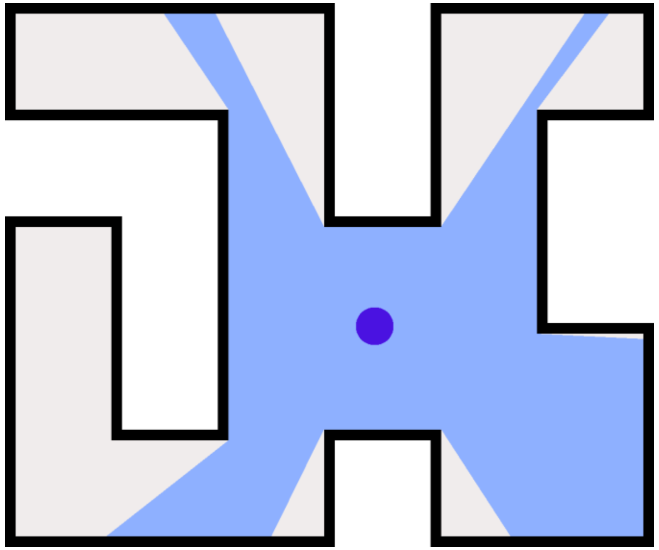
MUSEUMS WÄCHTER PROBLEM

SENOL SCHULZ,

04.12.2023

PROBLEMSTELLUNG

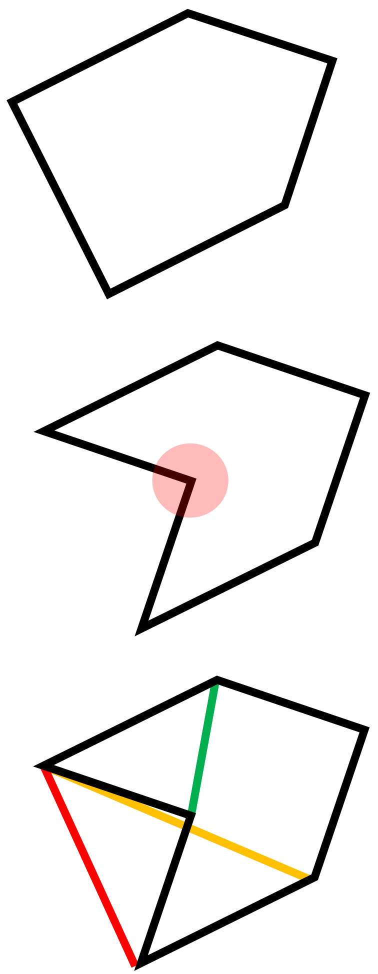


■ Wände ● Wächter ■ Sichtfeld

- Gegeben: Die Wände eines Museums als n-seitiges Polygon
- Gesucht: Die minimale Anzahl an stationären sich drehenden Wächtern, um alle Punkte des Museums zu überwachen

GRUNDLAGEN: POLYGONE

- Konvex: alle Innenwinkel < 180°
- Konkav: Mindestens 1 Innenwinkel > 180°
- Diagonale: Verbindungsstrecke nicht benachbarter Ecken
  (vollständig innen) (vollständig außen)

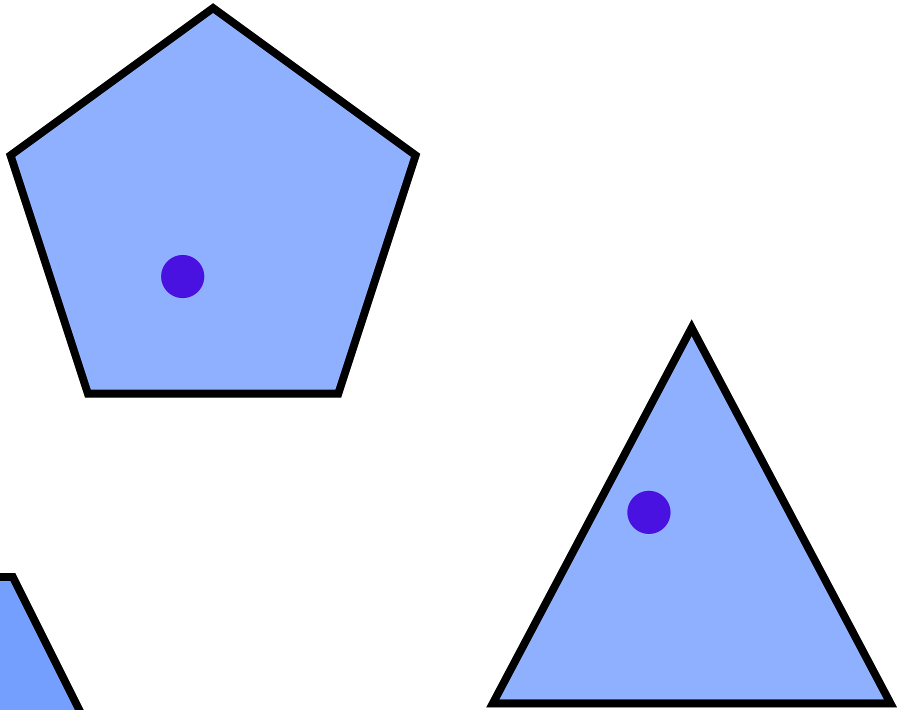


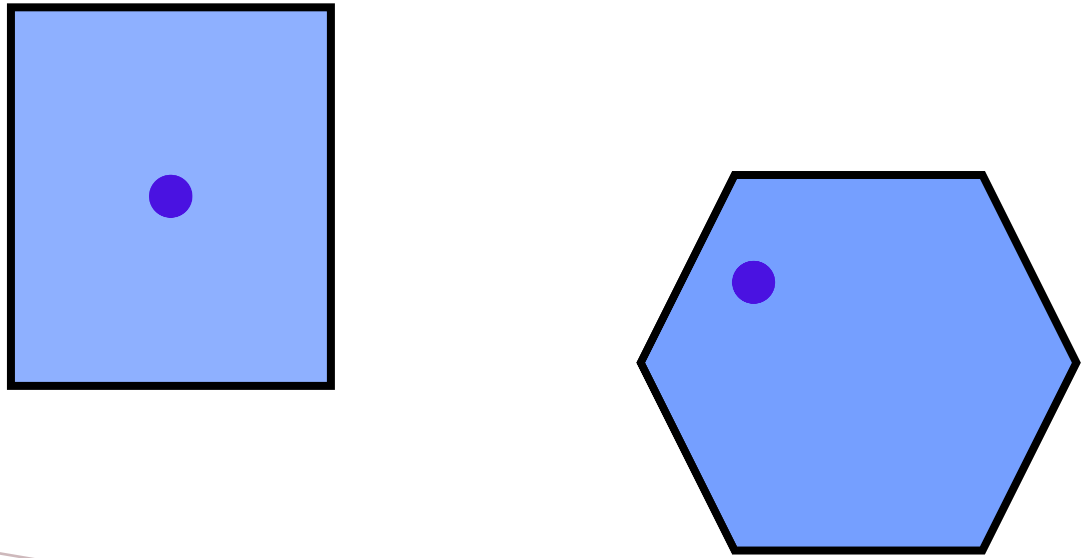
GRUNDLAGEN: POLYGONE

- Innenwinkelsumme $= (n-2) \cdot 180° \Rightarrow$ mindestens 3 konvexe Ecken
- Angenommen 0 konvexe Ecken
  - $Innenwinkelsumme > n \cdot 180° > (n-2) \cdot 180°$ ↯
- Angenommen 1 konvexe Ecken
  - $Innenwinkelsumme > (n-1) \cdot 180° > (n-2) \cdot 180$ ↯
- Angenommen 2 konvexe Ecken
  - $Innenwinkelsumme > (n\ -2) \cdot 180°$ ↯
- Angeommen 3 konvexe Ecken
  - $Innenwinkelsumme > (n-3) \cdot 180° < (n-2) \cdot 180°$

VORBETRACHTUNG: KONVEXE POLYGONE

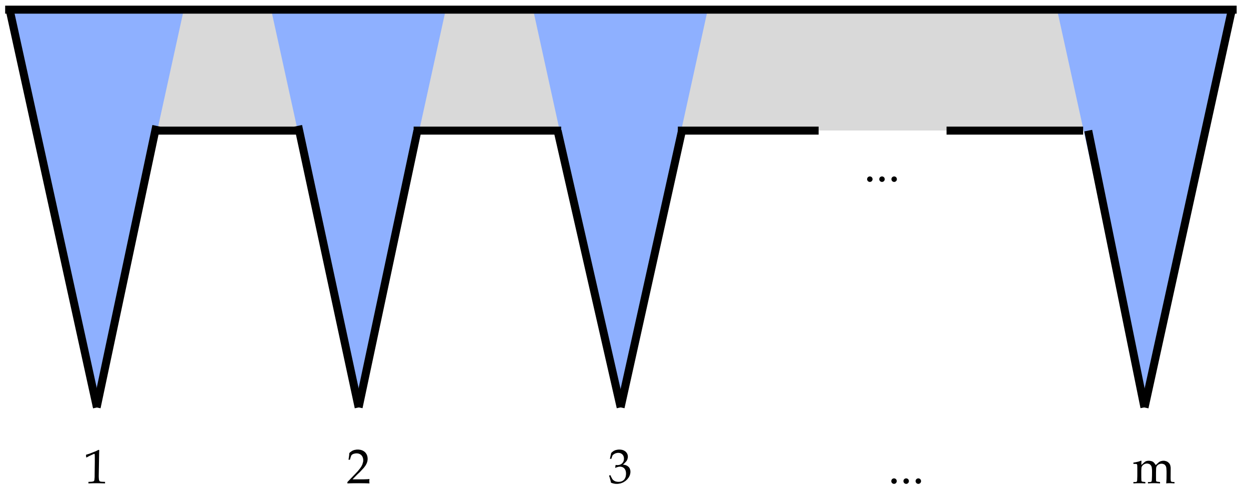
- Ein Wächter genügt
- Position ist irrelevant





KAMM MUSEEN

- Museum mit $n = 3m$ Wänden
- Mindestens $m = \frac{n}{3}$ Wächter



SATZ

- Für jedes Museum mit **n** Wänden reichen $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ Wächter aus

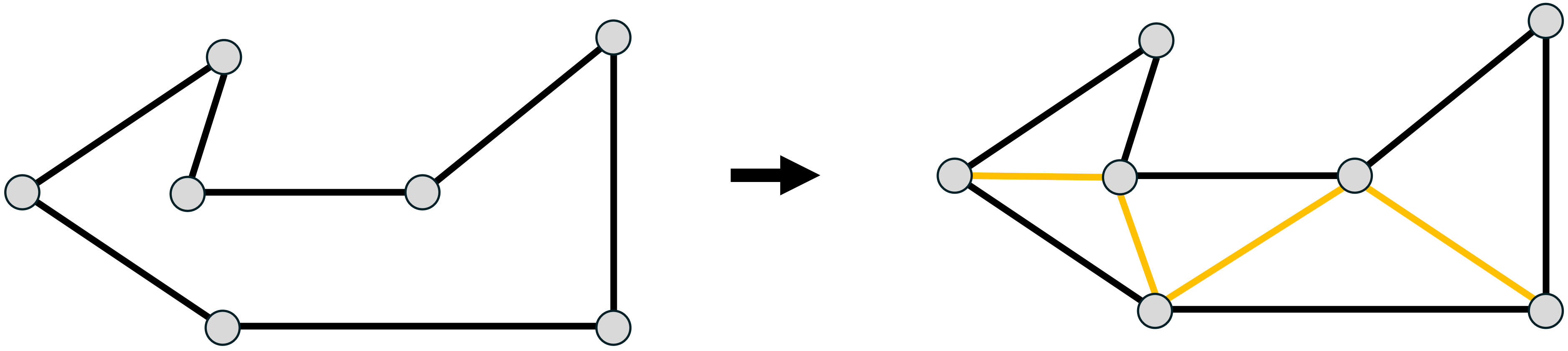
BEWEIS: ÜBERSICHT

1. Aufteilen des Polygons in Dreiecke
2. Einfärben der Ecken
3. Wählen der besten Farbe

BEWEIS TEIL 1: TRIANGULIERUNG

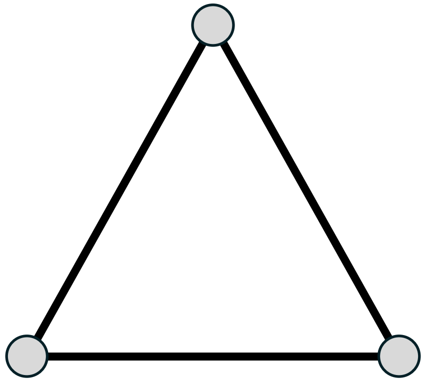
TRIANGULIERUNG: BEHAUPTUNG

- Aufteilung des Polygons in Dreiecke durch $n - 3$ Diagonalen
- Es entstehen $n - 2$ Dreiecke
- Behauptung: Das Museumspolygon lässt sich Triangulieren



TRIANGULIERUNG: INDUKTIONSANFANG

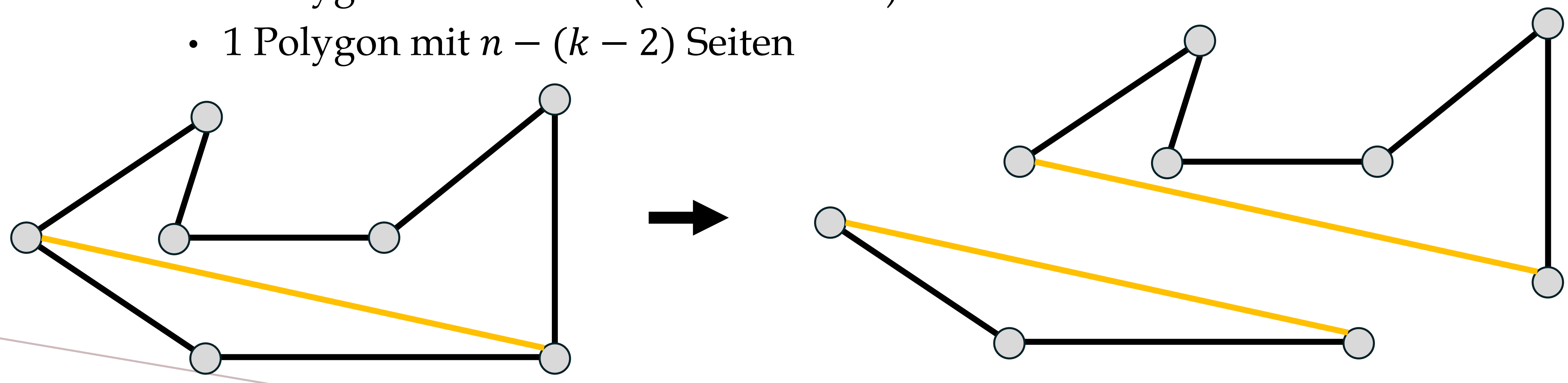
- Induktionsanfang: $n = 3$



- 0 $(= n - 3)$ Diagonalen
- 1 $(= n - 2)$ Dreiecke

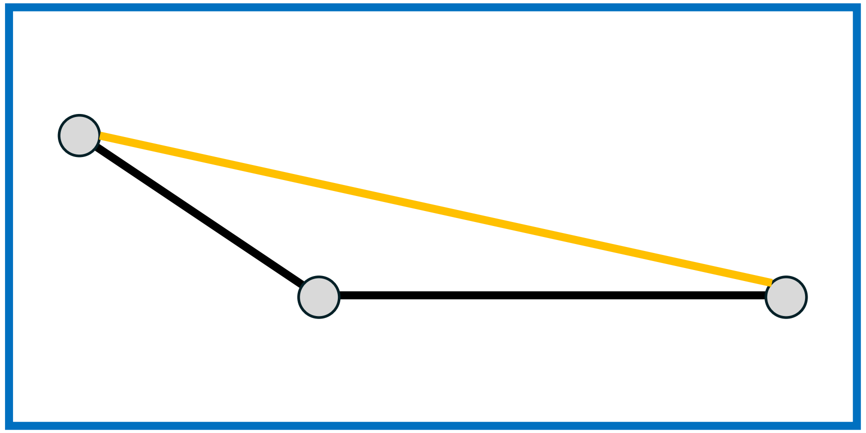
TRIANGULIERUNG: INDUKTIONSSCHRITT

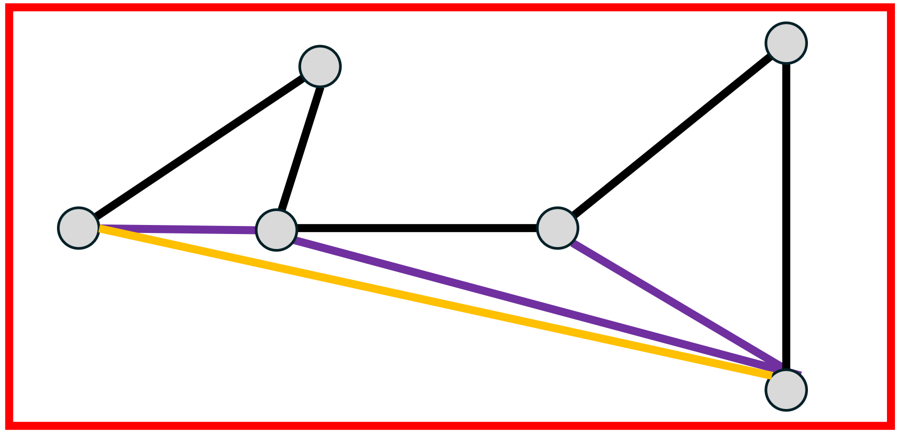
- $n \geq 4$
- Wählen einer vollständig inneren Diagonale
- Aufteilen an der Diagonale in
  - 1 Polygon mit k Seiten $(3 \leq k \leq n-3)$
  - 1 Polygon mit $n-(k-2)$ Seiten



TRIANGULIERUNG: INDUKTIONSSCHRITT

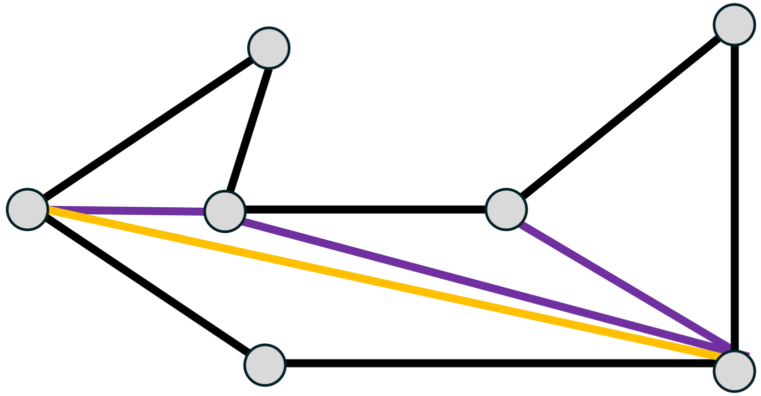
- Induktionsvorraussetzung ⇒ beide Teilpolygone lassen sich Triangulieren
- Es entstehen $(k-3)+(n-(k-2)-3)=(n-3)\ -1$ Diagonalen
- Es entstehen $(k-2)+(n-(k-2)-2)=n\ -2$ Dreiecke





TRIANGULIERUNG: INDUKTIONSSCHRITT

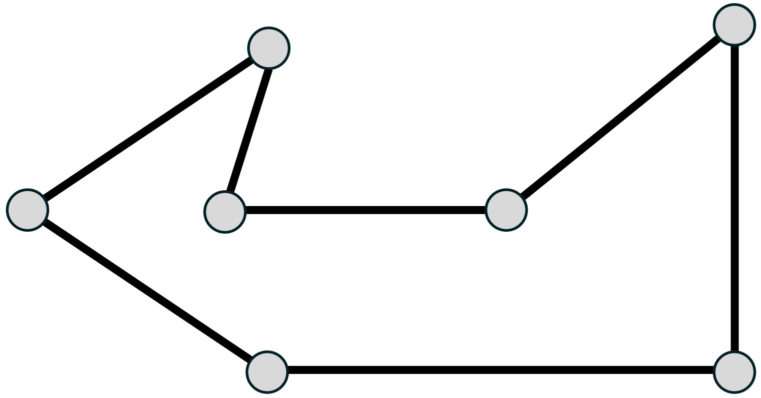
- Zusammenfügung der Triangulationen
- $(n-3)-1+1$ Diagonalen
- $(n-2)$ Dreiecke



- Gibt es immer eine Diagonale die vollständig innerhalb ist?

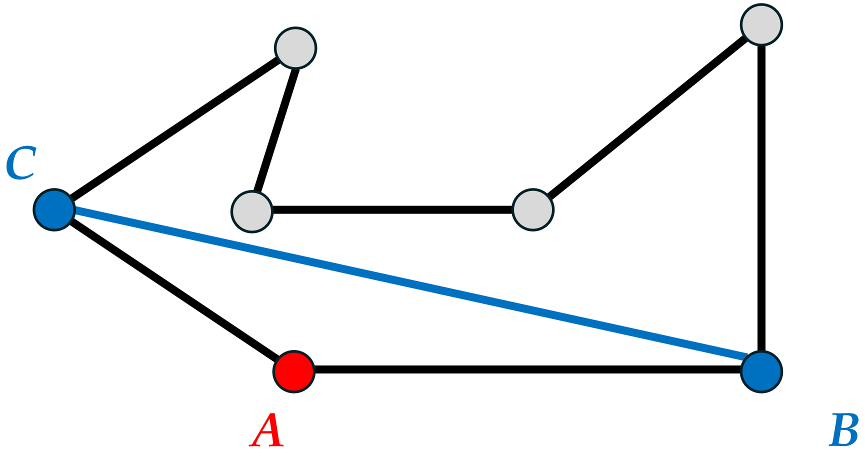
TRIANGULIERUNG: DIAGONALE ERMITTELN

- Wähle eine Konvexe Ecke A
- Betrachten der Nachbarn B C von A
- 2 Fälle



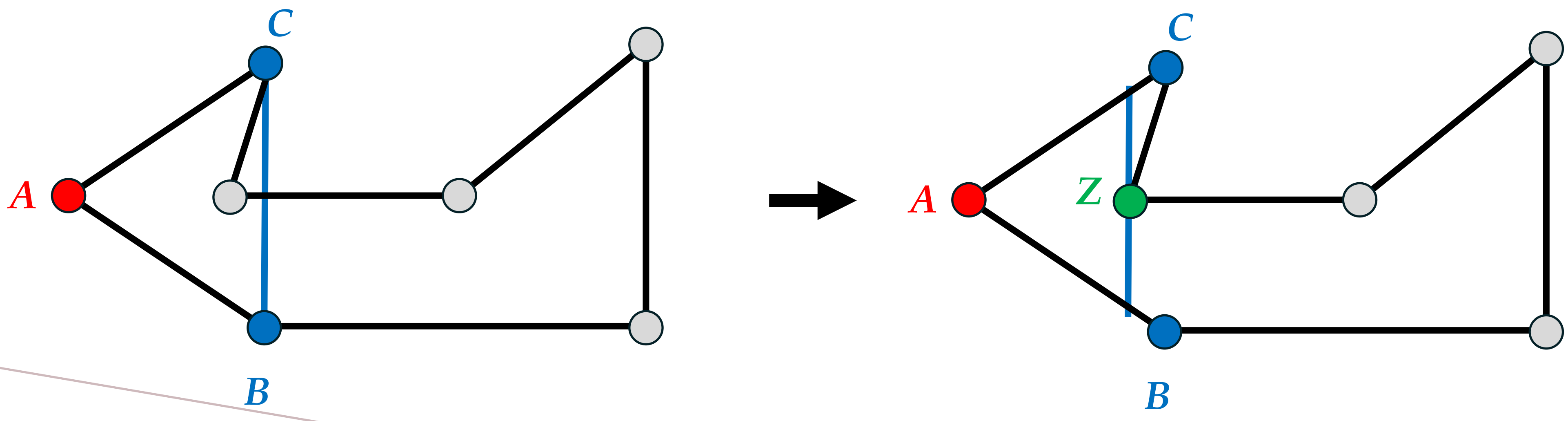
TRIANGULIERUNG: DIAGONALE ERMITTELN: 1. FALL

- 1. Fall: Strecke BC ist vollständig innerhalb
- Strecke BC ist die gesuchte Diagonale



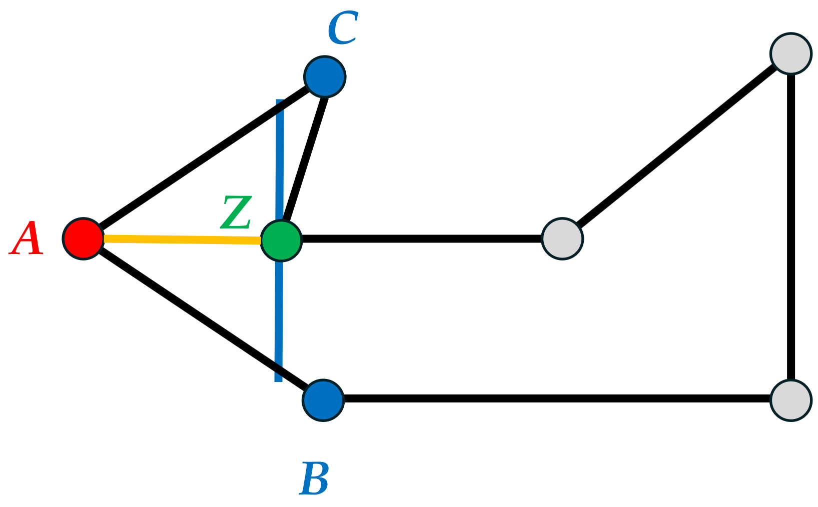
TRIANGULIERUNG: DIAGONALE ERMITTELN: 2. FALL

- 2. Fall: Strecke BC ist nicht vollständig innerhalb
  ⇒ Mindestens ein Punkt vom Polygon liegt innerhalb vom △ABC
- Verschiebung von BC Richtung A
- Bis letzter Punkt Z erreicht ist



TRIANGULIERUNG: DIAGONALE ERMITTELN: 2. FALL

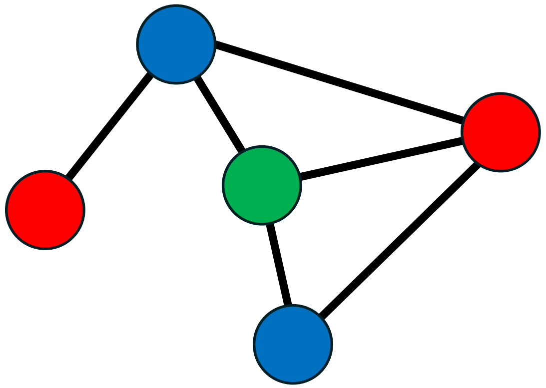
- Strecke AZ ist vollständig innerhalb vom Polygon
- Strecke AZ ist die gesuchte Diagonale



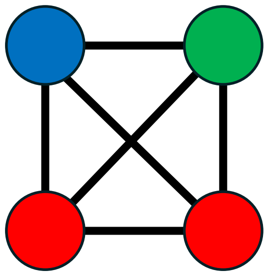
BEWEIS TEIL 2: 3-FÄRBBARKEIT

3-FÄRBBARKEIT: BEHAUPTUNG

- Färbung der Knoten eines Graphen
- Benachbarte Knoten unterschiedliche Farbe
- Behauptung: Das Triangulierte Museum ist 3-färbbar



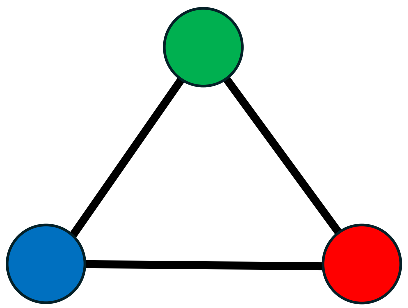
Bsp 3-Färbbar



Bsp nicht 3-Färbbar

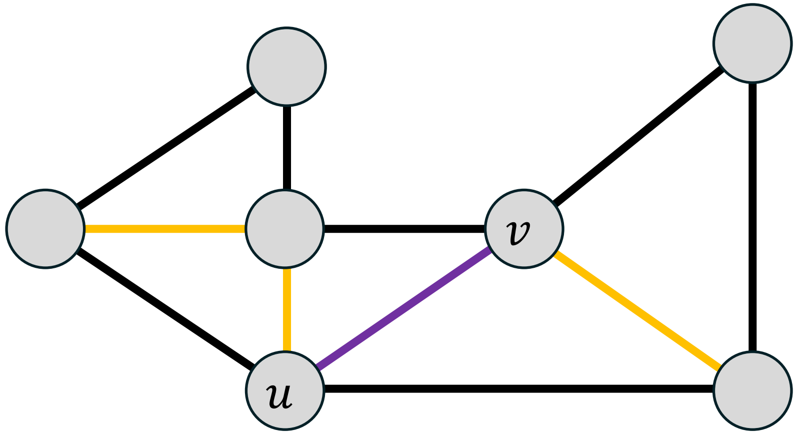
3-FÄRBBARKEIT: INDUKTIONSANFANG

- Induktionsanfang: n = 3



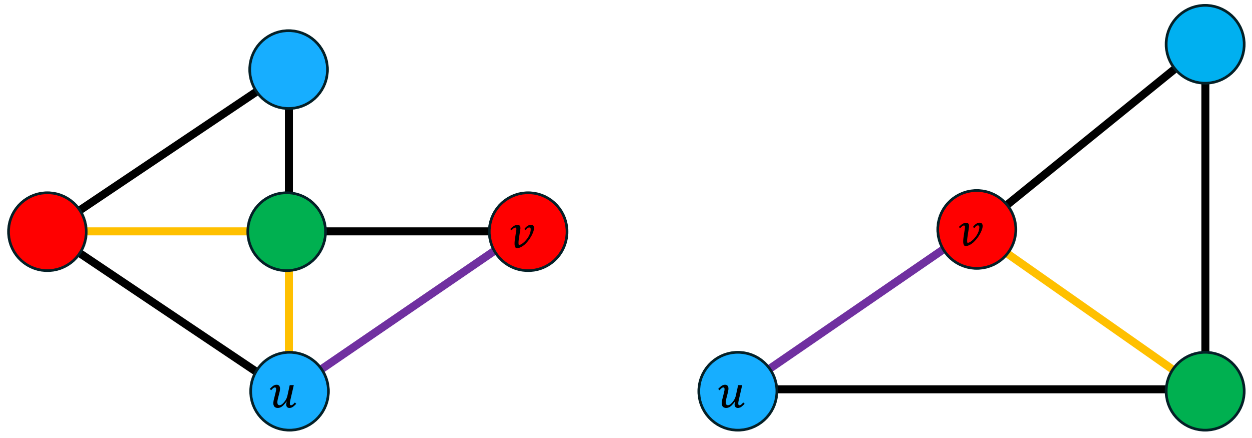
3-FÄRBBARKEIT: INDUKTIONSSCHRITT

- $n \geq 4$
- Auswählen einer beliebigen Diagonale uv



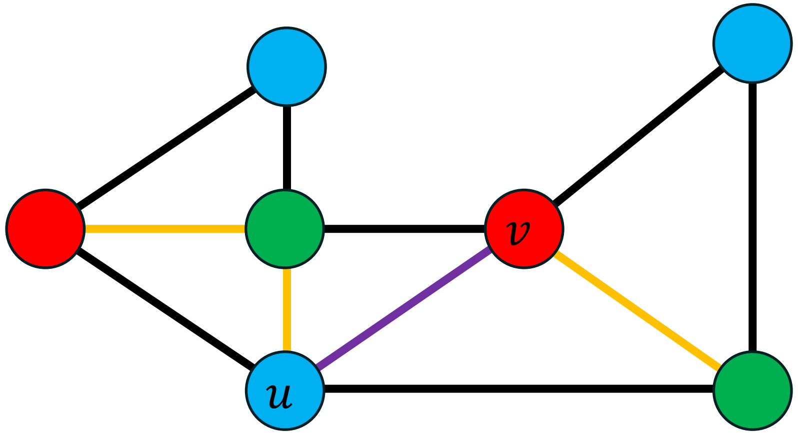
3-FÄRBBARKEIT: INDUKTIONSSCHRITT

- Aufteilen an uv
- Färben der Teilgraphen

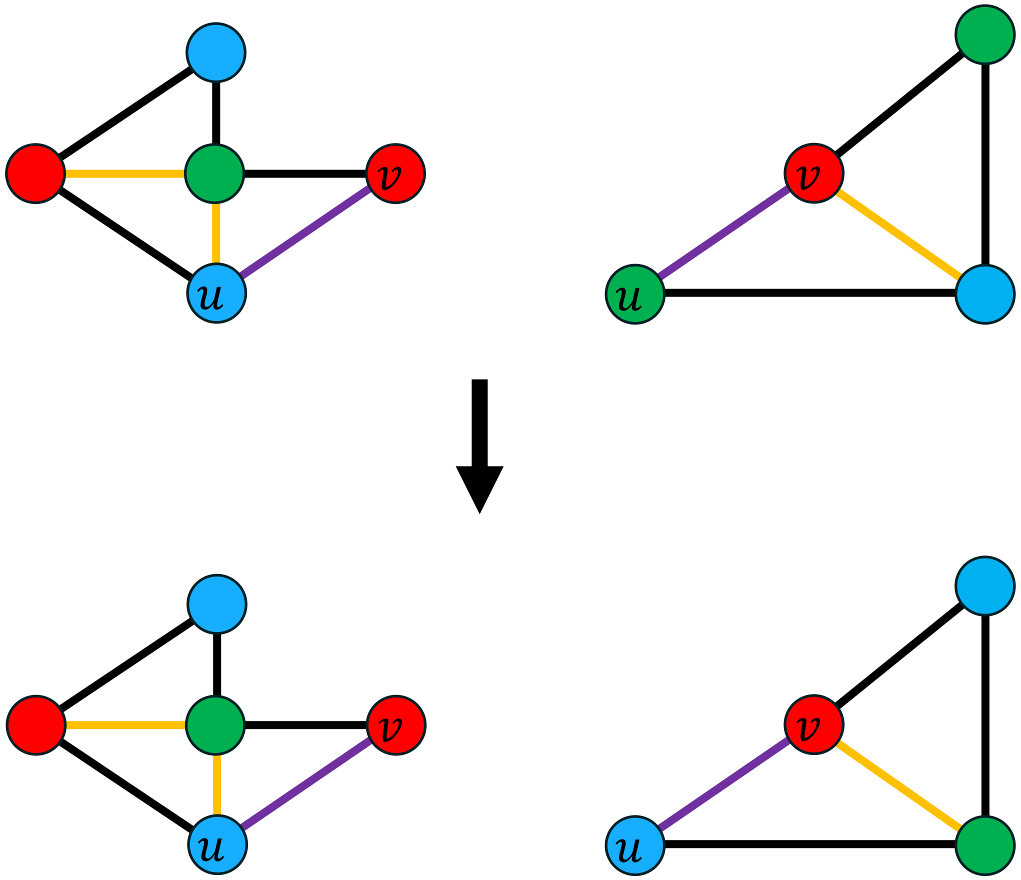


3-FÄRBBARKEIT: INDUKTIONSSCHRITT

- Zusammenfügen der Teilgraphen
- u und v jeweils gleiche Farbe in den Teilgraphen



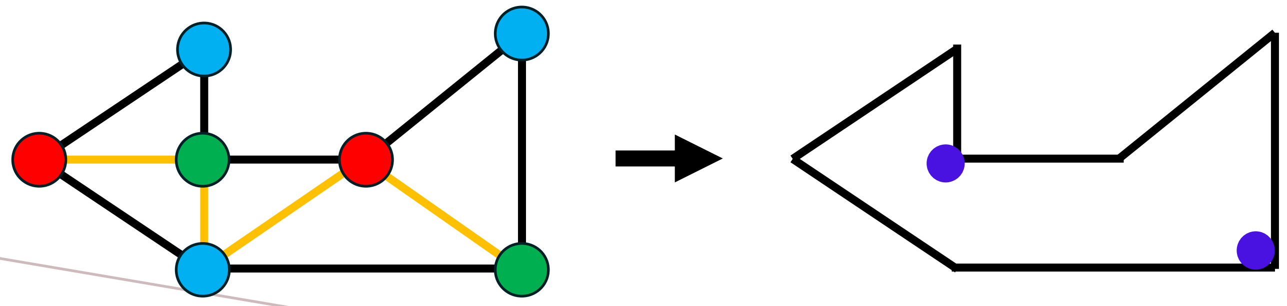
EINWURF: UMFÄRBEN (BEISPIEL)



BEWEIS TEIL 3

BEWEIS TEIL 3

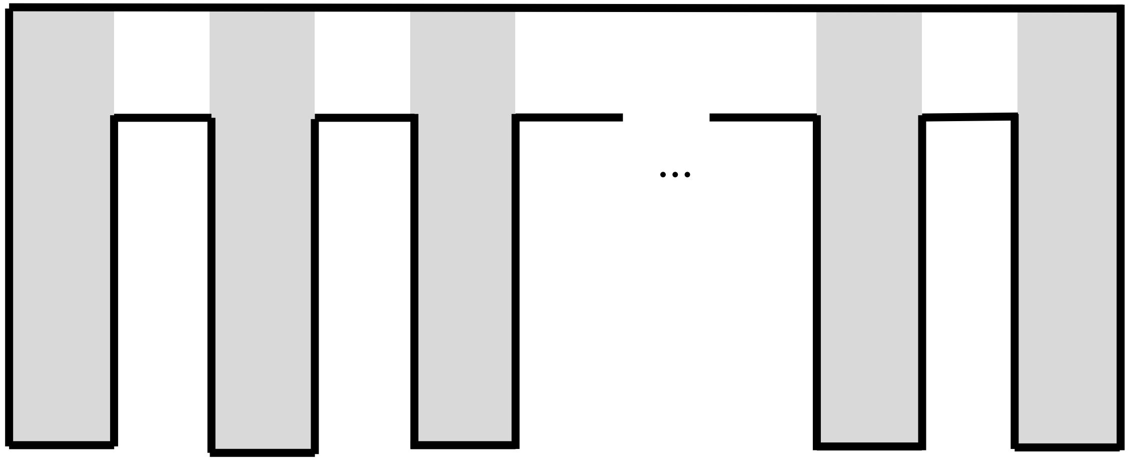
- Gegeben das triangulierte und gefärbte Museum
- Wähle Farbe F mit den wenigsten Knoten
  - 3 Farben ⇒ Anzahl Knoten mit $F \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$
- Platziere an jedem Knoten der Farbe F einen Wächter
  - Jedes Dreieck hat jede Farbe einmal
    ⇒ Ein Wächter in jedem Dreieck
    ⇒ Jedes Dreieck wird vollständig überwacht (da Dreieck konvex)



VARIATIONEN

ORTHOGONALE POLYGONE

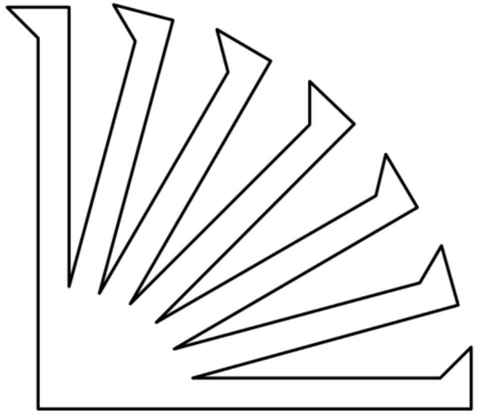
- Polygone, die ausschließlich 90° oder 270° Innenwinkel haben
- Im allgemeinen genügen $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ Wächter
- Beweis Analog, Quadrilaterationen statt Triangulation
- Kamm Äquivalent



BEWEGLICHE WÄCHTER

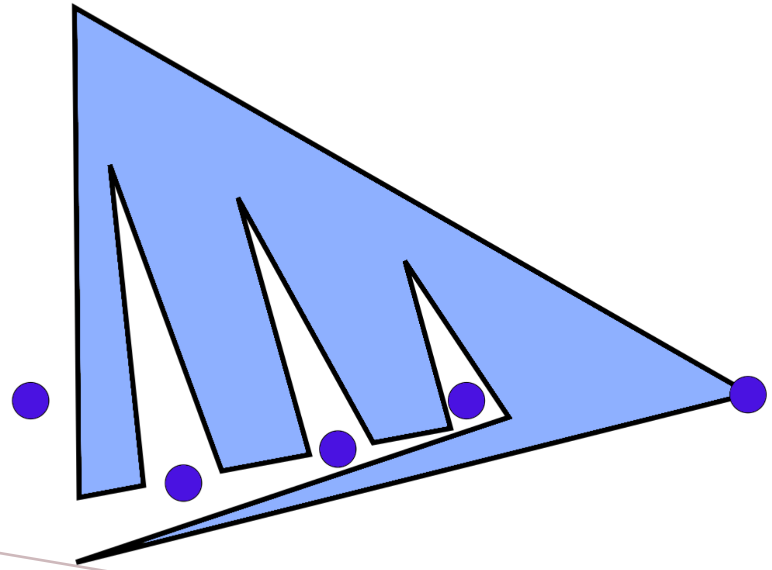
- „Nehmen wir an, dass jeder Wächter an einer Wand des Museums entlang läuft, und alles überwacht, was von irgendeinem Punkt der Wand aus zu sehen ist. Wie viele solche "Wandwächter" brauchen wir, um das gesamte Museum zu überwachen?“

- Godfried Toussaints Beispiel, dass $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ Wächter nötig sein könnten
- Kein Beweis, dass es für alle reicht

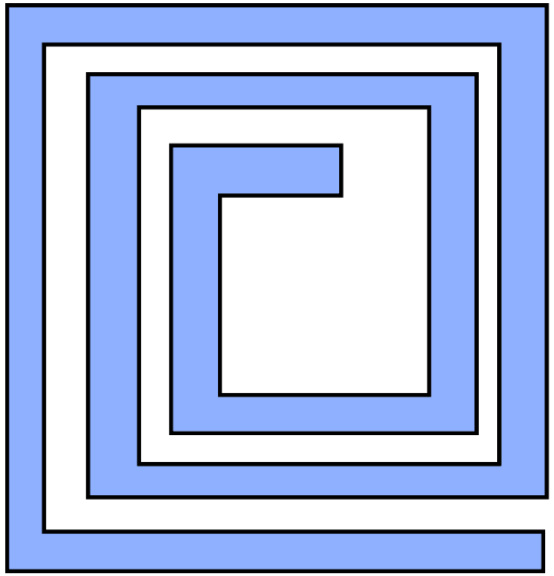


FESTUNGSPROBLEM

- Bewachung Außerhalb des Polynoms
- Im allgemeinen genügen $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ Wächter ($\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$ + 1 für Orthogonal)



n = 13, 5 benötigte Wächter



n = 24, 7 benötigte Wächter

QUELLEN

- Das Buch der Beweise 3. aufl 2010 / Martin Aigner ; Günter M. Ziegler.
- https://de.wikipedia.org/wiki/Problem der Museumsw¨achter
- https://en.wikipedia.org/wiki/Polygon
  - Zuletzt aufgerufen 02.12.2023
- https://de.wikipedia.org/wiki/Färbung_(Graphentheorie)
  - Zuletzt aufgerufen 02.12.2023