Beweistechniken und aussagenlogische Modellierung

Übung **Logik in der Informatik**

HU Berlin

1. Übungsstunde

Programm für heute

Beweise

Der direkte Beweis

Beweis durch Kontraposition

Beweis durch Widerspruch

Aussagenlogische Modellierung

Programm für heute

Beweise

Der direkte Beweis

Beweis durch Kontraposition

Beweis durch Widerspruch

Aussagenlogische Modellierung

Was darf in einem Beweis verwendet werden?

- die Voraussetzungen des Satzes
- Definitionen und bereits bekannte Tatsachen und Sätze
- im Beweis selbst oder anderswo bereits als wahr bewiesene Aussagen
- logische Schlussregeln

Und was ist verboten?

- unzulässiges Argumentieren mit Beispielen
- Verwendung gleicher Symbole zur Bezeichnung verschiedener Dinge
- Hantieren mit nicht exakt oder gar widersprüchlich definierten Begriffsbildungen
- unzulässige Gedankensprünge beim Schlussfolgern
- Ausnutzung von bis dahin noch unbewiesenen Behauptungen zur Begründung von einzelnen Beweisschritten

Hilfreiche Beweistechniken

- direkter Beweis
- Beweis durch Kontraposition
- Beweis durch Widerspruch
- Beweis durch vollständige Induktion *(nächste Woche)*
  - ... über die natürlichen Zahlen
  - ... über rekursiv definierte Mengen

Programm für heute

Beweise

Der direkte Beweis

Beweis durch Kontraposition

Beweis durch Widerspruch

Aussagenlogische Modellierung

Direkter Beweis

Ansatz:
Die Behauptung “direkt” (d.h. “ohne Umwege”) bewiesen.

Direkter Beweis

Ansatz:
Die Behauptung “direkt” (d.h. “ohne Umwege”) bewiesen.

Behauptung 1:
Für alle Mengen M, N und P gilt:

$$(M \cup N) \ \cap \ P \ \ = \ \ (M \cap P) \ \cup \ (N \cap P)$$

Programm für heute

Beweise

Der direkte Beweis

Beweis durch Kontraposition

Beweis durch Widerspruch

Aussagenlogische Modellierung

Beweis durch Kontraposition

Seien V und A beliebige Aussagen. Dann gilt:

“Falls V gilt, so auch A” ist wahr.

$\iff$ “A gilt oder V gilt nicht” ist wahr.

$\iff$ “Falls A <u>nicht</u> gilt, so gilt auch V <u>nicht</u>” ist wahr.

Ansatz: Beweise einen Satz der Form

“Falls V gilt, so auch A.”

dadurch, zu zeigen dass folgendes gilt:

“Falls A <u>nicht</u> gilt, so kann auch V <u>nicht</u> gelten.”

Beweis durch Kontraposition

Seien V und A beliebige Aussagen. Dann gilt:

"Falls V gilt, so auch A" ist wahr.

$\Longleftrightarrow$ "A gilt oder V gilt nicht" ist wahr.

$\Longleftrightarrow$ "Falls A <u>nicht</u> gilt, so gilt auch V <u>nicht</u>" ist wahr.

Ansatz: Beweise einen Satz der Form

"Falls V gilt, so auch A."

dadurch, zu zeigen dass folgendes gilt:

"Falls A <u>nicht</u> gilt, so kann auch V <u>nicht</u> gelten."

Behauptung: Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und seien $M_1, \ldots, M_n$ endliche Mengen. Dann gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$: Falls

$$|M_1| + \cdots + |M_n| \quad > \quad k,$$

so existiert eine Menge $M \in \{M_1, \ldots, M_n\}$ mit $|M| > \frac{k}{n}$.

Programm für heute

- Beweise
- Der direkte Beweis
- Beweis durch Kontraposition
- Beweis durch Widerspruch
- Aussagenlogische Modellierung

Beweis durch Widerspruch

Ziel:

Beweise einen Satz der Form

> Falls die Voraussetzungen V erfüllt sind, so gilt auch Aussage A.

Ansatz:

1. Nimm an, dass die Voraussetzungen V erfüllt sind,
   jedoch die Aussage A <u>nicht</u> gilt.
2. Leite daraus einen Widerspruch her.

Beweis durch Widerspruch

Ziel:
Beweise einen Satz der Form

> Falls die Voraussetzungen V erfüllt sind, so gilt auch Aussage A.

Ansatz:

1. Nimm an, dass die Voraussetzungen V erfüllt sind,
   jedoch die Aussage A <u>nicht</u> gilt.
2. Leite daraus einen Widerspruch her.

Behauptung:
Für alle Mengen A, B und C mit $A = B \cup C$ gilt:
Falls A unendlich ist, so ist B oder C unendlich.

Programm für heute

Beweise

Der direkte Beweis

Beweis durch Kontraposition

Beweis durch Widerspruch

Aussagenlogische Modellierung

Aussagenlogische Modellierung (1)

Die Mensa versucht ständig, ihr Angebot an die Wünsche der Studierenden anzupassen. Die neueste Idee der Mensaleitung ist es, zu jeder Hauptmahlzeit ein Stück Brot, eine Suppe und/oder ein Dessert zu reichen. Um die beliebteste Kombination aus Brot, Suppe und/oder Dessert zu erfahren, startet die Mensaleitung eine Umfrage unter den Studierenden, die zu folgenden drei Anforderungen führt:

1. Wenn Suppe serviert wird, dann soll kein Dessert gereicht werden.
2. Es soll genau dann Brot oder Dessert geben, wenn auch Suppe serviert wird.
3. Falls Suppe aber kein Dessert gereicht wird, soll es kein Brot geben.

Aussagenlogische Modellierung (2)

1. Wenn Suppe serviert wird, dann soll kein Dessert gereicht werden.
2. Es soll genau dann Brot oder Dessert geben, wenn auch Suppe serviert wird.
3. Falls Suppe aber kein Dessert gereicht wird, soll es kein Brot geben.

(a) Geben Sie für jede der Anforderungen eine aussagenlogische Formel an, die die jeweiligen Anforderungen widerspiegelt.

Aussagenlogische Modellierung (2)

1. Wenn Suppe serviert wird, dann soll kein Dessert gereicht werden.
2. Es soll genau dann Brot oder Dessert geben, wenn auch Suppe serviert wird.
3. Falls Suppe aber kein Dessert gereicht wird, soll es kein Brot geben.

(a) Geben Sie für jede der Anforderungen eine aussagenlogische Formel an, die die jeweiligen Anforderungen widerspiegelt.

(b) Stellen Sie eine aussagenlogische Formel φ auf, die aussagt, dass alle Anforderungen gleichzeitig gelten sollen.

Aussagenlogische Modellierung (2)

1. Wenn Suppe serviert wird, dann soll kein Dessert gereicht werden.
2. Es soll genau dann Brot oder Dessert geben, wenn auch Suppe serviert wird.
3. Falls Suppe aber kein Dessert gereicht wird, soll es kein Brot geben.

(a) Geben Sie für jede der Anforderungen eine aussagenlogische Formel an, die die jeweiligen Anforderungen widerspiegelt.

(b) Stellen Sie eine aussagenlogische Formel φ auf, die aussagt, dass alle Anforderungen gleichzeitig gelten sollen.

(c) Geben Sie für die Formel φ eine Interpretation an, die besagt, dass es Dessert und Suppe, aber kein Brot gibt. Erfüllt diese Interpretation die Formel φ?

Aussagenlogische Modellierung (2)

1. Wenn Suppe serviert wird, dann soll kein Dessert gereicht werden.
2. Es soll genau dann Brot oder Dessert geben, wenn auch Suppe serviert wird.
3. Falls Suppe aber kein Dessert gereicht wird, soll es kein Brot geben.

(a) Geben Sie für jede der Anforderungen eine aussagenlogische Formel an, die die jeweiligen Anforderungen widerspiegelt.

(b) Stellen Sie eine aussagenlogische Formel φ auf, die aussagt, dass alle Anforderungen gleichzeitig gelten sollen.

(c) Geben Sie für die Formel φ eine Interpretation an, die besagt, dass es Dessert und Suppe, aber kein Brot gibt. Erfüllt diese Interpretation die Formel φ?

(d) Zeigen Sie anhand einer Wahrheitstafel, welche Kombinationen von Brot, Suppe und/oder Dessert allen Anforderungen gerecht werden!