Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

21. November 2019

Logik in der Informatik

Wintersemester 2019/2020

Übungsblatt 6

Abgabe: *bis 3. Dezember 2019, 11.[15] Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 3.401 und 3.402 im Johann von Neumann-Haus (Rudower Chaussee 25))*

Aufgabe 1: **(15 Punkte)**

(a) Geben Sie eine Resolutionswiderlegung für die Klauselmenge

$$\Gamma \ := \{ \ \{\neg R, S\}, \ \{\neg S, T\}, \ \{R, \neg T\}, \ \{R, S, T\}, \ \{\neg R, \neg S, \neg T\} \ \}$$

an, wobei R, S, T unterschiedliche Aussagensymbole aus AS sind. Gehen Sie dabei analog zu Beispiel 2.59 vor und wählen entweder die graphische Darstellung oder die Resolutionswiderlegung als Auflistung mit rechtsseitigen Begründungen.

(b) Welche Ausgabe liefert der Streichungsalgorithmus, wenn er als Eingabe die Klauselmenge Γ aus Teilaufgabe **(a)** bekommt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

(a) Formen Sie folgende Formel φ in eine passende Eingabeklauselmenge für den Streichungsalgorithmus um:

$$\varphi \ := \ R \wedge (\mathbf{0} \to T) \wedge (\mathbf{1} \to (P \vee \neg Q)) \wedge (S \to \mathbf{0}) \wedge ((R \wedge \neg S \wedge T) \to \neg W) \wedge (R \vee \neg T)$$

(b) Wenden Sie den Streichungsalgorithmus auf folgende Klauselmenge Γ an:

$$\Gamma \ := \Big\{ \{U\}, \ \{W\}, \ \{V, \neg W\}, \ \{S, \neg T\}, \ \{U, \neg V, \neg W\}, \\ \{\neg T, \neg V\}, \ \{S, \neg U, \neg V\}, \ \{\neg S, \neg T\} \Big\}$$

Erklären Sie wie in Beispiel 2.66 Schritt für Schritt, wie der Algorithmus vorgeht. Wenn der Streichungsalgorithmus mehrere Tatsachenklauseln zur Auswahl hat, dann wählen Sie bitte die Tatsachenklausel mit dem in alphabetischer Ordnung kleinsten Literal.

(c) **(i)** Geben Sie eine Formel $\varphi \in \mathsf{AL}$ an, die zu keiner Hornformel äquivalent ist.

(ii) Gibt es eine Formel in AL, die zu keiner Hornformel erfüllbarkeitsäquivalent ist?

Beweisen Sie jeweils, dass Ihre Antwort korrekt ist.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Aufgabe 3: **(35 Punkte)**

(a) Betrachten Sie die Relation $R := \{(a, b), (a, d), (b, c), (c, d), (d, a), (d, b), (e, e)\}$ über der Menge $A := \{a, b, c, d, e\}$. Ist es möglich, durch Hinzufügen von Paaren $(x, y) \in A \times A$ die Relation R so zu erweitern, dass für die Erweiterungen R_r, R_a, und R_k gilt:

(i) R_r ist reflexiv, **(ii)** R_a ist antisymmetrisch, **(iii)** R_k ist konnex.

Geben Sie jeweils, falls existent, eine möglichst kleine Erweiterung von R an.

(b) Betrachten Sie die folgenden Relationen R_i über der jeweiligen Menge M_i.

(i) $M_1 := \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$, $R_1 := \{(x, y) \in M_1 \times M_1 \,:\, x \cdot y \leq 3\}$,

(ii) $M_2 := \mathcal{P}(\mathbb{N}_{\geq 1})$, $R_2 := \{(a, b) \in M_2 \times M_2 \,:\, a \cap b = \emptyset\}$.

Geben Sie für jedes $i \in \{1, 2\}$ an, welche Eigenschaften (reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, konnex, transitiv) die Relation R_i jeweils besitzt. Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Sei $\sigma := \{f, R, S, c\}$ eine Signatur mit einem 1-stelligen Funktionssymbol f, einem 2-stelligen Relationssymbol R, einem 3-stelligen Relationssymbol S und einem Konstantensymbol c. Betrachten Sie die drei σ-Strukturen $\mathcal{A} := (A, f^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$, $\mathcal{B} := (B, f^{\mathcal{B}}, R^{\mathcal{B}}, S^{\mathcal{B}}, c^{\mathcal{B}})$ und $\mathcal{C} := (C, f^{\mathcal{C}}, R^{\mathcal{C}}, S^{\mathcal{C}}, c^{\mathcal{C}})$ wobei

- $A := \{q, r, s, t, u\}$, $R^{\mathcal{A}} := \{(q, q), (r, t), (t, r), (u, q)\}$, $S^{\mathcal{A}} := \{(q, s, q), (u, t, r)\}$, $c^{\mathcal{A}} := s$,
- $B := \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R^{\mathcal{B}} := \{(1, 5), (2, 4), (4, 4), (5, 1)\}$, $S^{\mathcal{B}} := \{(2, 5, 1), (4, 3, 4)\}$, $c^{\mathcal{B}} := 3$,
- $C := \{v, w, x, y, z\}$, $R^{\mathcal{C}} := \{(v, x), (w, z), (x, x), (z, w)\}$, $S^{\mathcal{C}} := \{(v, z, w), (x, v, x)\}$, $c^{\mathcal{C}} := y$

und die Funktionen $f^{\mathcal{A}} \colon A \to A$, $f^{\mathcal{B}} \colon B \to B$ und $f^{\mathcal{C}} \colon C \to C$ definiert sind durch

$a \in A$	q	r	s	t	u
$f^{\mathcal{A}}(a)$	t	s	t	u	q

$a \in B$	1	2	3	4	5
$f^{\mathcal{B}}(a)$	3	4	5	5	2

$a \in C$	v	w	x	y	z
$f^{\mathcal{C}}(a)$	x	y	z	z	v

Überprüfen Sie jeweils, ob $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ und ob $\mathcal{A} \cong \mathcal{C}$ gilt. Falls ja, geben Sie einen entsprechenden Isomorphismus an und beweisen Sie, dass es sich um einen Isomorphismus handelt. Falls nein, beweisen Sie, dass es keinen entsprechenden Isomorphismus gibt.

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Bearbeiten Sie Aufgabe 4 von Blatt 4.