Das Weihnachtstheorem

Das Weihnachtstheorem

Theorem 24.12

Es gibt einen Weihnachtsmann.

Ein Universum voller Formeln und Lebewesen

Um das Weihnachtstheorem zu beweisen, definieren wir zunächst eine Struktur, welche die Logik und die Welt der Lebewesen miteinander verbindet.

Ein Universum voller Formeln und Lebewesen

Um das Weihnachtstheorem zu beweisen, definieren wir zunächst eine Struktur, welche die Logik und die Welt der Lebewesen miteinander verbindet.

Definition

Das logisch-lebendige Universum A_{lol} besteht aus allen Formeln der Logik erster Stufe und allen Lebewesen, die auf der Erde existieren:

$$A_{\text{lol}} := \{\varphi \ : \ \varphi \in \text{FO}[\sigma] \text{ für eine Signatur } \sigma\} \cup \{\ell \ : \ \ell \text{ ist ein Lebewesen}\}$$

Die logisch-lebendige Struktur

Um Aussagen über Formeln und Lebewesen zu tätigen, verwenden wir die logisch-lebendige Signatur σ_{lol}, die für jede Teilmenge M des logisch-lebendigen Universums ein einstelliges Relationssysmbol P_M bereit stellt. Formal:

$$\sigma_{\text{lol}} := \{P_M \ : \ M \subseteq A_{\text{lol}}\}$$

Die logisch-lebendige Struktur

Um Aussagen über Formeln und Lebewesen zu tätigen, verwenden wir die logisch-lebendige Signatur σ_{lol}, die für jede Teilmenge M des logisch-lebendigen Universums ein einstelliges Relationssysmbol P_M bereit stellt. Formal:

$$\sigma_{\text{lol}} := \{P_M \ : \ M \subseteq A_{\text{lol}}\}$$

Die logisch-lebendige Welt lässt sich nun als die folgende σ_{lol}-Struktur über dem Universum A_{lol} auffassen.

Die logisch-lebendige Struktur

Um Aussagen über Formeln und Lebewesen zu tätigen, verwenden wir die logisch-lebendige Signatur σ_{lol}, die für jede Teilmenge M des logisch-lebendigen Universums ein einstelliges Relationssysmbol P_M bereit stellt. Formal:

$$\sigma_{\text{lol}} := \{ P_M \ : \ M \subseteq A_{\text{lol}} \}$$

Die logisch-lebendige Welt lässt sich nun als die folgende σ_{lol}-Struktur über dem Universum A_{lol} auffassen.

Definition

Die logisch-lebendige Struktur $\mathcal{A}_{\text{lol}}$ ist die σ_{lol}-Struktur

$$\mathcal{A}_{\text{lol}} := \left(A_{\text{lol}}, \ (P_M^{\mathcal{A}_{\text{lol}}})_{P_M \in \sigma_{\text{lol}}} \right)$$

mit $P_M^{\mathcal{A}_{\text{lol}}} := M$ für alle $P_M \in \sigma_{\text{lol}}$.

Beispiele

Wir betrachten die folgenden Teilmengen von A_{lol}:

- RT . . . die Menge der Rentiere

Beispiele

Wir betrachten die folgenden Teilmengen von A_{lol}:

- RT ... die Menge der Rentiere
- ST ... die Menge der Säugetiere

Beispiele

Wir betrachten die folgenden Teilmengen von A_{lol}:

- RT . . . die Menge der Rentiere
- ST . . . die Menge der Säugetiere
- ERF . . . die Menge der erfüllbaren Formeln

Beispiele

Wir betrachten die folgenden Teilmengen von A_{lol}:

- RT . . . die Menge der Rentiere
- ST . . . die Menge der Säugetiere
- ERF . . . die Menge der erfüllbaren Formeln
- ALLG . . . die Menge der allgemeingültigen Formeln

Beispiele

Wir betrachten die folgenden Teilmengen von A_{lol}:

- RT ... die Menge der Rentiere
- ST ... die Menge der Säugetiere
- ERF ... die Menge der erfüllbaren Formeln
- ALLG ... die Menge der allgemeingültigen Formeln

Dann folgt:

$$\mathcal{A}_{\text{lol}} \models \forall x \left(P_{\text{RT}}(x) \rightarrow P_{\text{ST}}(x) \right)$$

Beispiele

Wir betrachten die folgenden Teilmengen von A_{lol}:

- RT …die Menge der Rentiere
- ST …die Menge der Säugetiere
- ERF …die Menge der erfüllbaren Formeln
- ALLG …die Menge der allgemeingültigen Formeln

Dann folgt:

$$\mathcal{A}_{\mathrm{lol}} \models \forall x \left(P_{\mathrm{RT}}(x) \rightarrow P_{\mathrm{ST}}(x) \right)$$

$$\mathcal{A}_{\mathrm{lol}} \not\models \forall x \left(P_{\mathrm{ST}}(x) \rightarrow P_{\mathrm{RT}}(x) \right)$$

Beispiele

Wir betrachten die folgenden Teilmengen von A_{lol}:

- RT ... die Menge der Rentiere
- ST ... die Menge der Säugetiere
- ERF ... die Menge der erfüllbaren Formeln
- ALLG ... die Menge der allgemeingültigen Formeln

Dann folgt:

$$\mathcal{A}_{\text{lol}} \models \forall x \left(P_{\text{RT}}(x) \rightarrow P_{\text{ST}}(x) \right)$$

$$\mathcal{A}_{\text{lol}} \not\models \forall x \left(P_{\text{ST}}(x) \rightarrow P_{\text{RT}}(x) \right)$$

$$\mathcal{A}_{\text{lol}} \models \exists x \left(P_{\text{ERF}}(x) \wedge \neg P_{\text{ALLG}}(x) \right)$$

Beispiele

Wir betrachten die folgenden Teilmengen von A_{lol}:

- RT ... die Menge der Rentiere
- ST ... die Menge der Säugetiere
- ERF ... die Menge der erfüllbaren Formeln
- ALLG ... die Menge der allgemeingültigen Formeln

Dann folgt:

$$\mathcal{A}_{\mathrm{lol}} \models \forall x \left(P_{\mathrm{RT}}(x) \to P_{\mathrm{ST}}(x)\right)$$

$$\mathcal{A}_{\mathrm{lol}} \not\models \forall x \left(P_{\mathrm{ST}}(x) \to P_{\mathrm{RT}}(x)\right)$$

$$\mathcal{A}_{\mathrm{lol}} \models \exists x \left(P_{\mathrm{ERF}}(x) \land \neg P_{\mathrm{ALLG}}(x)\right)$$

$$\mathcal{A}_{\mathrm{lol}} \not\models \exists x \left(P_{\mathrm{ALLG}}(x) \land P_{\mathrm{ST}}(x)\right)$$

Sei nun $W \subseteq A_{\text{lol}}$ die (möglicherweise leere) Menge der Weihnachtsmänner.

Sei nun $\mathrm{W} \subseteq A_{\mathrm{lol}}$ die (möglicherweise leere) Menge der Weihnachtsmänner. Dann ist das Weihnachtstheorem äquivalent zu der Aussage

$$\mathcal{A}_{\mathrm{lol}} \models \exists y \, P_{\mathrm{W}}(y)$$

Sei nun $\mathrm{W} \subseteq A_{\mathrm{lol}}$ die (möglicherweise leere) Menge der Weihnachtsmänner. Dann ist das Weihnachtstheorem äquivalent zu der Aussage

$$\mathcal{A}_{\mathrm{lol}} \models \exists y \, P_{\mathrm{W}}(y)$$

Für jede Formel $\varphi \in A_{\mathrm{lol}}$ sei

- $\beta_\varphi \colon \mathrm{VAR} \to A_{\mathrm{lol}}$ die Belegung mit $\beta_\varphi(z) := \varphi$ für alle $z \in \mathrm{VAR}$ und

Sei nun $W \subseteq A_{\text{lol}}$ die (möglicherweise leere) Menge der Weihnachtsmänner. Dann ist das Weihnachtstheorem äquivalent zu der Aussage

$$\mathcal{A}_{\text{lol}} \models \exists y\, P_W(y)$$

Für jede Formel $\varphi \in A_{\text{lol}}$ sei

- $\beta_\varphi \colon \text{VAR} \to A_{\text{lol}}$ die Belegung mit $\beta_\varphi(z) := \varphi$ für alle $z \in \text{VAR}$ und
- $\mathcal{I}_\varphi := (\mathcal{A}_{\text{lol}}, \beta_\varphi)$ die dazugehörige Interpretation.

Sei nun $\mathsf{W} \subseteq A_{\mathsf{lol}}$ die (möglicherweise leere) Menge der Weihnachtsmänner. Dann ist das Weihnachtstheorem äquivalent zu der Aussage

$$\mathcal{A}_{\mathsf{lol}} \models \exists y \, P_{\mathsf{W}}(y)$$

Für jede Formel $\varphi \in A_{\mathsf{lol}}$ sei

- $\beta_\varphi \colon \mathsf{VAR} \to A_{\mathsf{lol}}$ die Belegung mit $\beta_\varphi(z) := \varphi$ für alle $z \in \mathsf{VAR}$ und
- $\mathcal{I}_\varphi := (\mathcal{A}_{\mathsf{lol}}, \beta_\varphi)$ die dazugehörige Interpretation.

Sei T die Menge der Formeln, die wahre Aussagen über sich selbst machen:

$$\mathsf{T} := \{\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma_{\mathsf{lol}}] \ : \ \mathcal{I}_\varphi \models \varphi\}$$

Sei nun $\mathrm{W} \subseteq A_{\mathrm{lol}}$ die (möglicherweise leere) Menge der Weihnachtsmänner. Dann ist das Weihnachtstheorem äquivalent zu der Aussage

$$\mathcal{A}_{\mathrm{lol}} \models \exists y\, P_{\mathrm{W}}(y)$$

Für jede Formel $\varphi \in A_{\mathrm{lol}}$ sei

- $\beta_\varphi \colon \mathrm{VAR} \to A_{\mathrm{lol}}$ die Belegung mit $\beta_\varphi(z) := \varphi$ für alle $z \in \mathrm{VAR}$ und
- $\mathcal{I}_\varphi := (\mathcal{A}_{\mathrm{lol}}, \beta_\varphi)$ die dazugehörige Interpretation.

Sei T die Menge der Formeln, die wahre Aussagen über sich selbst machen:

$$\mathrm{T} := \{\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma_{\mathrm{lol}}] \;:\; \mathcal{I}_\varphi \models \varphi\}$$

Beispiele

- Für alle σ_{lol}-Sätze φ gilt: $\varphi \in \mathrm{T} \iff \mathcal{A}_{\mathrm{lol}} \models \varphi$

Sei nun $\text{W} \subseteq A_{\text{lol}}$ die (möglicherweise leere) Menge der Weihnachtsmänner. Dann ist das Weihnachtstheorem äquivalent zu der Aussage

$$\mathcal{A}_{\text{lol}} \models \exists y\, P_{\text{W}}(y)$$

Für jede Formel $\varphi \in A_{\text{lol}}$ sei

- $\beta_\varphi\colon \text{VAR} \to A_{\text{lol}}$ die Belegung mit $\beta_\varphi(z) := \varphi$ für alle $z \in \text{VAR}$ und
- $\mathcal{I}_\varphi := (\mathcal{A}_{\text{lol}}, \beta_\varphi)$ die dazugehörige Interpretation.

Sei T die Menge der Formeln, die wahre Aussagen über sich selbst machen:

$$\text{T} := \{\varphi \in \text{FO}[\sigma_{\text{lol}}] \;:\; \mathcal{I}_\varphi \models \varphi\}$$

Beispiele

- Für alle σ_{lol}-Sätze φ gilt: $\varphi \in \text{T} \iff \mathcal{A}_{\text{lol}} \models \varphi$
- $P_{\text{ERF}}(x) \wedge \neg P_{\text{ALLG}}(x) \;\in\; \text{T}$,

Sei nun $\mathsf{W} \subseteq A_{\mathsf{lol}}$ die (möglicherweise leere) Menge der Weihnachtsmänner. Dann ist das Weihnachtstheorem äquivalent zu der Aussage

$$\mathcal{A}_{\mathsf{lol}} \models \exists y\, P_{\mathsf{W}}(y)$$

Für jede Formel $\varphi \in A_{\mathsf{lol}}$ sei

- $\beta_\varphi \colon \mathsf{VAR} \to A_{\mathsf{lol}}$ die Belegung mit $\beta_\varphi(z) := \varphi$ für alle $z \in \mathsf{VAR}$ und
- $\mathcal{I}_\varphi := (\mathcal{A}_{\mathsf{lol}}, \beta_\varphi)$ die dazugehörige Interpretation.

Sei T die Menge der Formeln, die wahre Aussagen über sich selbst machen:

$$\mathsf{T} := \{\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma_{\mathsf{lol}}] \ : \ \mathcal{I}_\varphi \models \varphi\}$$

Beispiele

- Für alle σ_{lol}-Sätze φ gilt: $\varphi \in \mathsf{T} \iff \mathcal{A}_{\mathsf{lol}} \models \varphi$
- $P_{\mathsf{ERF}}(x) \wedge \neg P_{\mathsf{ALLG}}(x) \ \in \ \mathsf{T}$,
  da $P_{\mathsf{ERF}}(x) \wedge \neg P_{\mathsf{ALLG}}(x)$ erfüllbar, aber nicht allgemeingültig ist.

Sei nun $\mathsf{W} \subseteq A_{\mathsf{lol}}$ die (möglicherweise leere) Menge der Weihnachtsmänner. Dann ist das Weihnachtstheorem äquivalent zu der Aussage

$$\mathcal{A}_{\mathsf{lol}} \models \exists y\, P_{\mathsf{W}}(y)$$

Für jede Formel $\varphi \in A_{\mathsf{lol}}$ sei

- $\beta_\varphi\colon \mathsf{VAR} \to A_{\mathsf{lol}}$ die Belegung mit $\beta_\varphi(z) := \varphi$ für alle $z \in \mathsf{VAR}$ und
- $\mathcal{I}_\varphi := (\mathcal{A}_{\mathsf{lol}}, \beta_\varphi)$ die dazugehörige Interpretation.

Sei T die Menge der Formeln, die wahre Aussagen über sich selbst machen:

$$\mathsf{T} := \{\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma_{\mathsf{lol}}] \ :\ \mathcal{I}_\varphi \models \varphi\}$$

Beispiele

- Für alle σ_{lol}-Sätze φ gilt: $\varphi \in \mathsf{T} \iff \mathcal{A}_{\mathsf{lol}} \models \varphi$
- $P_{\mathsf{ERF}}(x) \wedge \neg P_{\mathsf{ALLG}}(x) \ \in\ \mathsf{T}$,
  da $P_{\mathsf{ERF}}(x) \wedge \neg P_{\mathsf{ALLG}}(x)$ erfüllbar, aber nicht allgemeingültig ist.
- $\neg P_{\mathsf{ST}}(y) \ \in\ \mathsf{T}$, da $\neg P_{\mathsf{ST}}(y)$ kein Säugetier ist.

Im folgenden sei $\psi := \big(P_{\mathsf{T}}(x) \rightarrow \exists y\, P_{\mathsf{W}}(y)\big)$.

Im folgenden sei $\psi := \big(P_{\mathsf{T}}(x) \to \exists y\, P_{\mathsf{W}}(y)\big)$.

Lemma 1

$\mathcal{I}_\psi \models P_{\mathsf{T}}(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{I}_\psi \models \psi$

Im folgenden sei $\psi := \big(P_\mathsf{T}(x) \to \exists y\, P_\mathsf{W}(y)\big)$.

Lemma 1

$\mathcal{I}_\psi \models P_\mathsf{T}(x) \quad\Longleftrightarrow\quad \mathcal{I}_\psi \models \psi$

Beweis

$$\mathcal{I}_\psi \models P_\mathsf{T}(x) \quad\Longleftrightarrow\quad \beta_\psi(x) \in P_\mathsf{T}^{\mathcal{A}_\mathsf{lol}} \quad (\text{da } \mathcal{I}_\psi = (\mathcal{A}_\mathsf{lol}, \beta_\psi))$$

Im folgenden sei $\psi := \big(P_{\mathsf{T}}(x) \to \exists y\, P_{\mathsf{W}}(y)\big)$.

Lemma 1

$\mathcal{I}_\psi \models P_{\mathsf{T}}(x) \quad\iff\quad \mathcal{I}_\psi \models \psi$

Beweis

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\psi \models P_{\mathsf{T}}(x) \quad &\iff \quad \beta_\psi(x) \in P_{\mathsf{T}}^{\mathcal{A}_{\mathsf{lol}}} && (\text{da } \mathcal{I}_\psi = (\mathcal{A}_{\mathsf{lol}}, \beta_\psi)) \\ &\iff \quad \psi \in \mathsf{T} && (\text{da } \beta_\psi(x) := \psi \text{ und } P_{\mathsf{T}}^{\mathcal{A}_{\mathsf{lol}}} := \mathsf{T}) \end{aligned}$$

Im folgenden sei $\psi := \big(P_{\mathsf{T}}(x) \rightarrow \exists y\, P_{\mathsf{W}}(y)\big)$.

Lemma 1

$\mathcal{I}_\psi \models P_{\mathsf{T}}(x) \quad\Longleftrightarrow\quad \mathcal{I}_\psi \models \psi$

Beweis

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_\psi \models P_{\mathsf{T}}(x) \quad &\Longleftrightarrow \quad \beta_\psi(x) \in P_{\mathsf{T}}^{\mathcal{A}_{\mathsf{lol}}} && \text{(da } \mathcal{I}_\psi = (\mathcal{A}_{\mathsf{lol}}, \beta_\psi)\text{)} \\
&\Longleftrightarrow \quad \psi \in \mathsf{T} && \text{(da } \beta_\psi(x) := \psi \text{ und } P_{\mathsf{T}}^{\mathcal{A}_{\mathsf{lol}}} := \mathsf{T}\text{)} \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathcal{I}_\psi \models \psi && \text{(Definition von T)} \qquad \square
\end{aligned}
$$

Im folgenden sei $\psi := \big(P_{\mathsf{T}}(x) \to \exists y\, P_{\mathsf{W}}(y)\big)$.

Lemma 1

$$\mathcal{I}_\psi \models P_{\mathsf{T}}(x) \quad\Longleftrightarrow\quad \mathcal{I}_\psi \models \psi$$

Lemma 2

$$(P_{\mathsf{T}}(x) \to \psi) \;\equiv\; \psi$$

Im folgenden sei $\psi := \big(P_{\mathsf{T}}(x) \to \exists y\, P_{\mathsf{W}}(y)\big)$.

Lemma 1

$\mathcal{I}_\psi \models P_{\mathsf{T}}(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{I}_\psi \models \psi$

Lemma 2

$(P_{\mathsf{T}}(x) \to \psi) \;\equiv\; \psi$

Beweis.

Das Lemma folgt aus einfachen Äquivalenzumformumgen:

$$\big(P_{\mathsf{T}}(x) \to \psi\big) \;=\; \big(P_{\mathsf{T}}(x) \to \big(P_{\mathsf{T}}(x) \to \exists y P_{\mathsf{W}}(y)\big)\big)$$

Im folgenden sei $\psi := \big(P_{\mathsf{T}}(x) \to \exists y\, P_{\mathsf{W}}(y)\big)$.

Lemma 1

$\mathcal{I}_\psi \models P_{\mathsf{T}}(x) \quad\Longleftrightarrow\quad \mathcal{I}_\psi \models \psi$

Lemma 2

$(P_{\mathsf{T}}(x) \to \psi) \;\equiv\; \psi$

Beweis.

Das Lemma folgt aus einfachen Äquivalenzumformumgen:

$$\begin{aligned}
\big(P_{\mathsf{T}}(x) \to \psi\big) \;&=\; \big(P_{\mathsf{T}}(x) \to \big(P_{\mathsf{T}}(x) \to \exists y P_{\mathsf{W}}(y)\big)\big) \\
&\equiv\; \big(\neg P_{\mathsf{T}}(x) \vee \big(\neg P_{\mathsf{T}}(x) \vee \exists y P_{\mathsf{W}}(y)\big)\big)
\end{aligned}$$

Im folgenden sei $\psi := \big(P_{\mathsf{T}}(x) \to \exists y\, P_{\mathsf{W}}(y)\big)$.

Lemma 1

$\mathcal{I}_\psi \models P_{\mathsf{T}}(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{I}_\psi \models \psi$

Lemma 2

$(P_{\mathsf{T}}(x) \to \psi) \;\equiv\; \psi$

Beweis.

Das Lemma folgt aus einfachen Äquivalenzumformumgen:

$$\begin{aligned}
\big(P_{\mathsf{T}}(x) \to \psi\big) &= \big(P_{\mathsf{T}}(x) \to \big(P_{\mathsf{T}}(x) \to \exists y P_{\mathsf{W}}(y)\big)\big) \\
&\equiv \big(\neg P_{\mathsf{T}}(x) \vee \big(\neg P_{\mathsf{T}}(x) \vee \exists y P_{\mathsf{W}}(y)\big)\big) \\
&\equiv \big(\neg P_{\mathsf{T}}(x) \vee \exists y P_{\mathsf{W}}(y)\big)
\end{aligned}$$

Im folgenden sei $\psi := \big(P_{\mathsf{T}}(x) \to \exists y\, P_{\mathsf{W}}(y)\big)$.

Lemma 1

$\mathcal{I}_\psi \models P_{\mathsf{T}}(x) \iff \mathcal{I}_\psi \models \psi$

Lemma 2

$(P_{\mathsf{T}}(x) \to \psi) \equiv \psi$

Beweis.

Das Lemma folgt aus einfachen Äquivalenzumformumgen:

$$\begin{aligned}
\big(P_{\mathsf{T}}(x) \to \psi\big) &= \big(P_{\mathsf{T}}(x) \to \big(P_{\mathsf{T}}(x) \to \exists y P_{\mathsf{W}}(y)\big)\big) \\
&\equiv \big(\neg P_{\mathsf{T}}(x) \vee \big(\neg P_{\mathsf{T}}(x) \vee \exists y P_{\mathsf{W}}(y)\big)\big) \\
&\equiv \big(\neg P_{\mathsf{T}}(x) \vee \exists y P_{\mathsf{W}}(y)\big) \\
&\equiv \big(P_{\mathsf{T}}(x) \to \exists y P_{\mathsf{W}}(y)\big) = \psi \qquad \square
\end{aligned}$$

Im folgenden sei $\psi := \big(P_{\mathsf{T}}(x) \to \exists y\, P_{\mathsf{W}}(y)\big)$.

Lemma 1

$\mathcal{I}_\psi \models P_{\mathsf{T}}(x) \quad\Longleftrightarrow\quad \mathcal{I}_\psi \models \psi$

Lemma 2

$(P_{\mathsf{T}}(x) \to \psi) \;\equiv\; \psi$

Beweis von Theorem 24.12.

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{A}_{\mathsf{lol}} \models \exists y\, P_{\mathsf{W}}(y)$.

Im folgenden sei $\psi := \big(P_{\mathsf{T}}(x) \to \exists y\, P_{\mathsf{W}}(y)\big)$.

Lemma 1

$\mathcal{I}_\psi \models P_{\mathsf{T}}(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{I}_\psi \models \psi$

Lemma 2

$(P_{\mathsf{T}}(x) \to \psi) \;\equiv\; \psi$

Beweis von Theorem 24.12.

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{A}_{\mathsf{lol}} \models \exists y\, P_{\mathsf{W}}(y)$.

Aus den beiden Lemmata und der Definition von ψ folgt:

Im folgenden sei $\psi := \big(P_{\mathsf{T}}(x) \to \exists y\, P_{\mathsf{W}}(y)\big)$.

Lemma 1

$\mathcal{I}_\psi \models P_{\mathsf{T}}(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{I}_\psi \models \psi$

Lemma 2

$(P_{\mathsf{T}}(x) \to \psi) \;\equiv\; \psi$

Beweis von Theorem 24.12.

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{A}_{\mathsf{lol}} \models \exists y\, P_{\mathsf{W}}(y)$.

Aus den beiden Lemmata und der Definition von ψ folgt:

(A) $\qquad \mathcal{I}_\psi \models (P_{\mathsf{T}}(x) \to \psi) \qquad$ (folgt aus Lemma 1)

Im folgenden sei $\psi := \big(P_{\mathsf{T}}(x) \to \exists y\, P_{\mathsf{W}}(y)\big)$.

Lemma 1

$\mathcal{I}_\psi \models P_{\mathsf{T}}(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{I}_\psi \models \psi$

Lemma 2

$(P_{\mathsf{T}}(x) \to \psi) \;\equiv\; \psi$

Beweis von Theorem 24.12.

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{A}_{\mathsf{lol}} \models \exists y\, P_{\mathsf{W}}(y)$.

Aus den beiden Lemmata und der Definition von ψ folgt:

(A) $\mathcal{I}_\psi \models (P_{\mathsf{T}}(x) \to \psi)$ (folgt aus Lemma 1)

(B) $\mathcal{I}_\psi \models \psi$ (folgt aus (A) und Lemma 2)

Im folgenden sei $\psi := \big(P_{\mathsf{T}}(x) \rightarrow \exists y\, P_{\mathsf{W}}(y)\big)$.

Lemma 1

$\mathcal{I}_\psi \models P_{\mathsf{T}}(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{I}_\psi \models \psi$

Lemma 2

$(P_{\mathsf{T}}(x) \rightarrow \psi) \;\equiv\; \psi$

Beweis von Theorem 24.12.

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{A}_{\mathsf{lol}} \models \exists y\, P_{\mathsf{W}}(y)$.

Aus den beiden Lemmata und der Definition von ψ folgt:

(A)	$\mathcal{I}_\psi \models (P_{\mathsf{T}}(x) \rightarrow \psi)$	(folgt aus Lemma 1)
(B)	$\mathcal{I}_\psi \models \psi$	(folgt aus (A) und Lemma 2)
(C)	$\mathcal{I}_\psi \models P_{\mathsf{T}}(x)$	(folgt aus (B) und Lemma 1)

Im folgenden sei $\psi := \big(P_{\mathsf{T}}(x) \to \exists y\, P_{\mathsf{W}}(y)\big)$.

Lemma 1

$\mathcal{I}_\psi \models P_{\mathsf{T}}(x) \quad\Longleftrightarrow\quad \mathcal{I}_\psi \models \psi$

Lemma 2

$(P_{\mathsf{T}}(x) \to \psi) \;\equiv\; \psi$

Beweis von Theorem 24.12.

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{A}_{\mathsf{lol}} \models \exists y\, P_{\mathsf{W}}(y)$.

Aus den beiden Lemmata und der Definition von ψ folgt:

(A)	$\mathcal{I}_\psi \models (P_{\mathsf{T}}(x) \to \psi)$	(folgt aus Lemma 1)
(B)	$\mathcal{I}_\psi \models \psi$	(folgt aus (A) und Lemma 2)
(C)	$\mathcal{I}_\psi \models P_{\mathsf{T}}(x)$	(folgt aus (B) und Lemma 1)
(D)	$\mathcal{I}_\psi \models \exists y\, P_{\mathsf{W}}(y)$	(modus ponens mit (B) und (C))

Im folgenden sei $\psi := \big(P_{\mathsf{T}}(x) \to \exists y\, P_{\mathsf{W}}(y)\big)$.

Lemma 1

$\mathcal{I}_\psi \models P_{\mathsf{T}}(x) \quad \iff \quad \mathcal{I}_\psi \models \psi$

Lemma 2

$(P_{\mathsf{T}}(x) \to \psi) \;\equiv\; \psi$

Beweis von Theorem 24.12.

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{A}_{\text{lol}} \models \exists y\, P_{\mathsf{W}}(y)$.

Aus den beiden Lemmata und der Definition von ψ folgt:

(A)	$\mathcal{I}_\psi \models (P_{\mathsf{T}}(x) \to \psi)$	(folgt aus Lemma 1)
(B)	$\mathcal{I}_\psi \models \psi$	(folgt aus (A) und Lemma 2)
(C)	$\mathcal{I}_\psi \models P_{\mathsf{T}}(x)$	(folgt aus (B) und Lemma 1)
(D)	$\mathcal{I}_\psi \models \exists y\, P_{\mathsf{W}}(y)$	(modus ponens mit (B) und (C))

$\Longrightarrow \quad \mathcal{A}_{\text{lol}} \models \exists y\, P_{\mathsf{W}}(y) \qquad$ (Koinzidenzlemma und (D)) $\qquad \square$

Historisches

- Der Beweis des Weihnachtstheorems beruht auf Currys Paradoxon, welches verwandt mit dem Paradoxon des Barbiers von Sonnenthal ist.

Historisches

- Der Beweis des Weihnachtstheorems beruht auf Currys Paradoxon, welches verwandt mit dem Paradoxon des Barbiers von Sonnenthal ist.
- Eine wichtige Anwendung dieser Schlussweise ist der Satz von Löb.

Historisches

- Der Beweis des Weihnachtstheorems beruht auf Currys Paradoxon, welches verwandt mit dem Paradoxon des Barbiers von Sonnenthal ist.
- Eine wichtige Anwendung dieser Schlussweise ist der Satz von Löb.
- Mit dem gleichen Argument kann man auch zeigen, dass es neun fliegende Rentiere gibt

Historisches

- Der Beweis des Weihnachtstheorems beruht auf Currys Paradoxon, welches verwandt mit dem Paradoxon des Barbiers von Sonnenthal ist.
- Eine wichtige Anwendung dieser Schlussweise ist der Satz von Löb.
- Mit dem gleichen Argument kann man auch zeigen, dass es neun fliegende Rentiere gibt, d. h.

$$\mathcal{A}_{\mathrm{lol}} \models \exists x_1 \cdots \exists x_9 \Big(\bigwedge_{1 \leqslant i < j \leqslant 9} \neg x_i = x_j \wedge \bigwedge_{i \in [9]} \big(P_{\mathrm{RT}}(x_i) \wedge P_{\mathrm{FLIEGT}}(x_i) \big) \Big)$$

(Details: Übung)

Historisches

- Der Beweis des Weihnachtstheorems beruht auf Currys Paradoxon, welches verwandt mit dem Paradoxon des Barbiers von Sonnenthal ist.
- Eine wichtige Anwendung dieser Schlussweise ist der Satz von Löb.
- Mit dem gleichen Argument kann man auch zeigen, dass es neun fliegende Rentiere gibt, d. h.

$$\mathcal{A}_{\text{lol}} \models \exists x_1 \cdots \exists x_9 \Big(\bigwedge_{1 \leqslant i < j \leqslant 9} \neg x_i = x_j \wedge \bigwedge_{i \in [9]} \big(P_{\text{RT}}(x_i) \wedge P_{\text{FLIEGT}}(x_i) \big) \Big)$$

(Details: Übung)

Die zwielichtige Stelle in unserem Beweis ist die selbstbezügliche Definition von $P_T^{\mathcal{A}_{\text{lol}}}$, welche die Menge aller Sätze enthält, die von $\mathcal{A}_{\text{lol}}$ erfüllt werden. Dadurch haben wir $\mathcal{A}_{\text{lol}}$ unter Verwendung von $\mathcal{A}_{\text{lol}}$ definiert, was im allgemeinen nicht erlaubt ist.