Kapitel 1: Hanf-Normalform und Hanf-Lokalität

Definition 1.1

(a) Ein Typen-1-Zählterm der Signatur σ ist von der Form

$$\#(y).\, sph_{\tau,r}(y)$$

wobei $r \in \mathbb{N}$ und τ ein r-Typ mit 1 Zentrum über σ ist.

(b) Ein einfacher Zählterm der Signatur σ ist von der Form

$$\sum_{\tau \in L} \#(y).\, sph_{\tau,r}(y) \; - m \;,$$

wobei $m \in \mathbb{Z}$ und $L \subseteq \mathcal{T}_r^{\sigma,d}(1)$ für $r, d \in \mathbb{N}$ ist.

(c) Ein Hanf-Zählsatz der Signatur σ für $FO(\mathcal{P})$ (mit $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z})$) ist von der Form

$$P(t),$$

wobei $P \in \mathcal{P} \cup \{N_{\geq 1}\}$ und t ein einfacher Zählterm der Signatur σ ist.

Beachte: Jeden Hanf-Zählsatz können wir als $FOC(\mathcal{P} \cup \{N_{\geq 1}\})$-Formel auffassen, aber nicht unbedingt als $FO(\mathcal{P})$-Formel.

Lemma 1.2 (Beweis: Übung)

Für jeden Hanf-Zählsatz $P(t)$ für

$$t = \sum_{\tau \in L} \#(y).\, sph_{\tau,r}(y) - m \quad \text{mit } L \subseteq \mathcal{L}_r^{\sigma,d}(1)$$

gilt für $(P+m) := \{ p+m : p \in P \} \subseteq \mathbb{Z}$:

$$P(t) \equiv \underbrace{(P+m)\Big(\#(y).\, \bigvee_{\tau \in L} sph_{\tau,r}(y) \Big)}_{=: \psi},$$

und ψ ist ein $FO(\{(P+m)\})[\sigma]$ - Satz.
Speziell für $P := \mathbb{N}_{\geq 1}$ ist $(P+m)(\#(y).\varphi)$ äquivalent zur Formel
$\exists^{\geq m+1} y\ \varphi := \exists y_1 \dots \exists y_{m+1} \Big(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq m+1} \neg y_i = y_j \wedge \forall y \Big(\big(\bigvee_{i=1}^{m+1} y = y_i \big) \rightarrow \varphi \Big) \Big)$.

Definition 1.3 (Hanf-Normalform-Formel für FO(𝒫))

Sei $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z})$.
Eine HNF-Formel für $FO(\mathcal{P})$ der Signatur σ ist eine Boolesche Kombination von Hanf-Zählsätzen der Signatur σ für $FO(\mathcal{P})$ und Formeln der Form $sph_{\tau,r}(x_1,\dots,x_k)$ mit $r \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und τ ein r-Typ mit k Zentren über σ.

Definition 1.4

(a) Der *Grad* einer σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ ist der Grad der σ-Struktur $\mathcal{A}$.

(b) Sei $d \in \mathbb{N}$.
Zwei Formeln φ, ψ der Signatur σ heißen *d-äquivalent* (kurz: $\varphi \equiv_d \psi$), falls für alle σ-Interpretationen $\mathcal{I}$ vom Grad $\leq d$ gilt: $\mathcal{I} \models \varphi \iff \mathcal{I} \models \psi$.

Theorem 1.5 (Schwache HNF für $\mathrm{FO}(\mathcal{P})$ — Kuske & Schweikardt, LICS 2017)

Sei $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ und sei σ eine Signatur.
Für jede $\mathrm{FO}(\mathcal{P})[\sigma]$-Formel φ und jedes $d \in \mathbb{N}$ gibt es eine HNF-Formel ψ für $\mathrm{FO}(\mathcal{P})$ der Signatur σ mit $\psi \equiv_d \varphi$ und $\mathrm{frei}(\psi) = \mathrm{frei}(\varphi)$.

Außerdem gibt es einen Algorithmus, der bei Eingabe von φ und d ein solches ψ berechnet.

Unser nächstes Ziel ist, Theorem 1.5 zu beweisen. Danach werden wir das Theorem anwenden — einerseits um effiziente Algorithmen zum Auswerten von $\mathrm{FO}(\mathcal{P})$-Formeln zu erhalten und andererseits um zu zeigen, dass bestimmte Aussagen nicht in $\mathrm{FO}(\mathcal{P})$ formuliert werden können.