Spiele auf Graphen und Netzwerken

Nicole Schweikardt

HU-Sommerschule 2018

Notationen:

f.a. $\hat{=}$ für alle, ex $\hat{=}$ es existiert, s.d. $\hat{=}$ so dass

- $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ (natürliche Zahlen inkl. 0)

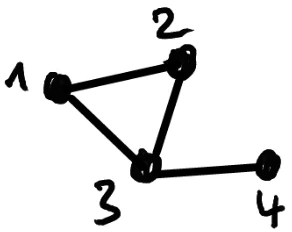
- Sei M eine Menge, sei $k \in \mathbb{N}$.

  $[M]^k := \{X \subseteq M : |X| = k\}$

  $[M]^{\leq k} := \{X \subseteq M : |X| \leq k\}$

- Ein Graph G besteht aus einer nicht-leeren endlichen Menge $V(G)$ (der sog. Knotenmenge von G) und einer Menge $E(G) \subseteq [V(G)]^2$ (der sog. Kantenmenge von G)

Bsp:



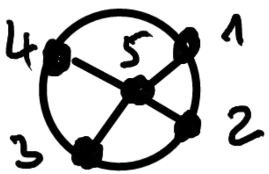
ist eine graphische Darstellung des Graphen G mit $V(G) = \{1,2,3,4\}$, $E(G) = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,1\}, \{3,4\}\}$

- Sei G ein Graph, sei $X \subseteq V(G)$. Der **von X induzierte Teilgraph von G** ist der Graph H mit $V(H) := X$, $E(H) := \{e \in E(G) : e \subseteq X\}$. Wir schreiben **$G[X]$** um diesen Graphen H zu bezeichnen.

- Sei G ein Graph, sei $X \subseteq V(G)$. Der **durch Löschen von X aus G entstehende Graph** ist der Graph **$G \setminus X := G[V(G) \setminus X]$**

- Sei G ein Graph, sei $k \in \mathbb{N}$. Ein **Weg der Länge k in G** ist ein Tupel $(v_0, \dots, v_k) \in V(G)^{k+1}$ s.d. $\{v_{i-1}, v_i\} \in E(G)$ f.a. $i \in \mathbb{N}$ mit $i \leq k$ gilt.

- Ein **Kreis der Länge k in G** ist ein Weg $(v_0, \dots, v_k)$ der Länge k in G, für den gilt: $v_0 = v_k$, $|\{v_1, \dots, v_k\}| = k$ und $k \geq 3$

  Bsp: Sei G der Graph 

  Dann ist $(1,2,3,4,1)$ ein Kreis der Länge 4 in G.

1. Räuber und Polizisten

Das Räuber-und-Polizisten-Spiel $RP(G,k)$

G ein Graph, $k \in \mathbb{N}$.

- Eine Position des Spiels $RP(G,k)$ ist ein Paar $(X, y) \in [V(G)]^{\leq k} \times V(G)$.

- Beginn des Spiels: Räuber R wählt ein $y \in V(G)$.
  Die Anfangsposition ist dann $(\emptyset, y)$

- In jeder Runde des Spiels wird wie folgt von der aktuellen Position (X, y) zu einer neuen Position (X', y') gezogen:

  (1) Die Polizisten P wählen eine Menge $X' \in [V(G)]^{\leq k}$

  (2) Der Räuber R wählt ein $y' \in V(G)$, so dass es einen Weg von y zu y' in $G \setminus (X \cap X')$ gibt

- Das Spiel ist beendet, sobald eine Position (X, y) mit $y \in X$ erreicht wird — in diesem Fall gewinnen die Polizisten P. Wird eine solche Position nie erreicht, so gewinnt der Räuber R.

- Eine Strategie für P ist eine Abbildung S, die jeder partiellen Partie $(X_0, y_0), \dots, (X_i, y_i)$ ein $X_{i+1} := S((X_0, y_0), \dots, (X_i, y_i)) \in [V(G)]^{\leq k}$ zuordnet. S heißt Gewinnstrategie für P, wenn P damit jede Partie des Spiels gewinnt.

- Die Polizistenzahl von G ist definiert als

$$pz(G) := \min \{ k \in \mathbb{N} : \text{P hat eine Gewinnstrategie im Spiel } RP(G, k) \}$$

Beispiel

(1) Für jeden Graphen G ist $pz(G) \leq |V(G)|$.

(2) Für jeden Baum T mit mind. einer Kante ist $pz(T) = 2$

Übungsaufgabe 1

d.h. $V(C_n) = \{1,\dots,n\}$
$E(C_n) = \{\{v_i,v_{i+1}\} : i<k\} \cup \{\{v_n,v_1\}\}$

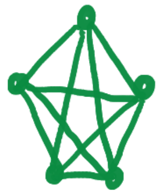
(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ und sei C_n ein Kreis auf n Knoten.
Was ist $pz(C_n)$?

Bsp: C_3

d.h. $V(K_n) = \{1,\dots,n\}$, $E(K_n) = [V(K_n)]^2$

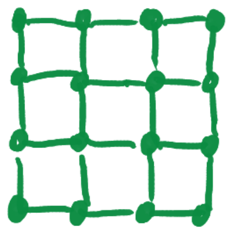
(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ und sei K_n der vollständige Graph auf n Knoten. Was ist $pz(K_n)$?

Bsp: K_5



(c) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ und sei $G_{n\times n}$ das $n\times n$-Gitter
Was ist $pz(G_{n\times n})$?

Bsp: $G_{4\times 4}$



Allgemein: $V(G_{n\times n}) = \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\}$.
$E(G_{n\times n}) = \{ \{(i,j),(i',j')\} \in [V(G_{n\times n})]^2 : (i'=i \;\&\; j'=j+1)$ oder $(i'=i+1 \;\&\; j'=j) \}$

Lösung:

(a) $pz(C_n) = 3$

(b) $pz(K_n) = n$

(c) $n \leq pz(G_{n \times n}) \leq n+1$

Frage: Ist $pz(G_{n\times n}) = n$ oder $pz(G_{n \times n}) = n+1$?

Lösungsansatz: Nutze Brombeersträucher!

Brombeersträucher

Sei G ein Graph. Ein **Brombeerstrauch in G** ist ein System $\mathcal{B}$ von Teilmengen von $V(G)$, s.d. gilt:

(B1) Jede Menge $A \in \mathcal{B}$ ist zusammenhängend in G, und

(B2) Je zwei Mengen $A, A' \in \mathcal{B}$ berühren sich, dh $A \cap A' \neq \emptyset$ oder es gibt eine Kante $e \in E(G)$ die einen Endpunkt in A und einen Endpunkt in A' hat.

Ein **Hitting-Set für $\mathcal{B}$** ist eine Menge $X \subseteq V(G)$ s.d. für jedes $A \in \mathcal{B}$ gilt: $X \cap A \neq \emptyset$.

Die **Dicke von $\mathcal{B}$** ist $\text{dicke}(\mathcal{B}) := \min\{|X| : X \text{ ist ein Hitting-Set für } \mathcal{B}\}$

Die **Brombeerdicke von G** ist definiert als

$$\text{bd}(G) := \max\{\text{dicke}(\mathcal{B}) : \mathcal{B} \text{ ist ein Brombeerstrauch in } G\}$$

Beispiel:

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$.

Gesucht: Ein Brombeerstrauch in K_n

Lösung: $\mathcal{B} := \{ \{v\} : v \in V(K_n) \}$

Was ist $\text{dicke}(\mathcal{B})$?

Sei X ein Hitting-Set für $\mathcal{B}$. Dann ist $X \cap \{v\} \neq \emptyset$ f.a. $v \in V(K_n)$

Dh $X = V(K_n)$. Also: $\text{dicke}(\mathcal{B}) = n$

Was ist $\text{dicke}(K_n)$?

$\text{dicke}(K_n) = n$ (denn für jeden Brombeerstrauch $\mathcal{B}'$ von G ist $\text{dicke}(\mathcal{B}') \leq |V(G)|$).

Übungsaufgabe 2

(1) Finde einen Brombeerstrauch im 5×5-Gitter $G_{5\times 5}$, dessen Dicke möglichst groß ist.

(2) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und betrachte das $n\times n$-Gitter $G_{n\times n}$.
Finde einen Brombeerstrauch in $G_{n\times n}$ der Dicke $n+1$.

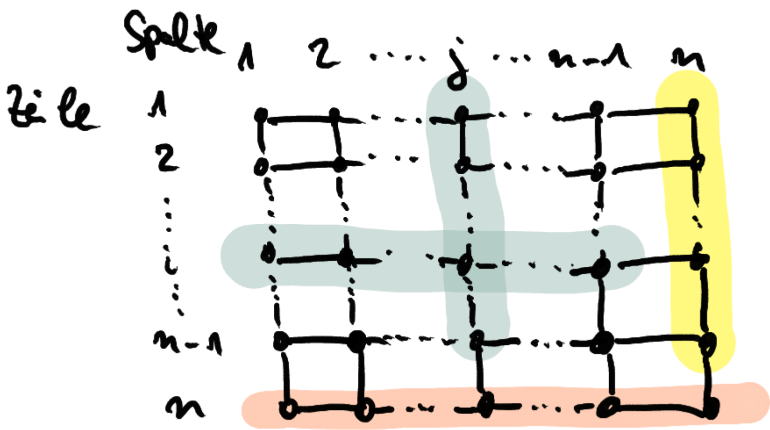
Lösung

(2) Sei $Z := \{ (n,\ell) : \ell \in \{1,\dots,n\} \}$

$S := \{ (\ell,n) : \ell \in \{1,\dots,n-1\} \}$

$K_{i,j} := \{ (i,\ell) : \ell \in \{1,\dots,n-1\} \} \cup \{ (\ell,j) : \ell \in \{1,\dots,n-1\} \}$

Skizze:



Schreibe (i,j) um den Knoten in Zeile i und Spalte j zu bezeichnen

- Dann ist $B := \{Z,S\} \cup \{K_{i,j} : i,j \in \{1,\dots,n-1\}\}$ ein Brombeerstrauch.
- $X := \{(i,i) : 1 \le i \le n\} \cup \{(1,n)\}$ ist ein Hitting-Set für B der Größe $n+1$
- Es gibt kein Hitting-Set X' für B der Größe $< n+1$, denn:

Wenn X' nur $\leq n-2$ Knoten aus dem Teilgitter $G_{(n-1)\times(n-1)}$ enthält, so bleibt eine der Mengen $K_{i,j} \in \mathcal{B}$ unbehelligt.

Also muss X' mind. $n-1$ Knoten aus $G_{(n-1)\times(n-1)}$ enthalten. Weitere 2 Knoten sind nötig, um Z und S zu treffen.

- Also ist $\text{dicke}(\mathcal{B}) = n+1$.

Wozu Brombeersträucher?

Ein Brombeerstrauch $\mathcal{B}$ in G der Dicke $\geq k+1$ liefert eine Gewinnstrategie für den Räuber R im Spiel $RP(G,k)$:

R stellt sicher, dass für jede Spielposition (X,y), die während einer Partie auftritt, gilt: ex. $A \in \mathcal{B}$ s.d. $A \cap X = \emptyset$ und $y \in A$.

- Für die Anfangsposition $(\emptyset, y)$ gilt dies offensichtlicherweise.
- Wenn die Polizisten P von der aktuellen Spielposition (X,y) aus ein $X' \subseteq [V(G)]^{\leq k}$ wählen, geht R wie folgt vor:
  - Gemäß Induktionsannahme ex. $A \in \mathcal{B}$ s.d. $A \cap X = \emptyset$ und $y \in A$.
  - Wegen $|X'| \leq k$ und $\text{dicke}(\mathcal{B}) \geq k+1$ ist X' kein Hitting-Set für $\mathcal{B}$.
  - Somit ex. $A' \in \mathcal{B}$ s.d. $X' \cap A' = \emptyset$
  - Da $\mathcal{B}$ ein Brombeerstrauch ist, berühren sich A und A' in G, und es gibt in G einen Weg von y zu einem Knoten $y' \in A'$, der außer y' nur Knoten in A besucht. R wählt diesen Weg und dieses y'.

Wir erhalten damit:

Satz: Für jeden Graphen G gilt: $pz(G) \geq bd(G)$.

Übungsaufgabe 3:

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$. Was ist $pz(G_{n \times n})$?

Lösung:

Wir wissen bereits:

(1) $n \leq pz(G_{n\times n}) \leq n+1$

(2) In $G_{n\times n}$ gibt es einen Brombeerstrauch der Dicke $n+1$.
Somit hat R eine Gewinnstrategie in $RP(G, n)$.
Also ist $pz(G_{n\times n}) \geq n+1$ (wenn $n \geq 2$)

(3) Insges. ist also $pz(G_{n\times n}) = n+1$. (wenn $n \geq 2$)

(4) Spezialfall $n=1$: $pz(G_{1\times 1}) = 1$, da $G_{1\times 1}$ nur einen Knoten besitzt.

Fluchträume

Für einen Graph G, $X \subseteq V(G)$, $y \in V(G) \setminus X$

$\mathrm{Komp}(G \setminus X, y) :=$ die Zusammenhangskomponente von $G \setminus X$, die y enthält

und für $y \in X$ sei $\mathrm{Komp}(G \setminus X, y) := \emptyset$.

Wir nennen $\mathrm{Komp}(G \setminus X, y)$ den Fluchtraum von R bzgl. X.

Beachte dazu:

R kann beliebig entlang von Wegen ziehen, auf denen keine Polizisten stehen.

Daher hängen Strategien für P nicht von y, sondern von $\mathrm{Komp}(G \setminus X, y)$ ab.

Dies wird wie folgt präzisiert:

Beobachtung

Sei (X,y) eine Spielposition in $RP(G,k)$ mit $y \in V(G) \setminus X$.
Sei $\hat{y} \in \mathrm{Komp}(G \setminus X, y)$.
Sei $X' \in [V(G)]^{\leq k}$ die Menge, zu der P in der nächsten Runde zieht.

Dann gilt:
R kann jede Position (X', z), die er von (X,y) aus erreichen kann, auch von $(X, \hat{y})$ aus erreichen (und umgekehrt).

Beweis:
Es gibt einen Weg von $\hat{y}$ nach y, der X nicht schneidet; und
- - - - - - - - - - - - - - - - y nach z, der $X \cap X'$ nicht schneidet.
Also gibt es auch einen Weg von $\hat{y}$ nach z, der $X \cap X'$ nicht schneidet.

$\square$

Folgerung: Es genügt, nur solche Strategien S für P zu betrachten, die nur vom Fluchtraum von R (aber nicht von seiner konkreten Position im Fluchtraum) abhängen. Statt $S(X,y)$ schreibe $S(X,F)$ für $F := \mathrm{Komp}(G \setminus X, y)$.

Variante des Räuber-und-Polizisten-Spiels:

Das monotone R-u-P-Spiel $RP_{mon}(G,k)$:

gleiche Spielregeln wie bei $RP(G,k)$, aber P muss in jedem Zug dafür sorgen, dass sich der Fluchtraum von R nicht vergrößert

Präzise: Bei aktueller Spielposition (X,y) darf P nur solche X' wählen, für die gilt:
$\mathrm{Komp}(G \setminus X, y)$ ist eine Zusammenhangskomponente von $G \setminus (X \cap X')$

Bsp: Unsere Gewinnstrategie für P in $RP(G_{n \times n}, n+1)$ erfüllt dies.

Die monotone Polizistenzahl eines Graphen G ist definiert als

$$\text{mon-pz}(G) := \min\{k \in \mathbb{N} : \text{P hat eine Gewinnstrategie in } RP_{mon}(G,k)\}$$

Bisher haben wir gesehen:

Für jeden Graphen G gilt:

$$\text{mon-pz}(G) \geq \text{pz}(G) \geq \text{bd}(G)$$

Man kann zeigen (hier ohne Beweis), dass überall "=" gilt, d.h.:

Theorem

Für jeden Graphen G gilt: $\text{mon-pz}(G) = \text{pz}(G) = \text{bd}(G)$.

D.h. für jedes $k \in \mathbb{N}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- R hat eine Gewinnstrategie in $RP_{mon}(G,k)$
- $RP(G,k)$
- in G gibt es einen Brombeerstrauch der Dicke $\geq k+1$

Bisher haben wir gesehen:

Für jeden Graphen G gilt:

$$\text{mon-pz}(G) \geq \text{pz}(G) \geq \text{bd}(G)$$

Man kann zeigen (hier ohne Beweis), dass überall "=" gilt, d.h.:

Theorem

Für jeden Graphen G gilt: $\text{mon-pz}(G) = \text{pz}(G) = \text{bd}(G)$
$= \text{bw}(G)+1$

D.h. für jedes $k \in \mathbb{N}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- R hat eine Gewinnstrategie in $RP_{mon}(G,k)$
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - $RP(G,k)$
- in G gibt es einen Brombeerstrauch der Dicke $\geq k+1$

2. Baumweite und Baumzerlegungen

Baumzerlegungen (kurz: BZ)

Sei G ein Graph.

Eine **Baumzerlegung von G** ist von der Form (T, B), wobei

- T ein Baum ist und
- $B = (B_t)_{t \in V(T)}$ mit $B_t \subseteq V(G)$ f.a. $t \in V(T)$

s.d. gilt:

(1) f.a. $v \in V(G)$ ex $t \in V(T)$ s.d. $v \in B_t$ ("t deckt v ab")

(2) f.a. $e \in E(G)$ ex $t \in V(T)$ s.d. $e \subseteq B_t$ ("t deckt e ab")

(3) f.a. $v \in V(G)$ ist $B^{-1}(v) := \{ t \in V(T) : v \in B_t \}$ zusammenhängend in T ("Weg-Eigenschaft")

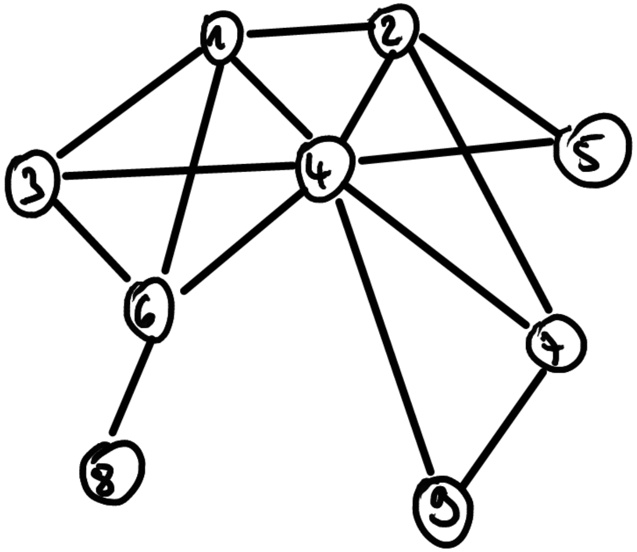
Die Mengen B_t heißen **Beutel** der BZ (T, B)

Die **Weite** von (T, B) ist $w(T,B) := \max\{ |B_t| : t \in V(T) \} - 1$

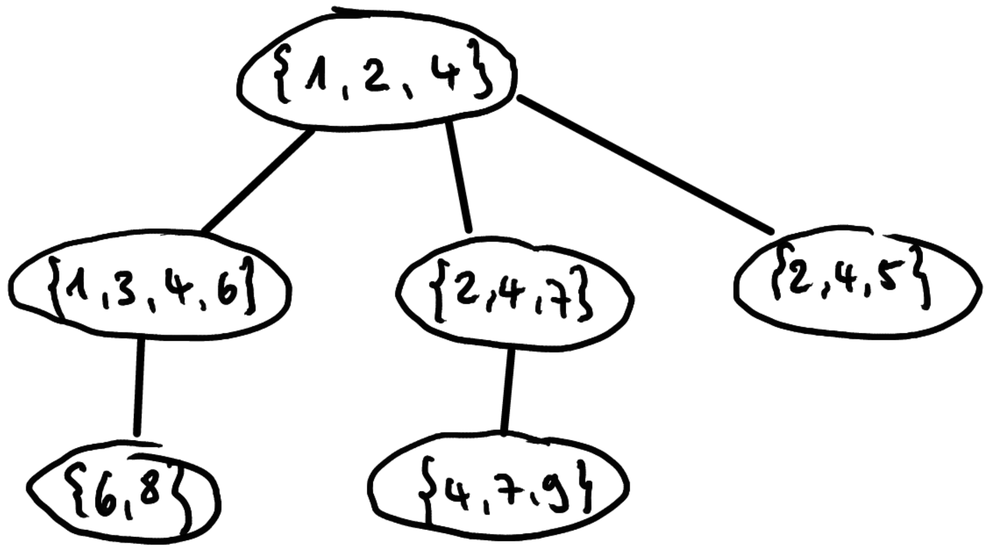
Beachte: (1) & (2) $\Rightarrow$ $G = \bigcup_{t \in V(T)} G[B_t]$

Beispiele

(1) G:



eine BZ von G (der Weite 3)

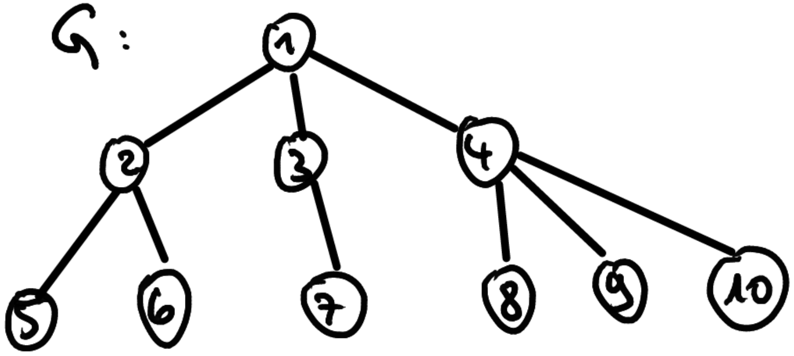


(2) Sei G ein beliebiger Graph. Dann ist (T, B), wobei T der Baum • auf 1 Knoten und $B = (B_t)$ mit $B_t = V(G)$ eine Baumzerlegung von G (der Weite $|V(G)| - 1$).

Übungsaufgabe 4

Finden Sie Baumzerlegungen der folgenden Graphen G
(Ziel dabei: die Weite soll möglichst klein sein):

(1) G:



(2) G ist ein beliebiger Baum

(3) $G = C_n$ für ein $n \geq 3$

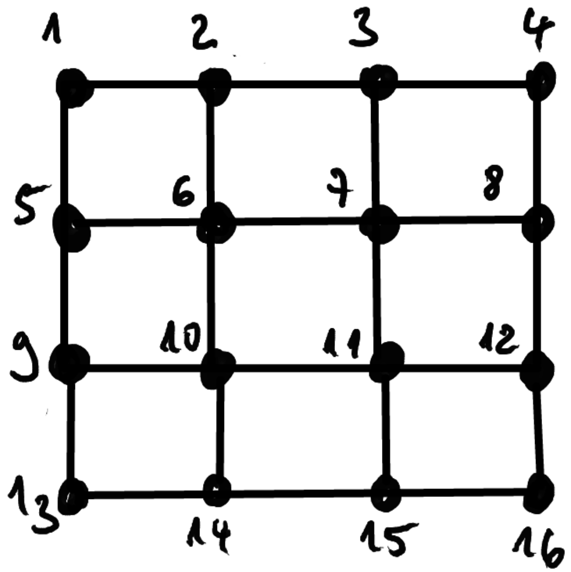
(4) G: Ein Kreis auf n Knoten, mit einem zusätzlichen Knoten, der mit jedem Knoten des Kreises durch eine Kante verbunden ist

(5) $G = K_n$ für ein $n \geq 1$

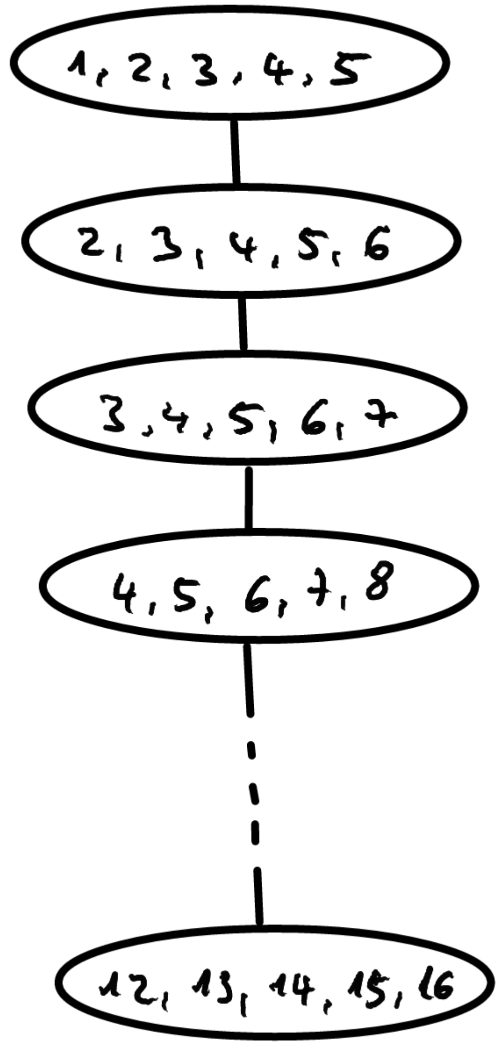
(6) $G = G_{n \times n}$ für ein $n \geq 1$

Eine Baumzerlegung des Gitters $G_{n \times n}$

$G_{4 \times 4}$



eine BZ von G:



Baumweite

Sei G ein Graph.

- Sei (T,B) eine BZ von G.
  Die Weite von (T,B) ist definiert als
  $$w(T,B) := \max\{\,|B_t| : t \in V(T)\} - 1$$

- Die Baumweite von G ist definiert als
  $$bw(G) := \min\{\,w(T,B) : (T,B) \text{ ist eine BZ von } G\}$$

Beispiele

- $bw(K_n) = n-1$
- $bw(C_n) = 2$
- G ein Baum $\Rightarrow$ $bw(G) = 1$
- $bw(G_{n\times n}) \leq n$

Theorem

Sei G ein Graph, sei $k \in \mathbb{N}$.
Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) $\quad bw(G) + 1 \leq k$

(2) $\quad \text{mon-pz}(G) \leq k$

(3) $\quad pz(G) \leq k$

(4) $\quad bd(G) \leq k$

Insbes.:

Da $pz(G_{n \times n}) = n+1$ ist,
ist $bw(G_{n \times n}) = n$.

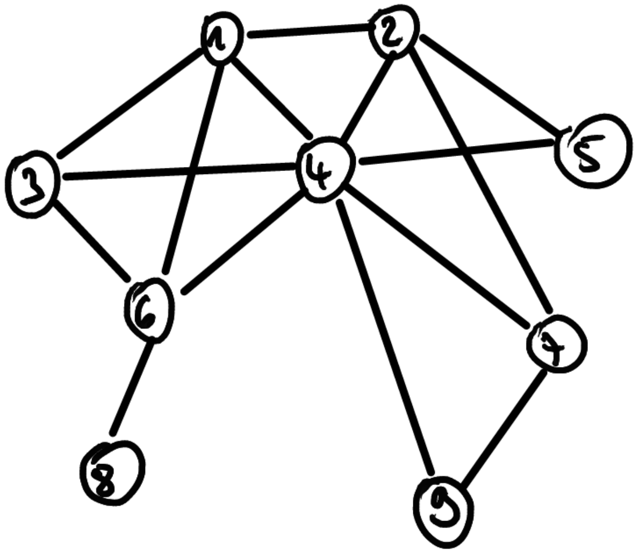
Beweis: $(2) \Rightarrow (3)$: klar
$(3) \Rightarrow (4)$: haben wir vorhin bewiesen
$(4) \Rightarrow (1)$: ist schwer (hier ohne Beweis)
$(1) \Rightarrow (2)$: Idee: BZ liefert Gewinnstrategie für P

(1) ⇒ (2):

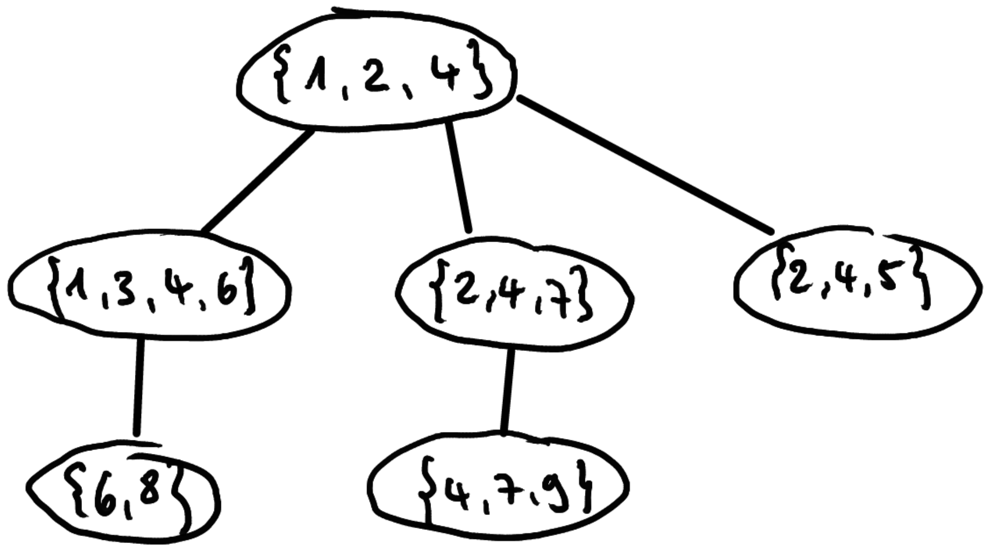
Idee: nutze BZ der Weite $k-1$ (d.h. Beutel der Größe $\leq k$), um eine Gewinnstrategie für P in $RP_{mon}(G,k)$ zu erhalten

Beispiel:

G:



eine BZ von G (der Weite 3)



3. Baumzerlegungen und Algorithmen

Definition:

Eine Klasse $\mathcal{K}$ von Graphen hat beschränkte Baumweite, falls es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt s.d. f.a. $G \in \mathcal{K}$ gilt: $bw(G) \leq k$.

Notationen:

- Ein orientierter Baum ist ein gewurzelter Baum, in dem alle Kanten von der Wurzel weg orientiert sind.
- Eine orientierte Baumzerlegung ist eine Baumzerlegung (T, B), wobei T ein orientierter Baum ist.
- Sei T ein orientierter Baum mit Wurzel w und sei $t \in V(T)$. T_t bezeichnet den Teilbaum von T mit Wurzel t

Das 3-Färbbarkeitsproblem

$\boxed{\text{3-COL:}}$

Eingabe: Ein Graph G

Frage: Ist G 3-färbbar? D.h.:

Gibt es eine Abbildung $Farbe: V(G) \to \{1,2,3\}$, s.d.
f.a. $e=\{u,v\} \in E(G)$ gilt: $Farbe(u) \neq Farbe(v)$,

Solche Abbildungen heißen "3-Färbungen".

Wenn wir zusätzlich zu G auch eine Baumzerlegung (T,B) nutzen, können wir 3-COL wie folgt lösen:

(1) Sei $k := weite(T,B)$

(2) wähle ein beliebiges $w \in V(T)$ als Wurzel aus und orientiere T entsprechend

(3) Fang bei den Blättern von T an und arbeite Dich schrittweise nach Oben vor, um für jedes $t \in V(T)$ Folgendes zu berechnen:

$Col(t)$: Menge aller 3-Färbungen von $G[B_t]$

$ExCol(t)$: die Teilmenge aller 3-Färbungen aus $Col(t)$, die sich zu einer 3-Färbung von $G[\bigcup_{s \in V(T_t)} B_s]$ erweitern lassen

"extendable colourings"

Klar: G ist 3-färbbar $\iff$ $ExCol(w) \neq \emptyset$, wobei w die Wurzel von T ist

Übungsaufgabe 5: Arbeiten Sie die Details zu (3) aus und analysieren Sie die Laufzeit Ihres Algorithmus

Lösung:

- weite $(T, B) = k \Rightarrow |B_t| \leq k+1$ f.a. $t \in V(T)$.

- Berechnen von $Col(t)$:
  Probiere alle "potentiellen Färbungen" $f: B_t \to \{1,2,3\}$ durch
  $\leadsto$ Laufzeit $O(3^{k+1} \cdot k(k+1))$

- Berechnen von $ExCol(t)$:
  - falls t ein Blatt von T ist $\Rightarrow$ $ExCol(t) = Col(t)$
  - sonst: Seien $t_1, \dots, t_m$ die Kinder von t in T.
    $ExCol(t_1), \dots, ExCol(t_m)$ haben wir bereits berechnet.

    für jedes $f \in Col(t)$ tue Folgendes:

teste, ob es für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ ein $f_i \in ExCol(t_i)$ gibt, s.d. $f_i(x) = f(x)$ f.a. $x \in B_{t_i} \cap B_t$.
Wenn ja, füge f in $ExCol(t)$ ein.

Laufzeit zum Berechnen von $ExCol(t)$ (für ein festes t):

$$O(\underbrace{3^{k+1}} \cdot \underbrace{3^{k+1}} \cdot (k+1) \cdot m) = O(3^{2k+2} \cdot k \cdot m)$$

max. Anzahl der fs bzw f_is

"Pro Kante von T" haben wir Laufzeit $O(3^{2k+2} \cdot k)$.

Gesamtlaufzeit : $O(3^{2k+2} \cdot k \cdot |V(T)|)$.

Frage: Wie groß kann $|V(T)|$ werden?

Definition

Eine Baumzerlegung (T, B) heißt klein, wenn f.a. $s, t \in V(T)$ mit $s \neq t$ gilt: $B_s \not\subseteq B_t$

Lemma: Sei G ein Graph. Dann gilt:

(a) Für jede kleine Baumzerlegung (T, B) von G ist $|V(T)| \leq |V(G)|$.

(b) Es gibt eine kleine Baumzerlegung von G der Weite $bw(G)$.

Übungsaufgabe 6: Beweisen Sie das Lemma

Lösung:

Beweis von (a):

Per Induktion nach $|V(G)|$.

- $|V(G)| = 1$: ✓
- $|V(G)| > 1$: Sei t ein Blatt von T, sei s ein Nachbar von t, sei $X := B_t \setminus B_s$.

  Da T klein ist, ist $X \neq \emptyset$ und $X \cap B_u = \emptyset$ f.a. $u \in V(T)\setminus\{t\}$.

  Außerdem ist $(T\setminus\{t\}, B\setminus B_t)$ eine kleine BZ von $G\setminus X$.

  Da $|V(G\setminus X)| < |V(G)|$ ist, gilt gemäß Induktionsannahme:

$$|V(T)|-1 = |V(T\setminus\{t\})| \leq |V(G\setminus X)| \leq |V(G)|-1$$

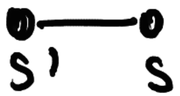
$\square$

<u>Beweis von (b):</u>

Sei $(T, \mathcal{B})$ eine BZ von G der Weite $\mathrm{bw}(G)$, so dass $|V(T)|$ kleinstmöglich ist. Angenommen, $(T, \mathcal{B})$ ist nicht klein.

Dann gibt es $s, t \in V(T)$ mit $s \neq t$ und $B_s \subseteq B_t$.

- Auf Grund der Weg-Eigenschaft gilt f.a. $t' \in V(T)$, die auf dem Weg von s nach t in T liegen: $B_s \subseteq B_{t'}$.
- Sei s' der Nachbar von s, der auf dem Weg von s nach t liegt. Wir wissen: $B_s \subseteq B_{s'}$.
- Sei T' der Baum, der aus T durch Kontraktion der Kante



entsteht. Für den dadurch neu entstehenden Knoten $\hat{s}$ setze $B'_{\hat{s}} := B_{s'}$, f.a. anderen Knoten $u \in V(T) \setminus \{s, s'\}$ sei $B'_u := B_u$
- Dann ist $(T', \mathcal{B}')$ eine BZ von G der Weite $\mathrm{bw}(G)$ mit $|V(T')| < |V(T)|$. ↯

Theorem (Satz von Bodlaender) (hier ohne Beweis)

Es gibt einen Algorithmus, der bei Eingabe eines Graphen G eine kleine Baumzerlegung (T, B) von G der Weite $k := bw(G)$ in Laufzeit

$$2^{O(k^3)} \cdot O(|V(G)|)$$

berechnet.

Durch Nutzen von Bodlaenders Algorithmus' liefert das oben beschriebene Verfahren zum Lösen des 3-Färbbarkeitsproblems also einen Algorithmus mit Laufzeit

$$2^{O(k^3)} \cdot O(|V(G)|) + O(3^{2k+2} \cdot k \cdot |V(G)|)$$

$$= 2^{O(k^3)} \cdot O(|V(G)|), \quad \text{für } k := bw(G)$$

Wir erhalten also:

Satz:

Es gibt einen Algorithmus, der das 3-Färbbarkeitsproblem löst und bei Eingabe eines beliebigen Graphen G Laufzeit $2^{O(k^3)} \cdot O(|V(G)|)$ für $k := bw(G)$ hat.