Exkurs: Baumzerlegungen und Baumweite von Graphen

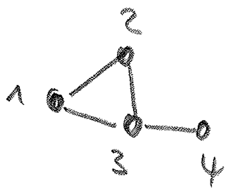
Notationen

- Sei M eine Menge, sei $k \in \mathbb{N}$.

  $[M]^k := \{X \subseteq M : |X| = k\}$

  $[M]^{\leq k} := \{X \subseteq M : |X| \leq k\}$

- Ein (ungerichteter) Graph G besteht aus einer nicht-leeren Menge $V(G)$ (der sog. Knotenmenge von G) und einer Menge $E(G) \subseteq [V(G)]^2$ (der sog. Kantenmenge von G).

  Beispiel: 

  ist eine graphische Darstellung des Graphen G mit $V(G) = \{1,2,3,4\}$ und

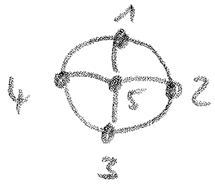
  $E(G) = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{3,4\}\}$

- Sei G ein Graph, sei $X \subseteq V(G)$.
  Der von X induzierte Teilgraph von G ist der Graph H mit $V(H) = X$ und $E(H) = \{e \in E(G) : e \subseteq X\}$.
  Wir schreiben $G[X]$ um diesen Graphen zu bezeichnen.

- Sei G ein Graph, sei $X \subseteq V(G)$.
  Der durch Löschen von X aus G entstehende Graph ist der Graph $G \setminus X := G[V(G) \setminus X]$

- Sei G ein Graph, sei $k \in \mathbb{N}$.
  - Ein <u>Weg der Länge k</u> in G ist ein Tupel $(v_0, \dots, v_k) \in V(G)^{k+1}$ s.d. $\{v_{i-1}, v_i\} \in E(G)$ f.a. $i \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i \leq k$ gilt
  - G heißt <u>zusammenhängend</u>, wenn f.a. $v, w \in V(G)$ gilt: ex. $k \in \mathbb{N}$ und $(v_0, \dots, v_k) \in V(G)^{k+1}$ s.d. $(v_0, \dots, v_k)$ ein Weg der Länge k in G mit $v_0 = v$ und $v_k = w$ ist.
  - Ein <u>Kreis der Länge k</u> in G ist ein Weg $(v_0, \dots, v_k)$ der Länge k in G, für den gilt: $v_0 = v_k$, $|\{v_1, \dots, v_k\}| = k$ und $k \geq 3$.

    <u>Bsp:</u> Sei G der Graph

    Dann ist $(1, 2, 3, 4, 1)$ ein Kreis der Länge 4 in G

  - G heißt <u>azyklisch</u>, wenn f.a. $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 3$ gilt es gibt keinen Kreis der Länge k in G

- Ein <u>Baum</u> ist ein Graph, der zusammenhängend und azyklisch ist.

B.1: Baumzerlegungen

Definition B.1 (Baumzerlegung)
Sei G ein Graph.
Eine <u>Baumzerlegung von G</u> ist von der Form $(T, \mathcal{B})$, wobei T ein Baum ist und $\mathcal{B} = (B_t)_{t \in V(T)}$ mit $B_t \subseteq V(G)$ f.a. $t \in V(T)$, s.d. gilt:

(1) f.a. $v \in V(G)$ ex. $t \in V(T)$ s.d. $v \in B_t$ ("t deckt v ab")

(2) f.a. $e \in V(G)$ ex. $t \in V(T)$ s.d. $e \subseteq B_t$ ("t deckt e ab")

(3) f.a. $v \in V(G)$ ist $\mathcal{B}^{-1}(v) := \{t \in V(T) : v \in B_t\}$ zusammenhängend in T ("Weg-Eigenschaft")

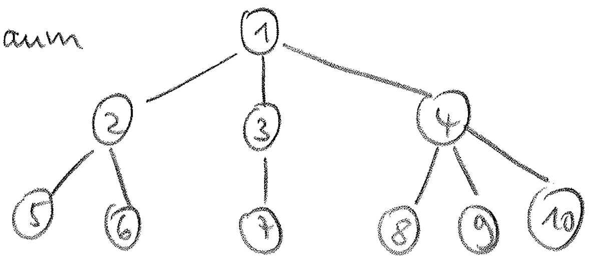
Die Mengen B_t heißen <u>Beutel</u> der Baumzerlegung $(T, \mathcal{B})$.
Die <u>Weite</u> von $(T, \mathcal{B})$ ist definiert als

$$\text{weite}(T, \mathcal{B}) := \max\{ |B_t| - 1 : t \in V(T) \}$$

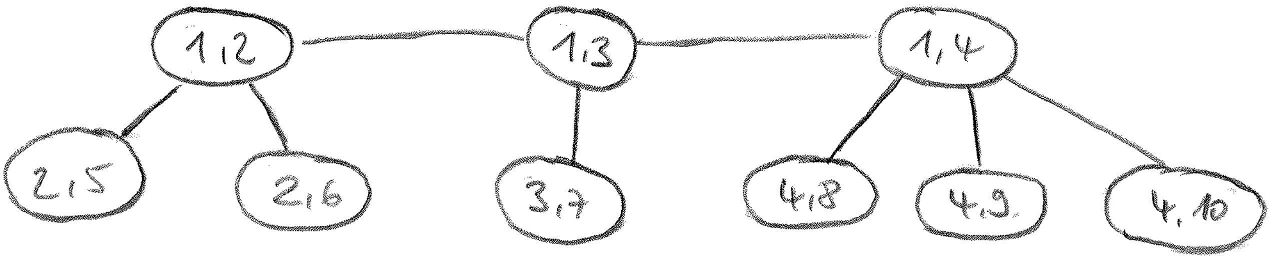
Beispiel B.2

(a) Sei G ein beliebiger Graph.
Dann ist $(T, \mathcal{B})$, wobei T der Baum auf 1 Knoten t und $\mathcal{B} = (B_t)$ mit $B_t = V(G)$ ist, eine Baumzerlegung von G der Weite $|V(G)| - 1$.

(b) Sei G der Baum

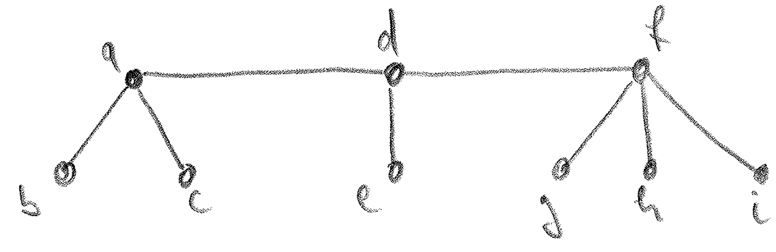


Dann ist Folgendes eine Baumzerlegung von G:



Dies ist eine graphische Darstellung der Baumzerlegung (T, B) mit

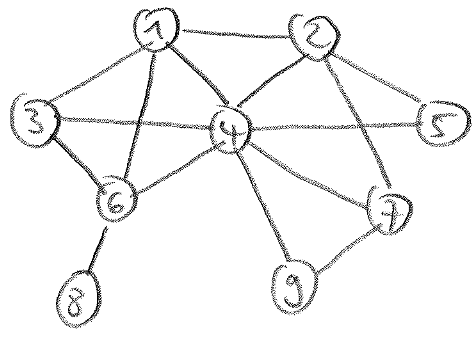
T:



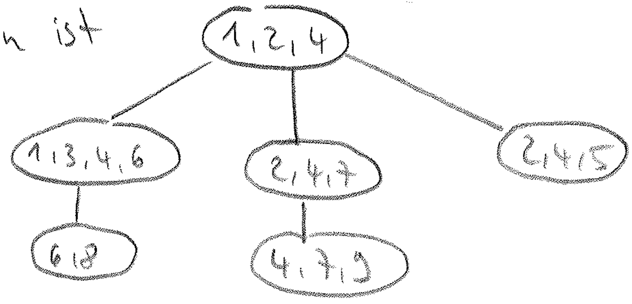
und $B_a = \{1,2\}$
$B_b = \{2,5\}$
$B_c = \{2,6\}$
$B_d = \{1,3\}$
u.s.w.

Diese Baumzerlegung hat die Weite 1.
Analog lässt sich für <u>jeden</u> <u>Baum</u> G eine Baumzerlegung der Weite 1 konstruieren.

<u>(c)</u> Sei G der Graph



Dann ist



eine Baumzerlegung von G der Weite 3.

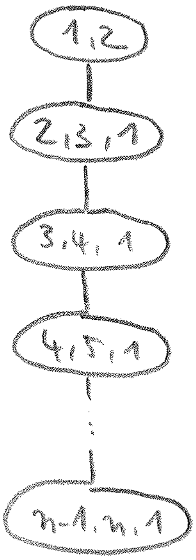
(d) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ sei

C_n der Kreis auf n Knoten, d.h.

$V(C_n) = \{1, \dots, n\}$ und

$E(C_n) = \{ \{i, i+1\} : i \in \{1, \dots, n-1\} \} \cup \{ \{n, 1\} \}$.

Dann ist



eine Baumzerlegung von C_n der Weite 2

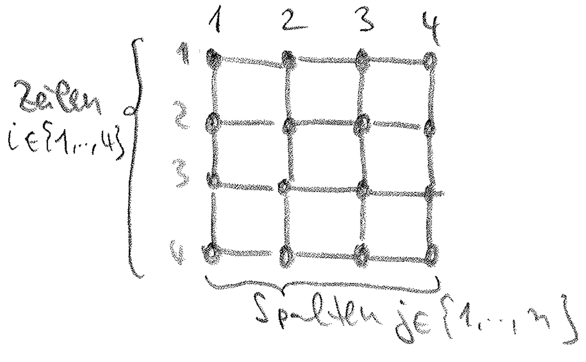
(e) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ sei

$G_{n \times n}$ das $n \times n$-Gitter, d.h.

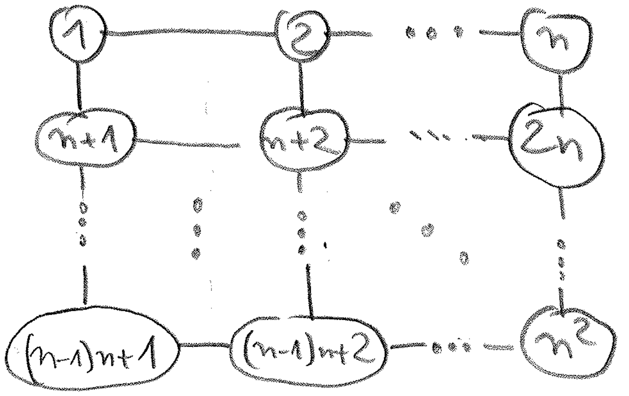
$V(G_{n\times n}) = \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ und

$E(G_{n\times n}) = \{ \{(i,j), (i,j+1)\} : i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, n-1\} \}$
$\cup \{ \{(i,j), (i+1,j)\} : i \in \{1, \dots, n-1\}, j \in \{1, \dots, n\} \}$

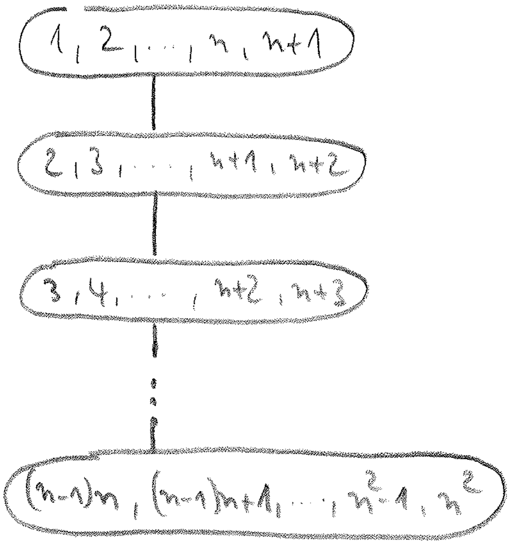
Skizze: $G_{4\times 4}$:



Wir identifizieren den Knoten (i,j) mit der Zahl $(i-1)\cdot n + j$. Dadurch werden die Knoten von $G_{n\times n}$ wie folgt durchnummeriert:



Dann ist



eine Baumzerlegung von $G_{n\times n}$ der Weite n.

<u>Definition B.3</u> (Baumweite)

Sei G ein Graph.

Die <u>Baumweite von G</u> ist definiert als

$$bw(G) := \min\{\, \text{weite}(T,B) : (T,B) \text{ ist eine Baumzerlegung von } G \,\}$$

<u>Beispiel B.4</u>:

Aus Bsp B.2 folgt:

- $bw(G) \le |V(G)| - 1$ für jeden Graphen G
- $bw(G_{n\times n}) \le n$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge 2$
- $bw(C_n) \le 2$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge 3$
- $bw(G) \le 1$ für jeden <u>Baum</u> G

Außerdem sieht man leicht, dass für den vollständigen Graphen K_n auf n Knoten mit $V(K_n) := \{1, \ldots, n\}$, $E(K_n) := \{\{i,j\} : i,j \in \{1, \ldots, n\}, i \neq j\}$ gilt: $bw(K_n) = n-1$.

B.2: Brombeersträucher zum Nachweis unterer Schranken für die Baumweite von Graphen

Definition B.4

Sei G ein zusammenhängender Graph.

Ein <u>Brombeerstrauch</u> (engl.: <u>bramble</u>) in G ist eine Menge $\mathbb{B}$ von nicht-leeren Teilmengen von $V(G)$, für die gilt:

(<u>B1</u>) Jede Menge $A \in \mathbb{B}$ ist zusammenhängend in G,

und

(<u>B2</u>) F.a. $A, A' \in \mathbb{B}$ gilt: A und A' berühren sich,
d.h.: $A \cap A' \neq \emptyset$ oder es gibt eine Kante $e \in E(G)$, die einen Endpunkt in A und einen Endpunkt in A' hat.

Die Elemente $A \in \mathbb{B}$ werden auch <u>Äste</u> des Brombeerstrauchs genannt.

Ein <u>Hitting-Set für $\mathbb{B}$</u> ist eine Menge $X \subseteq V(G)$ s.d. f.a. $A \in \mathbb{B}$ gilt: $X \cap A \neq \emptyset$.

Die <u>Dicke von $\mathbb{B}$</u> ist

$$\text{dicke}(\mathbb{B}) := \min\{\, |X| : X \text{ ist ein Hitting-Set für } \mathbb{B} \,\}$$

Die <u>Brombeerdicke von G</u> ist definiert als

$$\text{bd}(G) := \max\{\, \text{dicke}(\mathbb{B}) : \mathbb{B} \text{ ist ein Brombeerstrauch in } G \,\}$$

Beispiel B.5

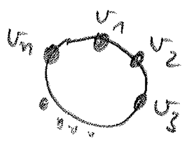
(<u>a</u>) Für jeden zusammenhängenden Graphen G ist $\mathbb{B} := \{ V(G) \}$ ein Brombeerstrauch der Dicke 1, und es gilt: $1 \leq \text{bd}(G) \leq |V(G)|$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und sei $G := K_n$ der vollständige Graph auf n Knoten.

$\mathbb{B} := \{ \{v\} : v \in V(G) \}$ ist ein Brombeerstrauch in K_n der Dicke n.

Somit gilt: $bd(K_n) = n$

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ und sei $G := C_n$ der Kreis auf n Knoten.

Skizze: 

Genauer: $V(C_n) := \{1, \dots, n\}$,

$E(C_n) := \{ \{v_i, v_{i+1}\} : i \in \{1, \dots, n-1\} \} \cup \{ \{v_n, v_1\} \}$

Dann ist

$\mathbb{B} := \{ \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3, \dots, v_n\} \}$ ein

Brombeerstrauch in C_n der Dicke 3.

Somit ist $bd(C_n) \geq 3$

(d) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und sei $G := G_{n \times n}$ das $n \times n$-Gitter.

Genauer: $V(G_{n\times n}) = \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$

$E(G_{n\times n}) = \{ \{(i,j), (i,j+1)\} : i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, n-1\} \}$
$\cup \{ \{(i,j), (i+1,j)\} : i \in \{1, \dots, n-1\}, j \in \{1, \dots, n\} \}$

Dann ist folgendes $\mathbb{B}$ ein Brombeerstrauch in $K_{n \times n}$:

$\mathbb{B} := \{ Z, S \} \cup \{ K_{i,j} : i,j \in \{1, \dots, n-1\} \}$

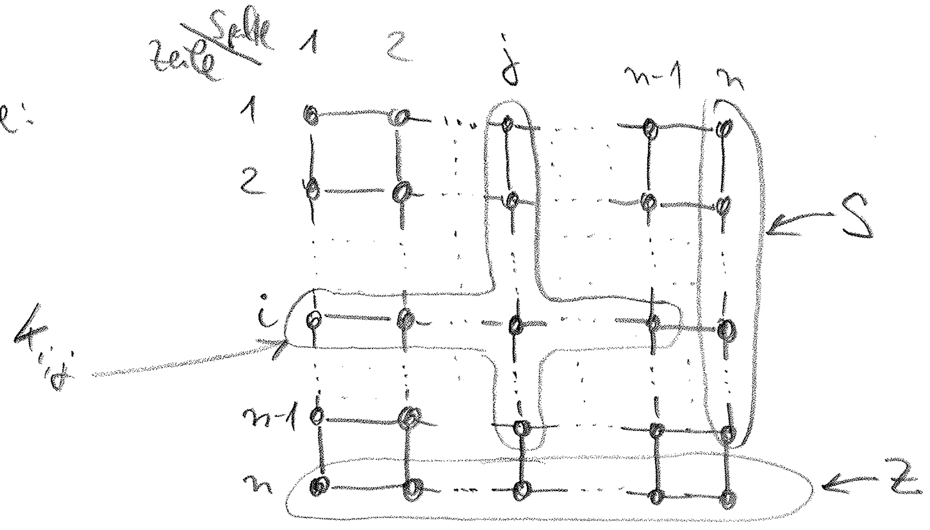
mit $Z := \{ (n,j) : j \in \{1, \dots, n\} \}$ ("letzte Zeile")

$S := \{ (i,n) : i \in \{1, \dots, n-1\} \}$ ("letzte Spalte, Zeilen 1 bis n-1")

$K_{i,j} := \{(i,\ell) : \ell \in \{1,\dots,n-1\}\} \cup \{(\ell,j) : \ell \in \{1,\dots,n-1\}\}$

("das "Kreuz" aller Knoten in Zeile i und aller Knoten in Zeile j — jeweils für Spalten und Zeilen $1,\dots,n-1$

Skizze:



Behauptung: $\text{dicke}(\mathbb{B}) = n+1$

Beweis:

"$\geq$": $X := \{(i,i) : i \in \{1,\dots,n\}\} \cup \{(1,n)\}$ ist ein Hitting-Set für $\mathbb{B}$ mit $|X| = n+1$

"$\leq$": Sei X ein beliebiges Hitting-Set für $\mathbb{B}$.
Dann ex $x_S, x_Z \in X$ mit $x_S \in S$, $x_Z \in Z$ — und $x_S \neq x_Z$, da $S \cap Z = \emptyset$.
Sei $X' = X \setminus \{x_S, x_Z\}$. Wegen $x_S, x_Z \notin K_{i,j}$ (f.a. $i,j \in \{1,\dots,n-1\}$), ist X' ein Hitting-Set für $\mathbb{B}' := \{K_{i,j} : i,j \in \{1,\dots,n-1\}\}$ (da X ein Hitting-Set für $\mathbb{B}$ ist).

Angenommen, $|X'| \leq n-2$. Dann ex $i \in \{1,\dots,n-1\}$ s.d. X' kein Element der i-ten Zeile von $G_{n\times n}$ enthält. Und ex. $j \in \{1,\dots,n-1\}$ s.d. X' kein Element der j-ten Spalte von $G_{n\times n}$ enthält. Somit ist $X' \cap K_{i,j} = \emptyset$
↯ Widerspruch, da X' ein Hitting-Set für $\mathbb{B}'$ ist.
Somit ist $|X'| \geq n-1$, also $|X| \geq (n-1)+2 = n+1$. □

Somit gilt: $bd(G_{n\times n}) \geq n+1$

Satz B.6 (Seymour und Thomas, 1993)

Für jeden zusammenhängenden Graphen G und jede Zahl $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$bd(G) \geq k+1 \implies bw(G) \geq k$$

Bemerkung: Es gilt sogar "$\iff$"; wir beweisen und benutzen hier aber nur die Richtung "$\implies$".

Beweis:

Sei $\mathbb{B}$ ein Brombeerstrauch in G der Dicke $\geq k+1$.

Sei (T, B) eine beliebige Baumzerlegung von G.

Behauptung (H)

Ex. $t \in V(T)$ s.d. B_t ein Hitting-Set für $\mathbb{B}$ ist.

Beachte: Daraus folgt direkt, dass $|B_t| \geq k+1$ ist (da dicke$(\mathbb{B}) \geq k+1$ ist). Somit ist weite$(T, B) \geq k$ — und da dies für jede Baumzerlegung (T, B) von G gilt, ist $bw(G) \geq k$.

Um den Beweis des Satzes abzuschließen genügt es also, Behauptung (H) zu beweisen.

Beweis von Behauptung (H):

Fall 1: Ex $e \in E(T)$, s.d. für die beiden Endpunkte t, t' von e gilt: $B_t \cap B_{t'}$ ist ein Hitting-Set für $\mathbb{B}$.

Dann gilt Beh (H), da dann auch B_t ein Hitting-Set für $\mathbb{B}$ ist.

Fall 2: F.a. $e \in E(T)$ und die beiden Endpunkte t, t' von e gilt: $B_t \cap B_{t'}$ ist kein Hitting-Set für $\mathbb{B}$.

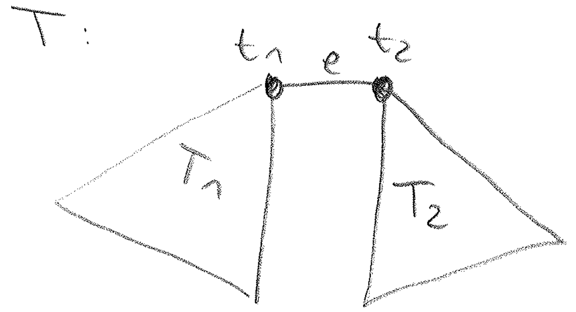
Wir legen für jede einzelne Kante $e \in E(T)$ eine Richtung wie folgt fest:

Sei $e \in E(T)$ und seien t_1, t_2 die beiden Endpunkte von e.

Sei $X := B_{t_1} \cap B_{t_2}$

Für jedes $i \in \{1,2\}$ sei T_i diejenige Zusammenhangskomponente des Waldes, der aus T durch Löschen der Kante e entsteht, die den Knoten t_i enthält.

Skizze:

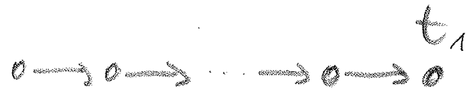


und sei $U_i := \bigcup_{t \in V(T_i)} B_t$.

Da wir in Fall 2 sind, ist X kein Hitting-Set für $\mathbb{B}$.
Somit ex. $A \in \mathbb{B}$ s.d. $A \cap X = \emptyset$ ist.
Da $(\mathbb{B}, T)$ eine Baumzerlegung von G und A zusammenhängend in G ist, ex $i_0 \in \{1,2\}$ s.d. $A \subseteq U_{i_0} \setminus X$.
Da $\mathbb{B}$ ein Brombeerstrauch in G ist, gilt für <u>jedes</u> $A' \in \mathbb{B}$: A' berührt A. Für jedes $A' \in \mathbb{B}$ mit $A' \cap X = \emptyset$ ist daher $A' \subseteq U_{i_0} \setminus X$.
Wir geben der Kante $e = \{t_1, t_2\}$ die Richtung $t_{3-i_0} \longrightarrow t_{i_0}$,
d.h.: falls $i_0 = 2$ ist, so wählen wir die Richtung $t_1 \longrightarrow t_2$
und falls $i_0 = 1$ ist, so wählen wir die Richtung $t_1 \longleftarrow t_2$

Nachdem wir jede Kante $e \in E(T)$ auf diese Weise orientiert haben, wählen wir in dem dadurch aus T entstehenden gerichteten Graphen $\vec{T}$ einen gerichteten Weg maximaler Länge und betrachten den Knoten t_1, der am Ende dieses Weges liegt.

Skizze: Weg in $\vec{T}$:



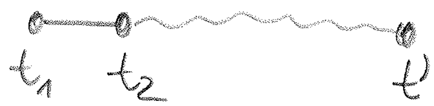
Wir zeigen: B_{t_1} ist ein Hitting-Set für $\mathbb{B}$.

Betrachte dazu ein beliebiges $A \in \mathbb{B}$. Zu zeigen: $A \cap B_{t_1} \neq \emptyset$.

Angenommen, $A \cap B_{t_1} = \emptyset$.

Wähle einen beliebigen Knoten $v \in A$ und sei $t' \in V(T)$ s.d. $v \in B_{t'}$ ist. Sei t_2 derjenige Nachbar von t_1, der auf dem Weg in T zwischen t_1 und t' liegt.

Skizze: T:



Setze $X := B_{t_1} \cap B_{t_2}$.

Laut unserer Annahme ist $A \cap B_{t_1} = \emptyset$, also auch $A \cap X = \emptyset$.

Und es gilt: $A \subseteq U_{i_0} \setminus X$ für $i_0 := 2$.

Gemäß unserer Wahl, Kanten von T zu orientieren, hat die Kante zwischen t_1 und t_2 in $\vec{T}$ also die Richtung $\underset{t_1}{\circ} \longrightarrow \underset{t_2}{\circ}$.

Aber dies ist ein Widerspruch dazu, dass der Knoten t_1 am Ende eines gerichteten Wegs in $\vec{T}$ von <u>maximaler Länge</u> liegt.

$\square$

Folgerung B.7

Aus Bsp B.5 wissen wir:

- $bd(C_n) \geq 3$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$
- $bd(G_{n \times n}) \geq n+1$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

Gemäß Satz B.6 (Seymour & Thomas) folgt:

- $bw(C_n) \geq 2$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$
- $bw(G_{n \times n}) \geq n$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

Aus Bsp B.2 (d)-(e) bzw Bsp B.4 wissen wir bereits, dass $bw(C_n) \leq 2$ und $bw(G_{n \times n}) \leq n$ ist.
Somit gilt:

- $bw(C_n) = 2$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$
- $bw(G_{n \times n}) = n$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

B.3 Eigenschaften von Baumzerlegungen

Definition B.8 (kleine Baumzerlegungen)

Eine Baumzerlegung $(T, \mathcal{B})$ heißt klein, wenn f.a. $s, t \in V(T)$ mit $s \neq t$ gilt: $B_s \not\subseteq B_t$.

Lemma B.9

Sei G ein Graph.

(a) Für jede kleine Baumzerlegung $(T, \mathcal{B})$ von G ist $|V(T)| \leq |V(G)|$.

(b) Es gibt eine kleine Baumzerlegung von G der Weite $bw(G)$.

Beweis:

(a) Per Induktion nach $|V(G)|$.

Induktionsanfang: $|V(G)| = 1$: klar.

Induktionsschritt: Sei G ein Graph mit $|V(G)| > 1$ und sei $(T, \mathcal{B})$ eine kleine Baumzerlegung von G.

Sei t ein Blatt von T, sei s der Nachbar von t in T und sei $X := B_t \setminus B_s$. Skizze: T:

Da $(T, \mathcal{B})$ klein ist, ist $X \neq \emptyset$.

Da $(T, \mathcal{B})$ eine Baumzerlegung ist, ist $X \cap B_u = \emptyset$ f.a. $u \in V(T) \setminus \{t\}$.

Man sieht leicht, dass $(T \setminus \{t\}, (B_u)_{u \in V(T) \setminus \{t\}})$ eine kleine Baumzerlegung von $G \setminus X$ ist (Details: Übung).

Da $|V(G\setminus X)| < |V(G)|$ ist, gilt gemäß Induktionsannahme, dass $|V(T\setminus\{t\})| \le |V(G\setminus X)|$ ist.

Wegen $|V(T\setminus\{t\})| = |V(T)|-1$ und $|V(G\setminus X)| \le |V(G)|-1$ (da $X\neq\emptyset$)

folgt also:

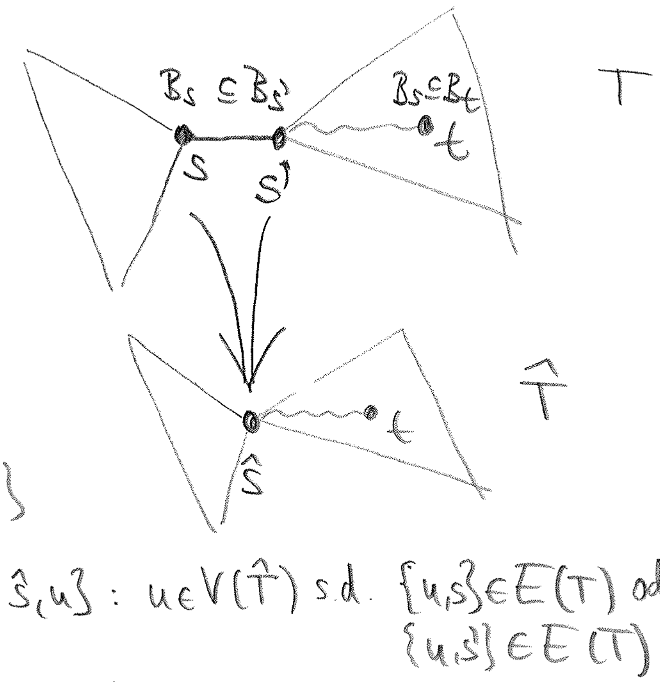
$$|V(T)|-1 \le |V(G)|-1, \text{ d.h. } |V(T)| \le |V(G)|.$$

(b) Sei (T,B) eine Baumzerlegung von G der Weite $bw(G)$, so dass $|V(T)|$ kleinstmöglich ist.
Wir zeigen im Folgenden, dass (T,B) klein ist.

Angenommen, (T,B) wäre nicht klein.
Dann gibt es $s,t\in V(T)$ mit $s\neq t$ und $B_s\subseteq B_t$.

Auf Grund der Weg-Eigenschaft gilt f.a. $t'\in V(T)$, die auf dem Weg von s nach t in T liegen: $B_s\subseteq B_{t'}$.
Sei s' derjenige Nachbar von s, der auf dem Weg von s nach t liegt.

Skizze:



Wir wissen: $B_s\subseteq B_{s'}$.
Sei $\hat{T}$ der Baum, der aus T durch Kontraktion der Kante s — s' entsteht.

D.h.: $V(\hat{T}) := \left(V(T)\setminus\{s,s'\}\right) \,\dot\cup\, \{\hat{s}\}$

$E(\hat{T}) := E(T\setminus\{s,s'\}) \cup \{\{\hat{s},u\} : u\in V(\hat{T}) \text{ s.d. } \{u,s\}\in E(T) \text{ oder } \{u,s'\}\in E(T)\}$

Sei $\hat{B}_{\hat{s}} := \hat{B}_{s'}$ und $\hat{B}_u := B_u$ f.a. $u\in V(\hat{T})\setminus\{\hat{s}\}$.

Dann ist $(\hat{T}, (\hat{B}_u)_{u\in V(\hat{T})})$ eine

Baumzerlegung von G, die die gleiche Weite wie (T,B) hat und für die $|V(\hat{T})| < |V(T)|$ ist.

$\lightning$ Widerspruch zur Wahl von T.

$\square$

Satz B.10

Für jedes $w \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gibt es eine Zahl $c(w) \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ s.d. für jeden Graphen G mit $bw(G) \leq w$ gilt: $\|G\| := |V(G)| + |E(G)| \leq c(w) \cdot |V(G)|$.

Beweis:

Sei G ein Graph mit $bw(G) \leq w$.
Gemäß Lemma B.9 gibt es eine kleine Baumzerlegung (T,B) von G der Weite $bw(G)$, und es gilt:

$|V(T)| \leq |V(G)|$.

Für jeden Beutel B_t dieser Baumzerlegung ist $|B_t| \leq w+1$, und daher werden von B_t höchstens $\binom{w+1}{2}$ verschiedene Kanten abgedeckt.
Da jede Kante von G von mindestens einem Beutel der Baumzerlegung abgedeckt wird, ist

$$|E(G)| \leq \sum_{t\in V(T)} \binom{w+1}{2} = \binom{w+1}{2} \cdot |V(T)|.$$

Somit ist $\|G\| = |V(G)| + |E(G)| \leq \left(1+\binom{w+1}{2}\right)\cdot |V(T)|$. Wähle also $c(w) := 1+\binom{w+1}{2}$.

$\square$

Theorem B.11 (Satz von Bodlaender)

Es gibt einen Algorithmus, der bei Eingabe eines Graphen G eine kleine Baumzerlegung von G der Weite $w := bw(G)$ in Zeit

$$2^{O(w^3)} \cdot O(|V(G)|)$$

berechnet.

(Hier ohne Beweis)

B.4 Der Satz von Courcelle

Die Logik CMSO ist die Erweiterung der monadischen Logik zweiter Stufe MSO um zusätzliche atomare Formeln der Form "$|X| \equiv i \bmod m$" für jede Mengenvariable X und alle $m, i \in \mathbb{N}$ mit $m \geq 2$, $i \in \{0, \dots, m-1\}$.

Zu jeder FO+MOD-Formel φ kann man leicht eine zu φ äquivalente CMSO-Formel $\hat{\varphi}$ mit $frei(\hat{\varphi}) = frei(\varphi)$ konstruieren.

Definition B.12

Sei σ eine Signatur und $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur.
Die Baumweite von $\mathcal{A}$ (kurz: $bw(\mathcal{A})$) ist definiert als die Baumweite des Gaifman-Graphen G von $\mathcal{A}$.

Theorem B.13 (Eine Variante des Satzes von Courcelle)

Sei σ eine Signatur, sei $\varphi(x)$ eine CMSO[σ]-Formel mit $\mathrm{frei}(\varphi) \subseteq \{x\}$, wobei x eine Variable erster Stufe ist.
Sei $w \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Es gibt eine Zahl $c(\varphi, w) \in \mathbb{N}$ und einen Algorithmus, der bei Eingabe einer σ-Struktur $\mathcal{A}$ mit $bw(\mathcal{A}) \leq w$ in Zeit $O(c(\varphi,w) \cdot |A|)$ die Menge $[\![\varphi(x)]\!]^{\mathcal{A}} := \{ a \in A : \mathcal{A} \models \varphi[a] \}$ berechnet.

(Hier ohne Beweis)