Bemerkung 1.8

Aus dem Beweis von Theorem 1.5 folgt direkt für die HNF-Formel ψ, die bei Eingabe einer $FO(\exists)$-Formel φ und einer Gradschranke $d \geq 2$ berechnet wird:

(a) Jede in ψ vorkommende Sphärenformel $\mathrm{sph}_{\rho,r}(\bar{x})$ oder $\mathrm{sph}_{\tau,r}(y)$ hat Radius

$$r \leq \frac{3^{qr(\varphi)}-1}{2},$$

wobei $qr(\varphi)$ der Quantorenrang von φ ist, d.h. die maximale Schachtelungstiefe von Quantoren der Form $\exists z \ldots$, $\forall z \ldots$, $P(\#(z) \ldots)$ in φ.

(b) ψ kann in Zeit

$$\exp_5\left(\mathrm{poly}(\|\varphi\|+\|\sigma\|)+\lg\lg d\right) = 2^{2^{2^{d^{2^{\mathrm{poly}(\|\varphi\|+\|\sigma\|)}}}}}$$

berechnet werden.

Beweis: (b): Übung

(a) Für $q := qr(\varphi)$ und $r := r(q)$ erhält man aus dem Beweis von Theorem 1.5 folgende Rekursionsgleichung:

$r(0) = 0$ und $r(q+1) = 3 \cdot r(q) + 1$.

Somit gilt:

$$
\begin{aligned}
r(q+1) &= 3\,r(q) + 1 \\
&= 3\,(3\,r(q-1) + 1) + 1 \\
&= 3^2\, r(q-1) + 3 + 1 \\
&= 3^2\,(3\,r(q-2) + 1) + 3 + 1 \\
&= 3^3\, r(q-2) + 3^2 + 3 + 1 \\
&= \ldots \\
&= 3^{q+1}\, r(q-q) + 3^q + 3^{q-1} + \cdots + 3 + 1 \\
&= 3^{q+1} \underbrace{r(0)}_{=0} + \sum_{i=0}^{q} 3^i \\
&= \sum_{i=0}^{q} 3^i \\
&= \frac{3^{q+1} - 1}{2}
\end{aligned}
$$

$\square$

Speziell für die Logiken FO und FO+MOD erhalten wir aus Theorem 1.5 und Bemerkung 1.8:

<u>Folgerung 1.9</u> (Satz von Bollig und Kuske, 2012)

Für jede Signatur σ, jeden FO[σ]-Satz φ und jede Gradschranke $d \in \mathbb{N}$ mit $d \geq 2$ kann in Zeit $\exp_5(\mathrm{poly}(\|\varphi\| + \|\sigma\|) + \lg\lg d)$ ein zu φ d-äquivalenter <u>FO[σ]-Satz ψ in Hanf-Normalform</u> vom Radius $r := \frac{3^{qr(\varphi)} - 1}{2}$ berechnet werden, d.h.:

ψ ist eine Boolesche Kombination von FO[σ]-Sätzen der Form $\exists^{\geq m} y\ sph_{\tau,r}(y)$ mit $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $\tau \in \mathcal{L}_r^{\sigma,d}(1)$.

<u>Beweis</u>:

Theorem 1.5 liefert eine zu φ d-äquivalente Boolesche Kombination von Aussagen der Form

$$P\Big(\sum_{\tau \in L} \#(y).sph_{\tau,r}(y) - m\Big) \text{ mit } P = \mathbb{N}_{\geq 1},\ m \in \mathbb{N},$$

$L \subseteq \mathcal{L}_r^{\sigma,d}(1)$; und gemäß Bemerkung 1.8 ist $r = \frac{3^{qr(\varphi)} - 1}{2}$.

Außerdem gilt:

$$P\left(\sum_{\tau\in L} \#(y)\cdot \mathrm{sph}_{\tau,r}(y) - m\right)$$

$$\equiv (P+m)\left(\sum_{\tau\in L} \#(y)\cdot \mathrm{sph}_{\tau,r}(y)\right)$$

$$\underset{P=\mathbb{N}_{\geq 1}}{\equiv} \exists^{\geq m+1} y \bigvee_{\tau\in L} \mathrm{sph}_{\tau,r}(y).$$

Sei $\ell' := |L|$ und $L = \{\tau_1, \dots, \tau_{\ell'}\}$.

Sei $I := \{(i_1, \dots, i_{\ell'}) \in \{0,1,\dots,m+1\}^{\ell'} : \sum_{j=1}^{\ell'} i_j \geq m+1\}$.

Behauptung:

$$\exists^{\geq m+1} y \bigvee_{\tau\in L} \mathrm{sph}_{\tau,r}(y)$$

$$\equiv \bigvee_{(i_1,\dots,i_{\ell'})\in I} \left(\bigwedge_{j=1}^{\ell'} \exists^{\geq i_j} y\ \mathrm{sph}_{\tau_j,r}(y)\right)$$

Beweis: Übung.

$\square$ Folgerung 1.9

<u>Folgerung 1.10</u> (Heimberg, Kuske, Schweikardt, 2016)

Für jede Signatur σ, jede FO+MOD[σ]-Formel φ und jede Gradschranke $d \in \mathbb{N}$ mit $d \geq 2$ kann in Zeit $\exp_5(\mathrm{poly}(\|\varphi\| + \|\sigma\|) + \lg\lg d)$ eine zu φ d-äquivalente <u>FO+MOD[σ]-Formel ψ in Hanf-Normalform</u> vom Radius $r := \frac{3^{qr(\varphi)}-1}{2}$ berechnet werden, d.h. ψ ist eine Boolesche Kombination von

(1) Formeln $sph_{S,r}(\bar{x})$ mit $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $n := |frei(\varphi)|$, $\{x_1, \ldots, x_n\} = frei(\varphi)$ und $S \in \mathcal{L}_r^{\sigma,d}(n)$,

(2) Sätzen $\exists^{\geq m} y\; sph_{\tau,r}(y)$ mit $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $\tau \in \mathcal{L}_r^{\sigma,d}(1)$, und

(3) Sätzen $\exists^{i \bmod p} y\; sph_{\tau,r}(y)$ mit $\tau \in \mathcal{L}_r^{\sigma,d}(1)$, $i \in \{0, \ldots, p-1\}$, $p \in \mathbb{N}$ so dass φ eine Teilformel der Form $\exists^{j \bmod p} z\, \chi$ enthält

<u>Beweis:</u>

Ersetze in φ jede Teilformel der Form $\exists^{j \bmod p} z\, \chi$ durch $(p \cdot \mathbb{N} + j)(\#(z).\chi)$.

Theorem 1.5 und Bemerkung 1.8 liefern für $r := \frac{3^{qr(\varphi)}-1}{2}$ eine zu φ d-äquivalente Boolesche Kombination von Formeln der Form (1) und Aussagen der Form

$P\left(\sum_{\tau\in L} \#(y).\, sph_{\tau,r}(y) \quad -m\right)$ mit

$m\in\mathbb{N}$, $L\subseteq \mathcal{L}_r^{\sigma,d}(1)$ und

$P=\mathbb{N}_{\geq 1}$ oder $P=p\mathbb{N}+j$ für p,j so, dass

φ eine Teilformel der Form $\exists^{j \bmod p}{}_z\, \chi$ enthält.

Für $P=\mathbb{N}_{\geq 1}$ können wir genauso vorgehen wie im Beweis von Folgerung 1.9.

Für $P=p\mathbb{N}+j$ beachte, dass Folgendes gilt:

$$P\left(\sum_{\tau\in L} \#(y).\, sph_{\tau,r}(y) \quad - m\right)$$

$$\equiv \quad p\mathbb{N}+j+m\left(\sum_{\tau\in L} \#(y).\, sph_{\tau,r}(y)\right)$$

$$\equiv \quad \exists^{\geq j+m}{}_y \bigvee_{\tau\in L} sph_{\tau,r}(y) \quad \wedge \quad \exists^{i \bmod p}{}_y \bigvee_{\tau\in L} sph_{\tau,r}(y),$$

wobei $i\in\{0,\dots,p-1\}$ so, dass $i\equiv j+m \bmod p$ ist.

Für die Formel $\exists^{\geq j+m}{}_y \bigvee_{\tau\in L} sph_{\tau,r}(y)$ gehen wir genauso vor wie im Beweis von Folgerung 1.9

Für die Formel $\exists^{i \bmod p}{}_y \bigvee_{\tau\in L} sph_{\tau,r}(y)$ sei

$\ell' := |L|$ und $L=\{\tau_1,\dots,\tau_{\ell'}\}$ und sei

$I := \{(i_1,\dots,i_{\ell'})\in\{0,1,\dots,p-1\}^{\ell'} : \sum_{j=1}^{\ell'} i_j \equiv i \bmod p\}$.

Behauptung:

$$\exists^{i \bmod p} y \bigvee_{\tau \in L} sph_{\tau,r}(y)$$

$$\equiv \bigvee_{(i_1,\ldots,i_{e'}) \in I} \left(\bigwedge_{j=1}^{e'} \exists^{i_j \bmod p} y \; sph_{\tau_j,r}(y) \right)$$

Beweis: Übung

□ Folgerung 1.10

1.2 Hanf-Lokalität

Definition 1.11 $(\mathfrak{A} \rightleftarrows_r \mathfrak{B})$

Sei σ eine Signatur, sei $r \in \mathbb{N}$.
Zwei σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen <u>r-bijektiv</u>,
kurz: $\mathfrak{A} \rightleftarrows_r \mathfrak{B}$, wenn es eine Bijektion
$f: A \to B$ gibt, s.d. f.a. $a \in A$ gilt:

$$\left(\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(a), a\right) \cong \left(\mathcal{N}_r^{\mathfrak{B}}(f(a)), f(a)\right).$$

Definition 1.12 $\left(HT_r^d(\mathcal{A}) \right)$

Sei σ eine Signatur.
Sei $r, d \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{L}_r^{\sigma,d}(1) = \tau_1, \ldots, \tau_e$.

Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur.
Das Hanf-Tupel für Radius r und Grad d von $\mathcal{A}$ ist das Tupel

$$HT_r^d(\mathcal{A}) := \left([\![\#(y).\, sph_{\tau_i, r}(y)]\!]^{\mathcal{A}} \right)_{i \in \{1,\ldots,e\}}$$
$$\in \mathbb{N}^e.$$

Bemerkung 1.13

Für alle σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ und alle $r \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathcal{A} \leftrightarrows_r \mathcal{B} \iff HT_r^d(\mathcal{A}) = HT_r^d(\mathcal{B})$$

für $d := \max\{\text{Grad}(\mathcal{A}), \text{Grad}(\mathcal{B})\}$

Beweis: Übung.

Definition 1.14

Sei σ eine Signatur, S eine Klasse von σ-Strukturen und $C \subseteq S$.

C heißt Hanf-lokal in S, falls es ein $r \in \mathbb{N}$ gibt, so dass f.a. $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in S$ gilt:

$$\text{Falls } \mathcal{A} \rightleftarrows_r \mathcal{B}, \text{ so } (\mathcal{A} \in C \iff \mathcal{B} \in C).$$

Als einfache Folgerung von Theorem 1.5 erhält man:

Satz 1.15 (Hanf-Lokalität von $FO(\mathbb{P})$).

Sei σ eine Signatur, $\mathbb{P} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, S eine Klasse von σ-Strukturen.

Dann gilt für jeden $FO(\mathbb{P})[\sigma]$-Satz φ:

$$\underbrace{Mod_S(\varphi)}_{:= \{\mathcal{A} \in S : \mathcal{A} \models \varphi\}} \text{ ist Hanf-lokal in } S$$

Beweis: Sei $r := \frac{3^{qr(\varphi)}-1}{2}$. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in S$ mit $\mathcal{A} \rightleftarrows_r \mathcal{B}$.

zu zeigen: $\mathcal{A} \models \varphi \iff \mathcal{B} \models \varphi$. Sei $d := \max\{Grad(\mathcal{A}), Grad(\mathcal{B})\}$.

Gemäß Theorem 1.5 ist φ d-äquivalent zu einer Booleschen Kombination ψ von Aussagen der Form $P\left(\sum_{\tau \in L} \#(y).sph_{\tau,r}(y) - m\right)$ mit $m \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{P} \cup \{\mathbb{N}_{\geq 1}\}$, $L \subseteq \mathcal{L}_r^{\sigma,d}(1)$.

Wegen $\mathfrak{A} \rightleftarrows_r \mathfrak{B}$ gilt gemäß Bemerkung 1.13, dass $HT_r^d(\mathfrak{A}) = HT_r^d(\mathfrak{B})$ ist. Somit ist

$$[\![\#(y).\, sph_{\tau,r}(y)]\!]^{\mathfrak{A}} = [\![\#(y).\, sph_{\tau,r}(y)]\!]^{\mathfrak{B}} \quad \text{f.a. } \tau \in L.$$

Daher gilt ⊛:

$$\mathfrak{A} \models P\Big(\sum_{\tau \in L} \#(y).\, sph_{\tau,r}(y) - m\Big) \iff \mathfrak{B} \models P\Big(\sum_{\tau \in L} \#(y).\, sph_{\tau,r}(y) - m\Big).$$

Und insgesamt erhalten wir:

$$\begin{array}{lll} & \mathfrak{A} \models \varphi & \\ \iff & \mathfrak{A} \models \psi & (\text{da } \psi \equiv_d \varphi \text{ und } \mathrm{Grad}(\mathfrak{A}) \leq d) \\ \iff & \mathfrak{B} \models \psi & (\text{wegen } ⊛) \\ \iff & \mathfrak{B} \models \varphi & (\text{da } \psi \equiv_d \varphi \text{ und } \mathrm{Grad}(\mathfrak{B}) \leq d). \end{array}$$

$\square$ Satz 1.15

Bemerkung 1.16

Indem man zeigt, dass eine Klasse C nicht Hanf-lokal in S ist, kann man (unter Verwendung von Satz 1.15) folgern, dass C nicht $FO(\mathbb{P})$-definierbar in S ist, für $\mathbb{P} := \mathcal{P}(\mathbb{Z})$

Beispiel 1.17

Sei $\mathcal{P} := \mathcal{P}(\mathbb{Z})$.
Graph-Zusammenhang ist nicht $FO(\mathcal{P})$-definierbar.

Beweis:

Angenommen doch, dann ist Graph-Zusammenhang Hanf-lokal in der Klasse aller endlichen Graphen. Dann gibt es also eine Zahl $r \in \mathbb{N}$ so dass für alle endlichen Graphen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ mit $\mathcal{A} \leftrightarrows_r \mathcal{B}$ gilt: $\mathcal{A}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn $\mathcal{B}$ zusammenhängend ist.

Aber betrachte den Graphen $\mathcal{A}$, der einen Kreis auf $2m$ Knoten bildet, für $m := 2r+2$, und den Graphen $\mathcal{B}$, der aus der disjunkten Vereinigung von 2 Kreisen auf je m Knoten besteht. Für jedes $\mathcal{C} \in \{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$ und jeden Knoten $c \in C$ ist $\left(N_r^{\mathcal{C}}(c), c\right)$ ein Pfad auf $2r+1$ Knoten, bei dem c der Knoten in der Mitte ist. Somit ist $\mathcal{A} \leftrightarrows_r \mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ ist zusammenhängend und $\mathcal{B}$ ist nicht zusammenhängend. $\lightning$

$\square$

Skizze:

$\mathcal{A}$:

$\mathcal{B}$:

Beispiel 1.18

Sei $\mathfrak{Z} := \mathfrak{Z}(\mathbb{Z})$.
Es gibt keinen $FO(\mathfrak{Z})$-Satz der Signatur $\sigma := \{E\}$, der von genau denjenigen endlichen Graphen erfüllt wird, die Bäume sind.

Beweisidee:

Analog zum Beweis in Beispiel 1.17, wobei $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ so gewählt werden, dass $|A| = |B|$ und
$\mathcal{A}$ ein sehr langer Pfad ist und
$\mathcal{B}$ die disjunkte Vereinigung eines langen Pfades und eines Kreises auf $2r+2$ Knoten ist.

Details: Übung.

$\square$

Skizze: