Der Fundamentalsatz der Algebra

Motivation

- Wir betrachten Polynomfunktionen $\mathrm{p}(\mathrm{x}) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ mit $n \geq 1, a_n \neq 0, a_k \in \mathbb{R}$
- Für viele Anwendungen sind Nullstellen interessant (z.B. Extremwertprobleme)
- Vielzahl an Methoden (Mitternachtsformel/pq-Formel, Polynomdivision, Satz vom Nullprodukt, …)

- Beispielfunktion: $f(x) = 2x^2 - 8x$

$2x^2 - 8x = 0 \mid \div 2$

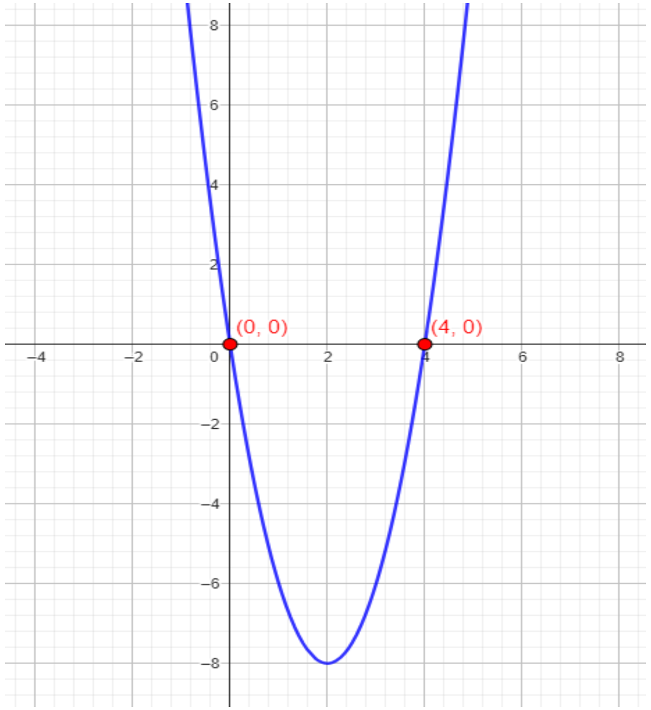
$x^2 \; - 4x = 0$

pq-Formel:

$x_{1,2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 0} = 2 \pm 2$

$x_1 = 0$

$x_2 = 4$



Motivation

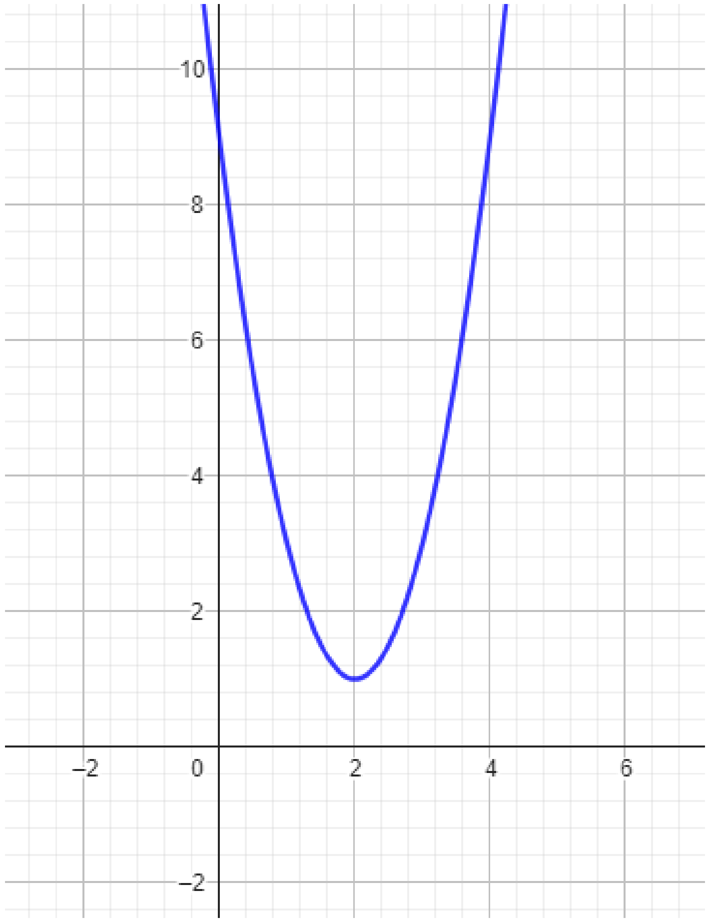
- ABER: Die Nullstellen verschwinden durch ein wenig Verschieben
- Beispielfunktion: $g(x) = f(x) + 9 = 2x^2 - 8x + 9$

$2x^2 - 8x + 9 = 0 \mid \div 2$

$x^2 - 4x + \frac{9}{2} = 0$

pq-Formel:

$x_{1,2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}} = 2 \pm \sqrt{-\frac{1}{2}}$



Motivation

- Lösung: Komplexe Zahlen!
- Wir betrachten ab jetzt also Polynomfunktionen $\mathrm{p(x)} = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ mit $n \geq 1, c_n \neq 0, c_k \in \mathbb{C}$
- Nochmal die Beispielfunktion: $g(x) = 2x^2 - 8x + 9$

$2x^2 - 8x + 9 = 0 \mid \div 2$

$x^2 - 4x + \frac{9}{2} = 0$

pq-Formel:

$x_{1,2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}} = 2 \pm \sqrt{-\frac{1}{2}} = 2 \pm \frac{i}{4}$

$x_1 = 2 + \frac{i}{4}$

$x_2 = 2 - \frac{i}{4}$

Der Fundamentalsatz der Algebra

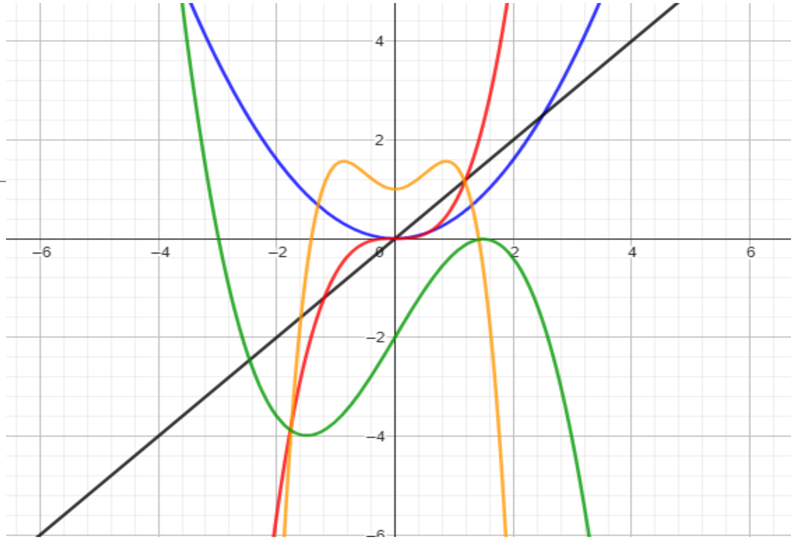
Jedes nichtkonstante Polynom mit komplexen Koeffizienten besitzt mindestens eine komplexe Nullstelle

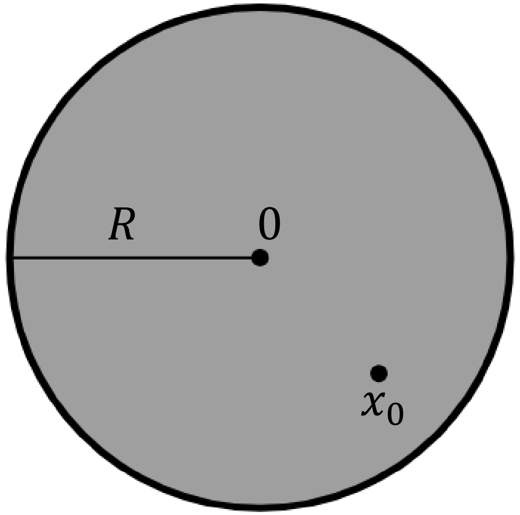
„Es ist angemerkt worden, dass der sogenannte ‚Fundamentalsatz der Algebra' nicht wirklich fundamental ist, dass er nicht unbedingt ein Satz ist, sondern manchmal als Definition dient und dass er in der klassischen Form eigentlich kein Resultat aus der Algebra, sondern aus der Analysis ist." (M. Aigner, G. M. Ziegler: Das BUCH der Beweise, 3. Auflage)

Beweisidee

- Der Betrag des Polynoms strebt gegen unendlich
- Somit gibt es einen Kreis mit Radius $R > 0$ um die 0 mit $|p(x)| > |p(0)|$
- Nun definiert man eine Scheibe S durch diesen Kreis
- S ist eine kompakte Menge und die reellwertige, stetige Funktion $|p(x)|$ hat auf dieser somit ein Minimum in einem Punkt x_0 im Inneren der Scheibe
- **D'Alemberts Lemma:**

  Falls $p(x) \neq 0$ ist, dann gibt es um x_0 eine Stelle, deren Funktionswert einen kleineren Betrag hat
- Widerspruch, da $|p(x)|$ in x_0 ein Minimum hat
- Also gilt $p(x) = 0$ und es existiert eine Nullstelle





Beweis

- Sei $\mathrm{p}(\mathrm{x}) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ ein komplexes Polynom vom Grad $n \geq 1$
- Als wichtigsten Schritt müssen wir zunächst folgendes Hilfslemma beweisen

D‘Alemberts Lemma / Argands Ungleichung

Ist $p(a) \neq 0$, so enthält jede Scheibe D um a im Inneren einen Punkt b mit $|p(b)| < |p(a)|$

Beweis

- Sei $\mathrm{p(x)} = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ ein komplexes Polynom vom Grad $n \geq 1$
- Als wichtigsten Schritt müssen wir zunächst folgendes Hilfslemma beweisen

D'Alemberts Lemma / Argands Ungleichung

Ist $p(a) \neq 0$, so enthält jede Scheibe D um a im Inneren einen Punkt b mit $|p(b)| < |p(a)|$

- Sei dazu D eine beliebige Scheibe um a mit Radius $R > 0$
- Dann haben alle Punkte im Inneren von D die Form $a + w$ mit $|w| < R$
- Erstes Ziel: $\boldsymbol{p(a+w) = p(a) + cw^m(1 + r(w))}$
  für ein $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, 1 \leq m \leq n$ und ein Polynom $r(w)$ vom Grad $n - m$ mit $r(0) = 0$

D'Alemberts Lemma / Argands Ungleichung

Ist $p(a) \neq 0$, so enthält jede Scheibe D um a im Inneren einen Punkt b mit $|p(b)| < |p(a)|$

Z.z.: $\boldsymbol{p(a+w) = p(a) + cw^m(1 + r(w))}$

für ein $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, 1 \leq m \leq n$ und ein Polynom $r(w)$ vom Grad $n - m$ mit $r(0) = 0$

$$p(a+w) = \sum_{k=0}^{n} c_k (a+w)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} c_k \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^{k-i} w^i$$

$$= c_0 \binom{0}{0} a^0 w^0 + c_1 \binom{1}{0} a^1 w^0 + c_1 \binom{1}{1} a^0 w^1 + c_2 \binom{2}{0} a^2 w^0 + c_2 \binom{2}{1} a^1 w^1 + c_2 \binom{2}{2} a^0 w^2 + \cdots + c_n \binom{n}{0} a^n w^0 + \cdots + c_n \binom{n}{n} a^0 w^n$$

$$= \left(c_0 \binom{0}{0} a^0 + c_1 \binom{1}{0} a^1 + c_2 \binom{2}{0} a^2 + \cdots + c_n \binom{n}{0} a^n\right) w^0 + \left(c_1 \binom{1}{1} a^0 + c_2 \binom{2}{1} a^1 + \cdots + c_n \binom{n}{1} a^{n-1}\right) w^1 + \cdots + c_n \binom{n}{n} a^0 w^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=i}^{n} c_k \binom{k}{i} a^{k-i}\right) w^i$$

$$= p(a) + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=i}^{n} c_k \binom{k}{i} a^{k-i}\right) w^i$$

$$= p(a) + \sum_{i=1}^{n} d_i w^i$$

D'Alemberts Lemma / Argands Ungleichung

Ist $p(a) \neq 0$, so enthält jede Scheibe D um a im Inneren einen Punkt b mit $|p(b)| < |p(a)|$

Z.z.: $\boldsymbol{p(a+w) = p(a) + cw^m(1 + r(w))}$
für ein $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, 1 \leq m \leq n$ und ein Polynom $r(w)$ vom Grad $n - m$ mit $r(0) = 0$

- $p(a+w) = p(a) + \sum_{i=1}^{n} d_i w^i$
- Sei $m \geq 1$ der kleinste Index i, für den $d_i \neq 0$ ist
- Wir setzen c $\coloneqq d_m$ und klammern cw^m aus
- $p(a+w) = p(a) + cw^m\left(1 + \frac{d_{m+1}}{c} w^1 + \frac{d_{m+2}}{c} w^2 + \cdots + \frac{d_n}{c} w^{n-m}\right)$
- Setze $r(w) \coloneqq \frac{d_{m+1}}{c} w^1 + \frac{d_{m+2}}{c} w^2 + \cdots + \frac{d_n}{c} w^{n-m}$
- $p(a+w) = p(a) + cw^m(1 + r(w))$

D'Alemberts Lemma / Argands Ungleichung

Ist $p(a) \neq 0$, so enthält jede Scheibe D um a im Inneren einen Punkt b mit $|p(b)| < |p(a)|$

Nächstes Ziel: $|\boldsymbol{cw^m}|$ **und** $|\boldsymbol{r(w)}|$ **nach oben abschätzen**

- Sei $\rho_1 := \sqrt[m]{\left|\frac{p(a)}{c}\right|}$
- Für $|w| < \rho_1$ gilt dann:

  $$|cw^m| < |p(a)|$$

- Da $r(w)$ stetig und $r(0) = 0$ ist, gilt nach Definition der Stetigkeit:

  $$\exists \rho_2 \colon |r(w)| < 1 \text{ für } |w| < \rho_2$$

- Für $|w| < \rho := \min(\rho_1, \rho_2)$ gilt also insgesamt:

  $$\boldsymbol{|cw^m| < |p(a)|} \textbf{ und } \boldsymbol{|r(w)| < 1}$$

D‘Alemberts Lemma / Argands Ungleichung

Ist $p(a) \neq 0$, so enthält jede Scheibe D um a im Inneren einen Punkt b mit $|p(b)| < |p(a)|$

- Wir definieren nun ζ als eine m-te Wurzel von $-\frac{p(a)/c}{|p(a)/c|}$
- Dann ist ζ eine komplexe Zahl mit $|\zeta| = 1$
- Sei zudem $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $0 < \varepsilon < \min(\rho, R)$
- Wir setzen $w_0 \coloneqq \epsilon\zeta$

Behauptung: $\boldsymbol{b \coloneqq a + w_0}$ ist der gesuchte Punkt mit $\boldsymbol{|p(b)| < |p(a)|}$

D'Alemberts Lemma / Argands Ungleichung

Ist $p(a) \neq 0$, so enthält jede Scheibe D um a im Inneren einen Punkt b mit $|p(b)| < |p(a)|$

Behauptung: $\boldsymbol{b \coloneqq a + w_0 = a + \varepsilon\zeta}$ **ist der gesuchte Punkt mit** $\boldsymbol{|p(b)| < |p(a)|}$

mit $\zeta \coloneqq \sqrt[m]{-\frac{p(a)/c}{|p(a)/c|}}$ und $0 < \varepsilon < \min(\rho, R)$.

- b ist in der Scheibe D um a enthalten, da $|w_0| = \varepsilon < R$

- Wir definieren einen Faktor δ:

$$c{w_0}^m = c(\varepsilon\zeta)^m = c\varepsilon^m\zeta^m = c\varepsilon^m\left(-\frac{\frac{p(a)}{c}}{\left|\frac{p(a)}{c}\right|}\right) = -\frac{\varepsilon^m}{|p(a)/c|}p(a) = -\delta p(a) \text{ also } \delta \coloneqq \frac{\varepsilon^m}{|p(a)/c|}$$

- Wegen $|cw^m| < p(a)$ gilt für diesen Faktor:

$$0 < \delta < 1$$

D'Alemberts Lemma / Argands Ungleichung

Ist $p(a) \neq 0$, so enthält jede Scheibe D um a im Inneren einen Punkt b mit $|p(b)| < |p(a)|$

Behauptung: $\boldsymbol{b} \coloneqq \boldsymbol{a} + \boldsymbol{w_0} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{\varepsilon\zeta}$ **ist der gesuchte Punkt mit** $|\boldsymbol{p}(\boldsymbol{b})| < |\boldsymbol{p}(\boldsymbol{a})|$

mit $\zeta \coloneqq \sqrt[m]{-\frac{p(a)/c}{|p(a)/c|}}$ und $0 < \varepsilon < \min(\rho, R)$. Sei $\delta \coloneqq \frac{\varepsilon^m}{|p(a)/c|}$ mit $0 < \delta < 1$

$$|\boldsymbol{p}(\boldsymbol{b})| = |p(a + w_0)| = |p(a) + c{w_0}^m(1 + r(w_0))|$$

$$= |p(a) - \delta p(a)(1 + r(w_0))| = |p(a) - \delta p(a) - \delta p(a) r(w_0)|$$

$$= |(1 - \delta)p(a) - \delta p(a) r(w_0)| \leq (1 - \delta)|p(a)| + \delta|p(a)||r(w_0)|$$

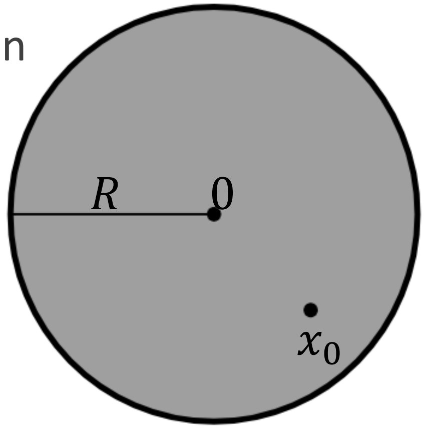
$$< (1 - \delta)|p(a)| + \delta|p(a)|$$

$$= |p(a)| - \delta|p(a)| + \delta|p(a)| = |\boldsymbol{p}(\boldsymbol{a})| \qquad \square$$

Beweis

- Sei $\mathrm{p(x)} = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ ein komplexes Polynom vom Grad $n \geq 1$
- $p(x)x^{-n} = c_0 \frac{x^0}{x^n} + c_1 \frac{x^1}{x^n} + c_2 \frac{x^2}{x^n} + \cdots + +c_{n-1} \frac{x^{n-1}}{x^n} + c_n \frac{x^n}{x^n} = \frac{c_0}{x^n} + \frac{c_1}{x^{n-1}} + \frac{c_2}{x^{n-2}} + \cdots + \frac{c_{n-1}}{x} + c_n \xrightarrow[x\to\infty]{} c_n$
- Es folgt: $|p(x)| = |p(x)x^{-n}x^n| = |p(x)x^{-n}||x^n| \xrightarrow[|x|\to\infty]{} \infty$

- Es existiert folglich ein $R > 0$, sodass für alle Punkte auf dem Kreis $K \coloneqq \{x : |x| = R\}$ gilt: $|p(x)| > |p(0)|$
- Wir definieren die kompakte Menge S$\coloneqq \{x : |x| \leq R\}$
- Auf S nimmt die stetige, reellwertige Funktion $|p(x)|$ ein Minimum in einem Punkt x_0 an
- Nach Definition von K muss dieses x_0 im Inneren von S liegen



Beweis

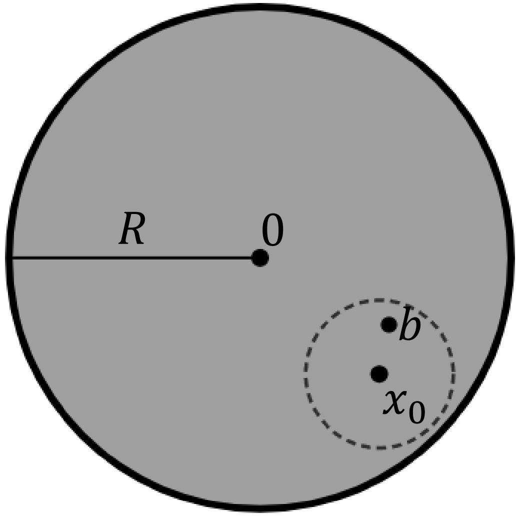
- Nun wenden wir auf dieses Minimum in $x_0$das Hilfslemma an

D'Alemberts Lemma / Argands Ungleichung

Ist $p(a) \neq 0$, so enthält jede Scheibe D um a im Inneren einen Punkt b mit $|p(b)| < |p(a)|$

- Angenommen es gilt $p(x_0) \neq 0$
- $\Longrightarrow \forall R_1 > 0\ \exists b \in Int(\{x : \ |x - x_0| \leq R_1\})\colon\ |p(b)| < |p(x_0)|$
- Wähle $R_1 < R - |x_0|$
- Dann ist dieses $b \in S$ und es gilt $|p(b)| < |p(x_0)|$
- Das ist ein Widerspruch dazu, dass $|p(x)|$ in x_0 ein Minimum einnimmt

- Somit muss $\boldsymbol{p(x_0) = 0}$ gelten und wir haben eine Nullstelle von $p(x)$ gefunden $\square$



Ende

Danke fürs Zuhören ☺

Quelle: Das BUCH der Beweise (M. Aigner, G. M. Ziegler, 3. Auflage)