vektor $X = (X_1, X_2)^T$ außerdem diskret, so folgt für alle $i, j = 1, \ldots$:

$$p_{ij} = p_{i.} \cdot p_{.j}.$$

**Bsp. 2.30** *In der folgenden Tabelle sind die Einzelwahrscheinlichkeiten $p_{ij}$ einer zweidimensionalen Zufallsvariablen eingetragen. Die Komponenten $X$ und $Y$ seien unabhängig. Zunächst seien nur die fett eingezeichneten Einträge bekannt. Bestimmen Sie die restlichen Einträge! Zur Kontrolle sind sie grün eingetragen.*

| $X \setminus Y$ | *1* | *2* | *3* | $p_{i.}$ |
|---|---|---|---|---|
| *-1* | *0.02* | **0.06** | *0.12* | *0.20* |
| *0* | **0.03** | *0.09* | *0.18* | *0.30* |
| *1* | *0.05* | *0.15* | *0.3* | **0.50** |
| $p_{.j}$ | *0.1* | **0.30** | *0.60* | *1* |

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X &= -1 \cdot 0.2 + 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.5 = 0.3 \\
\mathbf{E}Y &= 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.6 = 2.5 \\
\mathbf{E}(X \cdot Y) &= -0.02 - 2 \cdot 0.06 - 3 \cdot 0.12 + 0 \cdot (\ldots) \\
&\quad +1 \cdot 0.05 + 2 \cdot 0.09 + 3 \cdot 0.18 = 0.75 \\
cov(X, Y) &= \mathbf{E}(X \cdot Y) - (\mathbf{E}X)(\mathbf{E}Y) = 0.75 - 0.75 = 0.
\end{aligned}$$

*Merkwürdig?*

**Satz 2.23** *Es seien $X_1$ und $X_2$ zwei zufällige Variablen. $\varphi$ und $\psi$ seien zwei beliebige $\mathcal{B}^1$–meßbare Transformationen dieser beiden Variablen,*

$$X_1' = \varphi(X_1), \quad X_2' = \psi(X_2).$$

*Die zufälligen Variablen $X_1$ und $X_2$ sind genau dann stochastisch unabhängig, wenn die Zufallsgrößen $X_1'$ und $X_2'$, für alle Transformationen $\varphi$ und $\psi$, unabhängig sind.*

**Beweis:** Die Funktionen $\varphi$ und $\psi$ seien auf der Menge $\mathbb{R}$ definiert und reellwertig. Dann gilt für die jeweilige Umkehrfunktion genau dann

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(A) &= \{x\colon \varphi(x) \in A\} \in \mathcal{B}^1, \quad \forall A \in \mathcal{B}^1 \\ \psi^{-1}(B) &= \{y\colon \psi(y) \in B\} \in \mathcal{B}^1, \quad \forall B \in \mathcal{B}^1, \end{aligned}$$

wenn $\varphi$ und $\psi$ $\mathcal{B}^1$–meßbar sind.

**($\Longrightarrow$)** Es seien die zufälligen Variablen $X_1$ und $X_2$ stochastisch unabhängig. Wir zeigen, daß die zufälligen Variablen $\varphi(X_1)$ und $\psi(X_2)$ unabhängig sind. Da die Funktionen $\varphi$ und $\psi$ $\mathcal{B}^1$–meßbar sind, gilt

$$
\begin{aligned}
& P(\varphi(X_1) \in A, \psi(X_2) \in B) \\
&\quad = P(X_1 \in \varphi^{-1}(A), X_2 \in \psi^{-1}(B)) \\
&\quad = P(X_1 \in \varphi^{-1}(A)) \cdot P(X_2 \in \psi^{-1}(B)) \\
&\quad = P(\varphi(X_1) \in A) \cdot P(\psi(X_2) \in B)
\end{aligned}
$$

D.h. die zufälligen Variablen $\varphi(X_1)$ und $\psi(X_2)$ sind unabhängig.

**($\Longleftarrow$)** Es gelte also, daß für alle $\mathcal{B}^1$–meßbaren Funktionen $\varphi$ und $\psi$ die zufälligen Variablen $\varphi(X_1)$ und $\psi(X_2)$ unabhängig sind. Insbesondere ist das dann auch der Fall für die Funktionen $\varphi(x) \equiv \psi(x) \equiv x$. Das heißt aber nichts anderes, als daß gilt:

$$X_1 = \varphi(X_1), \quad X_2 = \psi(X_2).$$

Folglich sind auch die zufälligen Variablen $X_1$ und $X_2$ unabhängig.

□

**Bsp. 2.31** *Sei* $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

- $X$ *und* $Y = X^2$ *sind nicht unabhängig, sogar funktional abhängig*
- $X$ *und* $Y$ *sind unkorreliert, wegen*

  $$\mathbf{E}X = 0, \;\; cov(X,Y) = \mathbf{E}(X \cdot X^2) - \mathbf{E}X \cdot \mathbf{E}Y = \mathbf{E}X^3 = 0,$$

  *da* $X$ *symmetrisch ist.*

*Die Aussage gilt also für beliebige symmetrische Zufallsvariablen* $X$.