Kapitel 3:

Logik erster Stufe

Abschnitt 3.1:

Strukturen

Strukturen

Wir führen einen allgemeinen Strukturbegriff ein, der es uns erlaubt:

- mathematische Strukturen wie Gruppen, Körper, Vektorräume, Graphen, etc.
- und die gängigen Modelle der Informatik wie Transitionssysteme, endliche Automaten, relationale Datenbanken, Schaltkreise, etc.

zu beschreiben.

Signaturen

Definition 3.1

Eine Signatur (auch Vokabular oder Symbolmenge) ist eine Menge σ von Relations-, Funktions- und/oder Konstantensymbolen.

Jedes Relationsymbol $R \in \sigma$ und jedes Funktionssymbol $f \in \sigma$ hat eine Stelligkeit (bzw. Arität, engl. arity)

$$\text{ar}(R) \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \qquad \text{bzw.} \qquad \text{ar}(f) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Notation

- In diesem Kapitel bezeichnet der griechische Buchstabe σ (in Worten: sigma) immer eine Signatur.

- Für Relationssymbole verwenden wir normalerweise Großbuchstaben wie R, P, Q, E, für Funktionsymbole verwenden wir meistens Kleinbuchstaben wie f, g, h und für Konstantensymbole Kleinbuchstaben wie c, d.

- Gelegentlich verwenden wir als Relations- und Funktionssymbole auch Zeichen wie $\leqslant$ (2-stelliges Relationssymbol) und $+, \cdot$ (2-stellige Funktionssymbole), und wir verwenden $\underline{0}, \underline{1}$ als Konstantensymbole.

- Die Stelligkeit eines Relations- oder Funktionssymbols deuten wir häufig an, indem wir sie mit Schrägstrich hinter das Symbol schreiben.

Beispiel

Die Notation $R/2$ deutet an, dass R ein 2-stelliges Relationssymbol ist.

Strukturen

Definition 3.2

Eine σ-Struktur $\mathcal{A}$ besteht aus folgenden Komponenten:

- einer nicht-leeren Menge A, dem Universum von $\mathcal{A}$ (auch: Träger, engl. universe, domain),
- für jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ und für $k := \mathrm{ar}(R)$ gibt es eine k-stellige Relation $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^k$,
- für jedes Funktionssymbol $f \in \sigma$ und für $k := \mathrm{ar}(f)$ gibt es eine k-stellige Funktion $f^{\mathcal{A}} : A^k \to A$, und
- für jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ gibt es ein Element $c^{\mathcal{A}} \in A$.

Notation

- Wir beschreiben σ-Strukturen oft in Tupelschreibweise:
  $\mathcal{A} = \big(A,\ (S^{\mathcal{A}})_{S\in\sigma}\big)$.

  Falls $\sigma = \{S_1, \ldots, S_k\}$ endlich ist, schreiben wir auch
  $\mathcal{A} = \big(A,\ S_1^{\mathcal{A}}, \ldots, S_k^{\mathcal{A}}\big)$.

- Wir bezeichnen σ-Strukturen meistens mit „kalligraphischen" Buchstaben wie $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{W}, \ldots$. Das Universum der Strukturen bezeichnen wir dann durch die entsprechenden lateinischen Großbuchstaben, also $A, B, C, W, \ldots$.

Mengen

Für die leere Signatur $\sigma := \emptyset$ bestehen σ-Strukturen nur aus ihrem Universum, sind also einfach (nicht-leere) Mengen.

Graphen

In diesem Kapitel bezeichnet E immer ein zweistelliges Relationssymbol.

- Ein gerichteter Graph (kurz: Digraph) $\mathcal{G} = (V^{\mathcal{G}}, E^{\mathcal{G}})$ mit Knotenmenge $V^{\mathcal{G}}$ und Kantenmenge $E^{\mathcal{G}}$ ist eine $\{E\}$-Struktur. Das Universum ist die Knotenmenge $V^{\mathcal{G}}$.

- Einen ungerichteten Graphen $\mathcal{G} = (V^{\mathcal{G}}, E^{\mathcal{G}})$ mit Knotenmenge $V^{\mathcal{G}}$ und Kantenmenge $E^{\mathcal{G}}$ repräsentieren wir durch eine $\{E\}$-Struktur $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ mit Universum $A = V^{\mathcal{G}}$ und Relation $E^{\mathcal{A}} = \{(u, v) \ : \ \{u, v\} \in E^{\mathcal{G}}\}$. Insbesondere ist $E^{\mathcal{A}}$ *symmetrisch*.

Eigenschaften zweistelliger Relationen

Definition 3.3

Sei $\mathcal{A} = (A, R^{\mathcal{A}})$, wobei $R^{\mathcal{A}}$ eine zweistellige Relation über der Menge A ist (d.h. $(A, R^{\mathcal{A}})$ ist ein gerichteter Graph).

(a) $R^{\mathcal{A}}$ heißt reflexiv, wenn für alle $a \in A$ gilt: $(a, a) \in R^{\mathcal{A}}$.

$R^{\mathcal{A}}$ heißt irreflexiv, wenn für alle $a \in A$ gilt: $(a, a) \notin R^{\mathcal{A}}$.

(b) $R^{\mathcal{A}}$ heißt symmetrisch, wenn für alle $a, b \in A$ gilt:

Wenn $(a, b) \in R^{\mathcal{A}}$, dann ist auch $(b, a) \in R^{\mathcal{A}}$.

$R^{\mathcal{A}}$ heißt antisymmetrisch, wenn für alle $a, b \in A$ mit $a \neq b$ gilt:

Wenn $(a, b) \in R^{\mathcal{A}}$, dann $(b, a) \notin R^{\mathcal{A}}$.

(c) $R^{\mathcal{A}}$ heißt transitiv, wenn für alle $a, b, c \in A$ gilt:

Wenn $(a, b) \in R^{\mathcal{A}}$ und $(b, c) \in R^{\mathcal{A}}$, dann auch $(a, c) \in R^{\mathcal{A}}$.

(d) $R^{\mathcal{A}}$ heißt konnex, wenn für alle $a, b \in A$ gilt:

$$(a, b) \in R^{\mathcal{A}} \text{ oder } (b, a) \in R^{\mathcal{A}} \text{ oder } a = b.$$

Äquivalenzrelationen

Eine Äquivalenzrelation auf eine Menge A ist eine 2-stellige Relation über A, die reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

Beispiele

(a) Gleichheit: Für jede Menge M ist $\{(m,m) \ : \ m \in M\}$ eine Äquivalenzrelation auf M.

(b) Gleichmächtigkeit: Für jede endliche Menge M und deren Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ gilt: $\{(A,B) \ : \ A,B \subseteq M, \ |A| = |B|\}$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{P}(M)$.

(c) Logische Äquivalenz: Die Relation $\{\, (\varphi,\psi) \ : \ \varphi,\psi \in \mathsf{AL}, \ \varphi \equiv \psi \,\}$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge AL aller aussagenlogischen Formeln.

Ordnungen

In diesem Kapitel bezeichnet $\leqslant$ sei immer ein zweistelliges Relationssymbol. Für $\leqslant$ verwenden wir Infixschreibweise, d.h., wir schreiben $x \leqslant^{\mathcal{A}} y$ statt $(x, y) \in \leqslant^{\mathcal{A}}$.

(a) Eine Präordnung ist eine $\{\leqslant\}$-Struktur $\mathcal{A} = (A, \leqslant^{\mathcal{A}})$, bei der $\leqslant^{\mathcal{A}}$ reflexiv und transitiv ist.

(b) Eine partielle Ordnung (oder Halbordnung) ist eine Präordnung $\mathcal{A}$, bei der $\leqslant^{\mathcal{A}}$ antisymmetrisch ist.

(c) Eine lineare (oder totale) Ordnung ist eine partielle Ordnung $\mathcal{A}$, bei der $\leqslant^{\mathcal{A}}$ konnex ist.

Beispiele

(a) Die „kleiner-gleich" Relation auf $\mathbb{N}$ (oder $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{R}$) ist eine lineare Ordnung; die „größer-gleich" auch.

(b) Für jede Menge M ist die Teilmengenrelation $\subseteq$ eine partielle Ordnung auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$; aber keine lineare Ordnung, sofern M mindestens zwei Elemente besitzt. Dasselbe gilt für die Obermengenrelation $\supseteq$.

(c) Die Folgerungsrelation für aussagenlogische Formeln: $\{(\varphi, \psi) \ : \ \varphi, \psi \in \mathsf{AL}, \ \varphi \models \psi\}$ ist eine Präordnung auf der Menge AL, aber keine partielle Ordnung.

Arithmetische Strukturen

$+$ und $\cdot$ seien immer zweistellige Funktionssymbole, für die wir Infixschreibweise verwenden. $\underline{0}$ und $\underline{1}$ seien Konstantensymbole.

- Der Körper der reellen Zahlen ist die $\{+, \cdot, \underline{0}, \underline{1}\}$-Struktur $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$, so dass $A_{\mathbb{R}} := \mathbb{R}$, $+^{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}}$ und $\cdot^{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}}$ sind die normale Addition bzw. Multiplikation auf $\mathbb{R}$, und $\underline{0}^{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}} := 0$, $\underline{1}^{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}} := 1$.

- Der Ring der ganzen Zahlen ist die $\{+, \cdot, \underline{0}, \underline{1}\}$-Struktur $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}$, so dass $A_{\mathbb{Z}} := \mathbb{Z}$, $+^{\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}}$ und $\cdot^{\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}}$ sind die normale Addition bzw. Multiplikation auf $\mathbb{Z}$, und $\underline{0}^{\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}} := 0$, $\underline{1}^{\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}} := 1$.

- Das Standardmodell der Arithmetik ist die $\{+, \cdot, \leqslant, \underline{0}, \underline{1}\}$-Struktur $\mathcal{A}_{\mathbb{N}}$, so dass $A_{\mathbb{N}} := \mathbb{N}$ ist; die Funktionen $+^{\mathcal{A}_{\mathbb{N}}}$ und $\cdot^{\mathcal{A}_{\mathbb{N}}}$ und die Relation $\leqslant^{\mathcal{A}_{\mathbb{N}}}$ sind die normale Addition, Multiplikation bzw. Ordnung auf $\mathbb{N}$, und $\underline{0}^{\mathcal{A}_{\mathbb{N}}} := 0$, $\underline{1}^{\mathcal{A}_{\mathbb{N}}} := 1$.

- Der zweielementige Körper ist die $\{+, \cdot, \underline{0}, \underline{1}\}$-Struktur $\mathcal{F}_2$ mit Universum $F_2 := \{0, 1\}$, den Funktionen $+^{\mathcal{F}_2}$ und $\cdot^{\mathcal{F}_2}$ der Addition bzw. Multiplikation modulo 2, und $\underline{0}^{\mathcal{F}_2} := 0$, $\underline{1}^{\mathcal{F}_2} := 1$.

Wörter als Strukturen

Sei Σ ein endliches, nicht-leeres Alphabet. Für jedes $a \in \Sigma$ sei P_a ein einstelliges Relationssymbol, und es sei

$$\sigma_\Sigma \quad := \quad \{\leqslant\} \cup \{P_a : a \in \Sigma\}.$$

Für jedes nicht-leere Wort $w := w_1 \cdots w_n \in \Sigma^*$ mit $w_1, \ldots, w_n \in \Sigma$ sei $\mathcal{A}_w$ die σ_Σ-Struktur

- mit Universum $A_w := [n]$, für die gilt:
- $\leqslant^{\mathcal{A}_w}$ ist die natürliche lineare Ordnung auf $[n]$,
  d.h., $\leqslant^{\mathcal{A}_w} = \{\ (i,j)\ :\ i,j \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\ \}$,
- Für jedes $a \in \Sigma$ ist $P_a^{\mathcal{A}_w} := \{i \in [n] : w_i = a\}$.

Beispiel

Sei $\Sigma := \{a, b, c\}$. Für $w := abacaba$ ist $\mathcal{A}_w$ die folgende σ_Σ-Struktur:

- $A_w = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- $\leqslant^{\mathcal{A}_w} = \{\ (i,j)\ :\ i,j \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 7\ \}$
- $P_a^{\mathcal{A}_w} = \{1, 3, 5, 7\}, \quad P_b^{\mathcal{A}_w} = \{2, 6\}, \quad P_c^{\mathcal{A}_w} = \{4\}.$

Wortstrukturen

Eine Wortstruktur über Σ ist eine σ_Σ-Struktur $\mathcal{A} = \big(A, \leqslant^{\mathcal{A}},\ (P_a^{\mathcal{A}})_{a\in\Sigma}\big)$ für die gilt:

- das Universum A von $\mathcal{A}$ ist endlich,
- $(A, \leqslant^{\mathcal{A}})$ ist eine lineare Ordnung,
- für jedes $i \in A$ gibt es genau ein $a \in \Sigma$, so dass $i \in P_a^{\mathcal{A}}$.

Beispiel 3.4

Sei $\Sigma := \{a, b, c\}$. Die σ_Σ-Struktur $\mathcal{B}$ mit

- Universum $B = \{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$,
- linearer Ordnung $\leqslant^{\mathcal{B}}$, die besagt, dass $\diamondsuit < \heartsuit < \spadesuit < \clubsuit$ ist, d.h.
  $\leqslant^{\mathcal{B}} = \{(\diamondsuit,\diamondsuit), (\diamondsuit,\heartsuit), (\diamondsuit,\spadesuit), (\diamondsuit,\clubsuit), (\heartsuit,\heartsuit), (\heartsuit,\spadesuit), (\heartsuit,\clubsuit), (\spadesuit,\spadesuit), (\spadesuit,\clubsuit), (\clubsuit,\clubsuit)\}$,
- $P_a^{\mathcal{B}} = \{\diamondsuit,\ \clubsuit\}$
- $P_b^{\mathcal{B}} = \{\heartsuit,\ \spadesuit\}$,
- $P_c^{\mathcal{B}} = \emptyset$,

ist eine Wortstruktur, die das Wort $w = abba$ repräsentiert.

Transitionssysteme

- Sei σ_A eine Menge von zweistelligen Relationssymbolen, die wir als Aktionen bezeichnen und σ_P eine Menge von einstelligen Relationssymbolen, die wir als Propositionen oder Eigenschaften bezeichnen.
- Ein (σ_A, σ_P)-Transitionssystem ist eine $(\sigma_A \cup \sigma_P)$-Struktur $\mathcal{T}$.
- Die Elemente des Universums T von $\mathcal{T}$ bezeichnen wir als Zustände des Systems.
- Die Tripel (s, R, t), wobei $(s, t) \in R^{\mathcal{T}}$ für ein $R \in \sigma_A$, bezeichnen wir als die Übergänge oder Transitionen des Systems.
- Sei c ein Konstantensymbol. Ein (σ_A, σ_P)-Transitionssystem mit Anfangszustand ist eine $(\sigma_A \cup \sigma_P \cup \{c\})$-Struktur $\mathcal{T}$. Den Zustand $c^{\mathcal{T}}$ bezeichnen wir als den Anfangszustand des Systems.

Beispiel

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat $(Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ lässt sich wie folgt als Transitionssystem $\mathcal{T}$ mit Anfangszustand beschreiben:

- $\sigma_A := \{R_a : a \in \Sigma\}$ und $\sigma_P := \{P_F\}$
- $T := Q$
- für jedes $a \in \Sigma$ ist $R_a^{\mathcal{T}} := \{ (q, q') : q' \in \delta(q, a) \}$
- $P_F^{\mathcal{T}} := F$.
- $c^{\mathcal{T}} := q_0$.

Beispiel

Folgendes Transitionssystem $\mathcal{T}$ mit zwei Aktionen namens `druckauftrag` und `kein_auftrag` und einer Eigenschaft namens `druckt` ist ein stark vereinfachtes Modell des Verhaltens eines Druckers:

- $T \; := \; \{ \; \textit{warte}, \; \textit{arbeite} \; \}$,
- $\texttt{druckauftrag}^{\mathcal{T}} \; := \; \{ \; (\textit{warte}, \textit{arbeite}), \; (\textit{arbeite}, \textit{arbeite}) \; \}$,
- $\texttt{kein\_auftrag}^{\mathcal{T}} \; := \; \{ \; (\textit{warte}, \textit{warte}), \; (\textit{arbeite}, \textit{warte}) \; \}$,
- $\texttt{druckt}^{\mathcal{T}} \; := \; \{ \; \textit{arbeite} \; \}$.

Relationale Datenbanken

- Relationale Datenbanken bestehen aus endlich vielen endlichen Tabellen.
- Jede solche Tabelle lässt sich als Relation auffassen, die Zeilen der Tabelle entsprechen dabei den Tupeln in der Relation.
- Eine relationale Datenbank entspricht dann einer endlichen Struktur, deren Universum aus allen potentiellen Einträgen in einzelnen Zellen der Tabellen besteht, und die für jede Tabelle in der Datenbank eine Relation enthält.

Beispiel: Eine Kinodatenbank

Kino			
Name	Adresse	Stadtteil	Telefonnummer
Babylon	Dresdner Str. 126	Kreuzberg	030 61 60 96 93
Casablanca	Friedenstr. 12-13	Adlershof	030 67 75 75 2
Filmtheater am Friedrichshain	Bötzowstr. 1-5	Prenzlauer Berg	030 42 84 51 88
Kino International	Karl-Marx-Allee 33	Mitte	030 24 75 60 11
Moviemento	Kotbusser Damm 22	Kreuzberg	030 692 47 85
Urania	An der Urania 17	Schöneberg	030 21 89 09 1

Film		
Name	Regisseur	Schauspieler
Alien	Ridley Scott	Sigourney Weaver
Blade Runner	Ridley Scott	Harrison Ford
Blade Runner	Ridley Scott	Sean Young
Brazil	Terry Gilliam	Jonathan Pryce
Brazil	Terry Gilliam	Kim Greist
Casablanca	Michael Curtiz	Humphrey Bogart
Casablanca	Michael Curtiz	Ingrid Bergmann
Gravity	Alfonso Cuaron	Sandra Bullock
Gravity	Alfonso Cuaron	George Clooney
Monuments Men	George Clooney	George Clooney
Monuments Men	George Clooney	Matt Damon
Resident Evil	Paul Anderson	Milla Jovovich
Terminator	James Cameron	Arnold Schwarzenegger
Terminator	James Cameron	Linda Hamilton
Terminator	James Cameron	Michael Biehn
...	...	...

Programm		
Kino	Film	Zeit
Babylon	Casablanca	17:30
Babylon	Gravity	20:15
Casablanca	Blade Runner	15:30
Casablanca	Alien	18:15
Casablanca	Blade Runner	20:30
Casablanca	Resident Evil	20:30
Filmtheater am Friedrichshain	Resident Evil	20:00
Filmtheater am Friedrichshain	Resident Evil	21:30
Filmtheater am Friedrichshain	Resident Evil	23:00
Kino International	Casablanca	18:00
Kino International	Brazil	20:00
Kino International	Brazil	22:00
Moviemento	Gravity	17:00
Moviemento	Gravity	19:30
Moviemento	Alien	22:00
Urania	Monuments Men	17:00
Urania	Monuments Men	20:00

Die Kinodatenbank als Struktur

Signatur: $\sigma_{\text{KINO}} := \{ R_{Kino}/4,\ R_{Film}/3,\ R_{Prog}/3 \} \cup \{ \text{'}c\text{'} : c \in \texttt{ASCII}^* \}$

Die Kinodatenbank wird dargestellt als σ_{KINO}-Struktur $\mathcal{D}$.

Universum:

$$D := \texttt{ASCII}^* \supseteq \{ \text{Babylon, Dresdner Str. 126, Kreuzberg, 030 61 60 96 93, Casablanca, \dots, 20:00} \}.$$

Relationen:

$$\begin{aligned}
R_{Kino}^{\mathcal{D}} := \{ & \text{(Babylon, Dresdner Str. 126, Kreuzberg, 030 61 60 96 93)},\\
& \text{(Casablanca, Friedenstr. 12-13, Adlershof, 030 67 75 75 2)},\\
& \dots,\\
& \text{(Urania, An der Urania 17, Schöneberg, 030 21 89 09 1)} \ \}\\
R_{Film}^{\mathcal{D}} := \{ & \text{(Alien, Ridley Scott, Sigourney Weaver)},\\
& \text{(Blade Runner, Ridley Scott, Harrison Ford)}, \ \dots \ \}\\
R_{Prog}^{\mathcal{D}} := \{ & \text{(Babylon, Casablanca, 17:30)},\\
& \text{(Babylon, Gravity, 20:15)}, \ \dots \ \}.
\end{aligned}$$

Konstanten: $\text{'}c\text{'}^{\mathcal{D}} := c$, für jedes $c \in \texttt{ASCII}^*$.

D.h.: jedes Konstantensymbol wird durch den zwischen den Hochkommas stehenden Text interpretiert.

Restriktionen und Expansionen

Definition 3.5

Seien σ und τ Signaturen mit $\sigma \subseteq \tau$.

(a) Die σ-Restriktion einer τ-Struktur $\mathcal{B}$ ist die σ-Struktur $\mathcal{B}|_\sigma$ mit $B|_\sigma := B$ und $S^{\mathcal{B}|_\sigma} := S^{\mathcal{B}}$ für jedes $S \in \sigma$.

D.h.: Ist $\mathcal{B} = \big(B, (S^{\mathcal{B}})_{S\in\tau}\big)$, so ist $\mathcal{B}|_\sigma = \big(B, (S^{\mathcal{B}})_{S\in\sigma}\big)$.

(b) Eine τ-Struktur $\mathcal{B}$ ist eine τ-Expansion einer σ-Struktur $\mathcal{A}$, wenn $\mathcal{A} = \mathcal{B}|_\sigma$.

Beispiel

Die $\{+, \underline{0}\}$-Restriktion des Standardmodells der Arithmetik ist die Struktur

$$\mathcal{A}_{\mathbb{N}}|_{\{+,\underline{0}\}} \quad = \quad (\mathbb{N}, +^{\mathcal{A}_{\mathbb{N}}}, \underline{0}^{\mathcal{A}_{\mathbb{N}}}),$$

wobei $+^{\mathcal{A}_{\mathbb{N}}}$ die natürliche Addition auf $\mathbb{N}$ und $\underline{0}^{\mathcal{A}_{\mathbb{N}}}$ die natürliche Zahl 0 ist.

Man bezeichnet diese Struktur als das Standardmodell der Presburger Arithmetik.

Prinzipielle Gleichheit von Strukturen

Frage: Wann sind zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ „prinzipiell gleich"?

Antwort: Wenn $\mathcal{B}$ aus $\mathcal{A}$ entsteht, indem man die Elemente des Universums von $\mathcal{A}$ umbenennt.

Dies wird in der folgenden Definition präzisiert.

Isomorphismen

Definition 3.6

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ σ-Strukturen. Ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist eine Abbildung $\pi : A \to B$ mit folgenden Eigenschaften:

1. π ist bijektiv.
2. Für alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, alle k-stelligen Relationssymbole $R \in \sigma$ und alle k-Tupel $(a_1, \ldots, a_k) \in A^k$ gilt:
$$(a_1, \ldots, a_k) \in R^{\mathcal{A}} \iff \big(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_k)\big) \in R^{\mathcal{B}}.$$
3. Für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$ gilt:
$$\pi\big(c^{\mathcal{A}}\big) \;=\; c^{\mathcal{B}}.$$
4. Für alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, alle k-stelligen Funktionssymbole $f \in \sigma$ und alle k-Tupel $(a_1, \ldots, a_k) \in A^k$ gilt:
$$\pi\big(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_k)\big) \;=\; f^{\mathcal{B}}\big(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_k)\big).$$

Isomorphie

Notation

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ σ-Strukturen. Wir schreiben $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, um anzudeuten, dass π ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist.

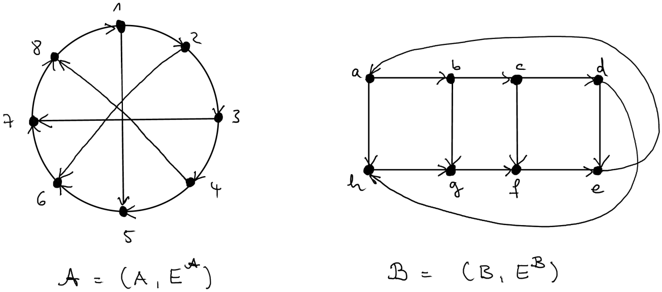
Definition 3.7

Zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen isomorph (wir schreiben: $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$), wenn es einen Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ gibt.

Beispiele 3.8

(a) Seien A, B nicht-leere Mengen. Dann sind die $\emptyset$-Strukturen $\mathcal{A} := (A)$ und $\mathcal{B} := (B)$ genau dann isomorph, wenn A und B gleichmächtig sind (d.h. es gibt eine Bijektion von A nach B).

(b) Seien $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{B} = (B, E^{\mathcal{B}})$ die beiden folgenden Digraphen:



Dann ist $\pi : A \to B$ mit

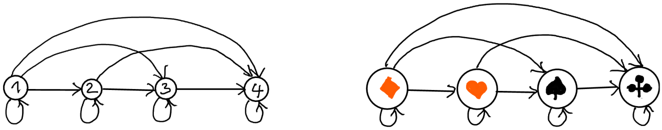
i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi(i)$	a	b	c	d	h	g	f	e

ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$.

(c) Sei $\mathcal{A} = (A, \leqslant^{\mathcal{A}})$ mit $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und

$$\leqslant^{\mathcal{A}} \;=\; \{\,(i,j) \;:\; i,j \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 4\,\},$$

und sei $\mathcal{B} = (B, \leqslant^{\mathcal{A}})$ mit $B = \{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$, wobei $\leqslant^{\mathcal{B}}$ wie in Beispiel 3.4 definiert ist. Skizze:



Dann ist $\pi : A \to B$ mit

i	1	2	3	4
$\pi(i)$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$	$\clubsuit$

ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$.

Allgemein gilt: Sind A und B endliche Mengen mit $|A| = |B|$, und sind $\leqslant^{\mathcal{A}}$ und $\leqslant^{\mathcal{B}}$ lineare Ordnungen auf A und B, so ist die Abbildung $\pi : A \to B$, die das (bzgl. $\leqslant^{\mathcal{A}}$) kleinste Element in A auf das (bzgl. $\leqslant^{\mathcal{B}}$) kleinste Element in B abbildet, und allgemein für jedes $i \in \{1, \ldots, |A|\}$ das (bzgl. $\leqslant^{\mathcal{A}}$) i-kleinste Element in A auf das (bzgl. $\leqslant^{\mathcal{B}}$) i-kleinste Element in B abbildet, ein Isomorphismus von $\mathcal{A} := (A, \leqslant^{\mathcal{A}})$ nach $\mathcal{B} := (B, \leqslant^{\mathcal{B}})$.

(d) Sind $\leqslant^{\mathbb{N}}$ und $\leqslant^{\mathbb{Z}}$ die natürlichen linearen Ordnungen auf $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$, so sind die $\{\leqslant\}$-Strukturen $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, \leqslant^{\mathbb{N}})$ und $\mathcal{Z} := (\mathbb{Z}, \leqslant^{\mathbb{Z}})$ nicht isomorph (kurz: $\mathcal{N} \ncong \mathcal{Z}$).

Beweis: Angenommen, $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ ist ein Isomorphismus von $\mathcal{N}$ nach $\mathcal{Z}$. Sei $z := \pi(0)$. In $\mathbb{Z}$ gibt es ein Element $z' \in \mathbb{Z}$ mit $z' < z$ (z.B. $z' = z - 1$). Da π surjektiv ist, muss es ein $n' \in \mathbb{N}$ geben, so dass $\pi(n') = z'$. Somit gilt:

$$0 \leqslant^{\mathbb{N}} n' \qquad \text{aber} \qquad z \not\leqslant^{\mathbb{Z}} z'.$$

Also ist π kein Isomorphismus von $\mathcal{N}$ nach $\mathcal{Z}$. Widerspruch!

(e) Sei $\sigma := \{f, c\}$, wobei f ein 2-stelliges Funktionssymbol und c ein Konstantensymbol ist. Sei $\mathcal{A} := (A, f^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$, wobei gilt:

- $A := \mathbb{N}$ ist die Menge aller natürlichen Zahlen,
- $f^{\mathcal{A}} := +^{\mathcal{A}_{\mathbb{N}}}$ ist die natürliche Addition auf $\mathbb{N}$,
- $c^{\mathcal{A}} := 0$ ist die natürliche Zahl 0

und sei $\mathcal{B} := (B, f^{\mathcal{B}}, c^{\mathcal{B}})$, wobei

- $B := \{2^n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ ist die Menge aller Zweierpotenzen,
- $f^{\mathcal{B}} : B \times B \to B$ ist die Funktion mit

$$f^{\mathcal{B}}(b_1, b_2) \quad := \quad b_1 \cdot b_2, \qquad \text{für alle } \ b_1, b_2 \in B$$

- $c^{\mathcal{B}} := 1 = 2^0 \in B$.

Dann gilt: $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, und die Abbildung $\pi : A \to B$ mit $\pi(n) := 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$, denn:

Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation

Lemma 3.9

Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation auf der Klasse aller σ-Strukturen. D.h.:
Für alle σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ gilt:

1. $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}$ *(Reflexivität),*
2. $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \implies \mathcal{B} \cong \mathcal{A}$ *(Symmetrie),*
3. $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ *und* $\mathcal{B} \cong \mathcal{C} \implies \mathcal{A} \cong \mathcal{C}$ *(Transitivität).*

Beweis: Übung.

Abschnitt 3.2:

Terme der Logik erster Stufe

Individuenvariablen

Definition 3.10

Eine Individuenvariable (auch: Variable erster Stufe; kurz: Variable) hat die Form v_i für ein $i \in \mathbb{N}$.

Die Menge aller Variablen bezeichnen wir mit VAR, d.h.

$$\text{VAR} \;=\; \{v_0,\, v_1,\, v_2,\, v_3,\, \ldots\} \;=\; \{v_i \;:\; i \in \mathbb{N}\}.$$

Terme der Logik erster Stufe

Definition 3.11

(a) Für eine Signatur σ sei $A_{\sigma\text{-Terme}}$ das Alphabet, das aus allen Elementen in VAR, allen Konstanten- und Funktionssymbolen in σ, den Klammern (,) und dem Komma , besteht.

(b) Die Menge T_σ aller σ-Terme ist die wie folgt rekursiv definierte Teilmenge von ${A_{\sigma\text{-Terme}}}^*$:

Basisregeln:

- Für jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ ist $c \in \mathrm{T}_\sigma$.
- Für jede Variable $x \in \mathrm{VAR}$ ist $x \in \mathrm{T}_\sigma$.

Rekursive Regel:

- Für jedes Funktionssymbol $f \in \sigma$ und für $k := \mathrm{ar}(f)$ gilt:
  Sind $t_1 \in \mathrm{T}_\sigma, \ldots, t_k \in \mathrm{T}_\sigma$, so ist auch $f(t_1, \ldots, t_k) \in \mathrm{T}_\sigma$.

(c) Die Menge aller Terme der Logik der ersten Stufe ist $\mathrm{T} := \bigcup_{\sigma \text{ Signatur}} \mathrm{T}_\sigma$.

Beispiele

Sei $\sigma := \{ f/2,\ c \}$.

Folgende Worte sind σ-Terme:

$$c, \quad v_4, \quad f(c,c), \quad f(c, f(c, v_0)) .$$

Folgende Worte sind keine σ-Terme:

$$0, \quad f(0,c), \quad f(v_0, c, v_1), \quad f^{\mathcal{A}}(2,3) .$$

Belegungen und Interpretationen

Definition 3.12

Sei σ eine Signatur.

(a) Eine Belegung in einer σ-Struktur $\mathcal{A}$ ist eine Abbildung $\beta : \mathsf{VAR} \to A$.

D.h.: β ordnet jeder Variablen $x \in \mathsf{VAR}$ ein Element $\beta(x)$ aus dem Universum von $\mathcal{A}$ zu.

(b) Eine σ-Interpretation ist ein Paar

$$\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta),$$

bestehend aus einer σ-Struktur $\mathcal{A}$ und einer Belegung β in $\mathcal{A}$.

Die Auswertung von Termen in Interpretationen

Wir wollen Terme nun in Interpretationen „auswerten“.

Die Auswertung von Term t in einer Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ soll dasjenige Element aus A liefern, das man erhält, wenn man

- die in t vorkommenden Variablen gemäß der Belegung β interpretiert,
- die in t vorkommenden Konstantensymbole c gemäß ihrer Interpretation $c^{\mathcal{A}}$ in $\mathcal{A}$ belegt,
- die in t vorkommenden Funktionssymbole f gemäß ihrer Interpretation $f^{\mathcal{A}}$ in $\mathcal{A}$ belegt

und dann nach und nach den resultierenden Term ausrechnet.

Dies wird in der folgenden Definition präzisiert.

Semantik von σ-Termen

Definition 3.13

Sei σ eine Signatur. Rekursiv über den Aufbau von T_σ definieren wir eine Funktion $[\![\cdot]\!]^{\cdot}$, die jedem σ-Term t und jeder σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ einen Wert $[\![t]\!]^{\mathcal{I}} \in A$ zuordnet:

- Für alle $x \in \text{VAR}$ ist $[\![x]\!]^{\mathcal{I}} := \beta(x)$.
- Für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$ ist $[\![c]\!]^{\mathcal{I}} := c^{\mathcal{A}}$.
- Für alle Funktionssymbole $f \in \sigma$, für $k := \text{ar}(f)$, und für alle σ-Terme $t_1, \ldots, t_k \in T_\sigma$ gilt:

$$[\![\, f(t_1, \ldots, t_k) \,]\!]^{\mathcal{I}} \quad := \quad f^{\mathcal{A}}\left([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \ldots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}} \right).$$

Beispiel

Sei $\sigma = \{ f/2, c \}$, und sei $\mathcal{A} = (A, f^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$ die σ-Struktur mit $A = \mathbb{N}$, $f^{\mathcal{A}} = +^{\mathcal{A}_{\mathbb{N}}}$ (die Addition auf den natürlichen Zahlen) und $c^{\mathcal{A}} = 0$ (die natürliche Zahl 0).

Sei $\beta : \text{VAR} \to A$ eine Belegung mit $\beta(v_1) = 1$ und $\beta(v_2) = 7$, und sei $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$.

Sei t der σ-Term $f(v_2, f(v_1, c))$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
[\![t]\!]^{\mathcal{I}} &= f^{\mathcal{A}}\Big(\beta(v_2),\ f^{\mathcal{A}} \big(\beta(v_1),\ c^{\mathcal{A}} \big) \Big) \\
&= f^{\mathcal{A}} \Big(7,\ f^{\mathcal{A}}(1, 0) \Big) \\
&= \Big(7 + \big(1 + 0 \big) \Big) \\
&= 8.
\end{aligned}
$$

Abschnitt 3.3:

Syntax der Logik erster Stufe

Vergleich zwischen Aussagenlogik und Logik erster Stufe

Die Logik erster Stufe übernimmt, verändert und erweitert die Syntax der Aussagenlogik.

- Was gleich bleibt:
  - Die Junktoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ werden übernommen.
- Was sich verändert:
  - Variablen stehen nicht mehr für „wahre“ oder „falsche“ Ausagen, sondern für Elemente im Universum einer σ-Struktur.
  - Variablen sind <u>keine</u> atomaren Formeln mehr.
- Was neu hinzukommt:
  - Es gibt Quantoren $\exists$ und $\forall$ (für „es existiert“ und „für alle“).
  - Es gibt Symbole für Elemente aus der Signatur σ.
  - Es können σ-Terme benutzt werden, um Elemente im Universum einer σ-Struktur zu bezeichnen.

Das Alphabet der Logik erster Stufe

Definition 3.14

Sei σ eine Signatur.
Das Alphabet $A_{\mathsf{FO}[\sigma]}$ der Logik erster Stufe über σ besteht aus

- allen Symbolen in $A_{\sigma\text{-Terme}}$,
- allen Symbolen in σ,
- den Quantoren $\exists$ (Existenzquantor) und $\forall$ (Allquantor),
- dem Gleichheitssymbol $=$,
- den Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$.

D.h.:

$$A_{\mathsf{FO}[\sigma]} \;=\; \mathsf{VAR} \cup \sigma \cup \{\exists, \forall\} \cup \{=\} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\} \cup \{(,)\} \cup \{,\}.$$

Syntax der Logik erster Stufe

Definition 3.15

Sei σ eine Signatur. Die Menge $\mathrm{FO}[\sigma]$ aller Formeln der Logik erster Stufe über der Signatur σ (kurz: $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln; „FO“ steht für die englische Bezeichnung der Logik erster Stufe: first-order logic) ist die folgendermaßen rekursiv definierte Teilmenge von $A^*_{\mathrm{FO}[\sigma]}$:

Basisregeln:

- Für alle σ-Terme t_1 und t_2 in T_σ gilt:

$$t_1 = t_2 \quad \in \quad \mathrm{FO}[\sigma].$$

- Für jedes Relationssymbol $R \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(R)$ und für alle σ-Terme $t_1, \ldots, t_k$ in T_σ gilt:

$$R(t_1, \ldots, t_k) \quad \in \quad \mathrm{FO}[\sigma].$$

$\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln der Form $t_1 = t_2$ oder $R(t_1, \ldots, t_k)$ heißen atomare σ-Formeln.

Rekursive Regeln:

- Ist $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$, so ist auch $\neg\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$.
- Ist $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ und $\psi \in \mathsf{FO}[\sigma]$, so ist auch
  - $(\varphi \wedge \psi) \in \mathsf{FO}[\sigma]$,
  - $(\varphi \vee \psi) \in \mathsf{FO}[\sigma]$,
  - $(\varphi \rightarrow \psi) \in \mathsf{FO}[\sigma]$.
- Ist $\varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$ und $x \in \mathsf{VAR}$, so ist auch
  - $\exists x\, \varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$,
  - $\forall x\, \varphi \in \mathsf{FO}[\sigma]$.

Beispiel 3.16

Sei $\sigma = \{ f/2,\ c \}$.

Folgende Worte aus $A^*_{\mathrm{FO}[\sigma]}$ sind FO[σ]-Formeln:

- $f(v_0, v_1) = c$ (atomare σ-Formel)
- $\forall v_2\, f(v_2, c) = v_2$
- $\neg\exists v_3\, \big(f(v_3, v_3) = v_3 \ \wedge\ \neg\, v_3{=}c\big)$

Folgende Worte sind keine FO[σ]-Formeln:

- $\big(f(v_0, v_1) = c\big)$
- $\big(\exists v_2\, f(v_2, c) = v_2\big)$
- $f(f(c, c), v_1)$ (ist ein σ-Term, aber keine FO[σ]-Formel)
- $\exists c\, f(v_0, c) = v_0$

Beispiel 3.17

Sei $\sigma = \{E/2\}$.
Folgendes ist eine FO[σ]-Formel:

$$\forall v_0 \, \forall v_1 \Big(\big(E(v_0, v_1) \ \wedge \ E(v_1, v_0) \big) \ \rightarrow \ v_0 = v_1 \Big)$$

Intuition zur Semantik:

In einem gerichteten Graphen $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ sagt diese Formel Folgendes aus:

„Für alle Knoten $a_0 \in A$ und
für alle Knoten $a_1 \in A$ gilt:
falls $(a_0, a_1) \in E^{\mathcal{A}}$ und $(a_1, a_0) \in E^{\mathcal{A}}$, so ist $a_0 = a_1$."

Die Formel sagt in einem Digraph $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ also aus, dass die Kantenrelation $E^{\mathcal{A}}$ antisymmetrisch ist.

Notation

- Statt mit $v_0, v_1, v_2, \ldots$ bezeichnen wir Variablen oft auch mit $x, y, z, \ldots$ oder mit Varianten wie $x', y_1, y_2, \ldots$.

- Ähnlich wie bei der Aussagenlogik schreiben wir $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ als Abkürzung für die Formel $\big((\varphi \to \psi) \land (\psi \to \varphi)\big)$.

- Die Menge aller Formeln der Logik der ersten Stufe ist

$$\mathrm{FO} := \bigcup_{\sigma \text{ Signatur}} \mathrm{FO}[\sigma].$$

Abschnitt 3.4:

Semantik der Logik erster Stufe

Bevor wir die Semantik der Logik erster Stufe formal definieren, betrachten wir zunächst einige Beispiele, um ein intuitives Verständnis der Semantik der Logik erster Stufe zu erlangen.

Beispiele zur Semantik der Logik erster Stufe

Gerichtete Graphen

Beispiel 3.18

Sei $\sigma = \{E/2\}$.

(a) Die FO[σ]-Formel

$$\varphi \quad := \quad \forall x \forall y \big(E(x,y) \to E(y,x) \big)$$

besagt:

„Für alle Knoten x und für alle Knoten y gilt: Falls es eine Kante von x nach y gibt, so gibt es auch eine Kante von y nach x.“

Für jeden Digraphen $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ gilt daher:

$$\mathcal{A} \text{ erfüllt } \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad E^{\mathcal{A}} \text{ ist symmetrisch.}$$

Umgangssprachlich sagen wir auch: „Die Formel φ sagt in einem Digraphen $\mathcal{A}$ aus, dass dessen Kantenrelation symmetrisch ist.“

(b) Die folgende FO[σ]-Formel drückt aus, dass es von Knoten x zu Knoten y einen Weg der Länge 3 gibt:

$$\varphi(x,y) \quad := \quad \exists z_1\, \exists z_2\, \Big(\big(E(x,z_1) \,\wedge\, E(z_1,z_2) \big) \,\wedge\, E(z_2,y) \Big).$$

(c) Die FO[σ]-Formel

$$\forall x\, \forall y\, \exists z_1\, \exists z_2\, \Big(\big(E(x,z_1) \,\wedge\, E(z_1,z_2) \big) \,\wedge\, E(z_2,y) \Big)$$

sagt in einem Digraph $\mathcal{A}$ aus, dass es zwischen je 2 Knoten einen Weg der Länge 3 gibt.

Verwandtschaftsbeziehungen

Um Verwandtschaftsbeziehungen zu modellieren, können wir eine Signatur σ nutzen, die aus den folgenden Symbolen besteht:

- 1-stellige Funktionssymbole f_{Vater}, f_{Mutter}
  (Bedeutung: $x = f_{Mutter}(y)$ besagt: „x ist die Mutter von y".)

- 2-stellige Relationssymbole $R_{Geschwister}$, $R_{Vorfahr}$
  (Bedeutung: $R_{Geschwister}(x, y)$ besagt, dass x und y Geschwister sind; $R_{Vorfahr}(x, y)$ besagt, dass x ein Vorfahr von y ist.)

Generelles Wissen über Verwandtschaftsbeziehungen lässt sich durch Formeln der Logik erster Stufe repräsentieren, z.B.:

- „Personen mit gleichem Vater und gleicher Mutter sind Geschwister":

$$\forall x \forall y \Big(\big(\big(f_{Vater}(x) = f_{Vater}(y) \ \wedge \ f_{Mutter}(x) = f_{Mutter}(y) \big) \ \wedge \ \neg\, x = y \big) \\ \rightarrow \ R_{Geschwister}(x, y) \Big)$$

- „Eltern sind gerade die unmittelbaren Vorfahren“:

$$\forall x \forall y \Big(\big(x = f_{Vater}(y) \ \lor \ x = f_{Mutter}(y) \big) \\ \leftrightarrow \ \big(R_{Vorfahr}(x,y) \ \land \ \neg \exists z \, \big(R_{Vorfahr}(x,z) \land R_{Vorfahr}(z,y) \big) \big) \Big)$$

- „Die Relation *Vorfahr* ist transitiv“:

$$\forall x \forall y \forall z \Big(\big(R_{Vorfahr}(x,y) \land R_{Vorfahr}(y,z) \big) \ \rightarrow \ R_{Vorfahr}(x,z) \Big)$$

- Die folgende Formel $\varphi(x,y)$ besagt „x ist Tante oder Onkel von y“:

$$\varphi(x,y) \ := \quad \exists z \Big(R_{Geschwister}(x,z) \ \land \ \big(z = f_{Mutter}(y) \ \lor \ z = f_{Vater}(y) \big) \Big)$$

- Die folgende Formel $\psi(x)$ besagt „x ist Vater von genau 2 Kindern“:

$$\psi(x) \ := \quad \exists y_1 \exists y_2 \Big(\big((x = f_{Vater}(y_1) \land x = f_{Vater}(y_2)) \land \neg\, y_1 = y_2 \big) \\ \land \ \forall z \, \big(x = f_{Vater}(z) \ \to \ (z = y_1 \lor z = y_2) \big) \Big)$$

Formale Definition der Semantik der Logik erster Stufe

Um die formale Definition der Semantik der Logik erster Stufe angeben zu können, benötigen wir noch folgende Begriffe:

Notation

- Ist β eine Belegung in einer σ-Struktur $\mathcal{A}$, ist $x \in \text{VAR}$ und ist $a \in A$, so sei

  $$\beta\frac{a}{x}$$

  die Belegung mit $\beta\frac{a}{x}(x) = a$ und $\beta\frac{a}{x}(y) = \beta(y)$ für alle $y \in \text{VAR} \setminus \{x\}$.

- Ist $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation, ist $x \in \text{VAR}$ und ist $a \in A$, so sei

  $$\mathcal{I}\frac{a}{x} \;:=\; (\mathcal{A}, \beta\frac{a}{x}).$$

Semantik der Logik erster Stufe

Definition 3.19

Sei σ eine Signatur. Rekursiv über den Aufbau von FO[σ] definieren wir eine Funktion $[\![\cdot]\!]^{\cdot}$, die jeder FO[σ]-Formel φ und jeder σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ einen Wahrheitswert (kurz: Wert) $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} \in \{0, 1\}$ zuordnet:

Rekursionsanfang:

- Für alle σ-Terme t_1 und t_2 in T_σ gilt:

$$[\![t_1{=}t_2]\!]^{\mathcal{I}} \; := \; \begin{cases} 1, & \text{falls } [\![t_1]\!]^{\mathcal{I}} = [\![t_2]\!]^{\mathcal{I}} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Für jedes Relationssymbol $R \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(R)$ und für alle σ-Terme $t_1, \ldots, t_k \in \mathrm{T}_\sigma$ gilt:

$$[\![R(t_1, \ldots, t_k)]\!]^{\mathcal{I}} \; := \; \begin{cases} 1, & \text{falls } \left([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \ldots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}\right) \in R^{\mathcal{A}} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Rekursionsschritt:

- Ist $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ und ist $x \in \mathrm{VAR}$, so ist

$$[\![\exists x\, \varphi]\!]^{\mathcal{I}} \quad := \quad \begin{cases} 1, & \text{falls es (mind.) ein } a \in A \text{ gibt, so dass } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}\frac{a}{x}} = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$[\![\forall x\, \varphi]\!]^{\mathcal{I}} \quad := \quad \begin{cases} 1, & \text{falls für } \textit{jedes } a \in A \text{ gilt: } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}\frac{a}{x}} = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Die Semantik der Junktoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ ist wie in der Aussagenlogik definiert, d.h. für alle $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ und $\psi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gilt:

$$[\![\neg\varphi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1, & \text{falls } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$[\![(\varphi \wedge \psi)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1, & \text{falls } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \text{ und } [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$[\![(\varphi \vee \psi)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 0, & \text{falls } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 0 \text{ und } [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}} = 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$[\![(\varphi \rightarrow \psi)]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 0, & \text{falls } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \text{ und } [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}} = 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel 3.20

Sei $\sigma = \{E/2\}$. Betrachte die FO[σ]-Formel

$$\varphi \ := \ \forall x \forall y \ \big(\ E(x,y) \to E(y,x) \ \big)$$

Für jede σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ gilt:

$[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \iff$ für alle $a \in A$ gilt: $[\![\forall y(E(x,y) \to E(y,x))]\!]^{\mathcal{I}\frac{a}{x}} = 1$

$\iff$ für alle $a \in A$ gilt: für alle $b \in A$ gilt:
$[\![(E(x,y) \to E(y,x))]\!]^{\mathcal{I}\frac{a}{x}\frac{b}{y}} = 1$

$\iff$ für alle $a \in A$ und alle $b \in A$ gilt:
Falls $[\![E(x,y)]\!]^{\mathcal{I}\frac{a}{x}\frac{b}{y}} = 1$, so $[\![E(y,x)]\!]^{\mathcal{I}\frac{a}{x}\frac{b}{y}} = 1$

$\iff$ für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ gilt:
Falls $(a,b) \in E^{\mathcal{A}}$, so $(b,a) \in E^{\mathcal{A}}$

$\iff$ $E^{\mathcal{A}}$ ist symmetrisch

Die Modellbeziehung

Definition 3.21

Sei σ eine Signatur.

(a) Eine σ-Interpretation $\mathcal{I}$ *erfüllt* eine Formel $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ (wir schreiben: $\mathcal{I} \models \varphi$), wenn $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1$.

(b) Eine σ-Interpretation $\mathcal{I}$ *erfüllt* eine Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ (wir schreiben: $\mathcal{I} \models \Phi$), wenn $\mathcal{I} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$ gilt.

(c) Ein *Modell* einer Formel φ (bzw. einer Formelmenge Φ) ist eine Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I} \models \varphi$ (bzw. $\mathcal{I} \models \Phi$).

Konventionen

- Terme bezeichnen wir mit t, s und Varianten $s', t_1, t_2, \ldots$.
- Formeln bezeichnen wir mit φ, ψ, χ und Varianten $\psi', \varphi_1, \varphi_2, \ldots$.
- Formelmengen bezeichnen wir mit Φ, Ψ und Varianten $\Psi', \Phi_1, \Phi_2, \ldots$.

Subformeln, Subterme und Syntaxbäume

- Eine Formel ψ ist Subformel einer Formel φ, wenn ψ als Teilwort in φ vorkommt (insbes. ist jede Formel eine Subformel von sich selbst).

  Beispiel: $\psi := E(v_0, v_1)$ ist Subformel der Formel $\exists v_0 \forall v_1\, E(v_0, v_1)$

- Ein Term s ist Subterm eines Terms t, wenn s als Teilwort in t vorkommt (insbes. ist jeder Term ein Subterm von sich selbst).

  Beispiel: $f(c, c)$ ist Subterm des Terms $f(v_0, f(c, c))$.

- Sei $\xi \in \mathrm{T} \cup \mathrm{FO}$, d.h. ξ ist ein Term oder eine Formel der Logik erster Stufe.
  - Ähnlich wie bei aussagenlogischen Formeln können wir einen Syntaxbaum für ξ definieren.
  - Das Lemma über die eindeutige Lesbarkeit von Termen und Formeln besagt, dass jeder Term und jede Formel genau einen Syntaxbaum hat.
  - Die Subterme von ξ (falls $\xi \in \mathrm{T}$) bzw. Subformeln von ξ (falls $\xi \in \mathrm{FO}$) sind dann alle Terme bzw. Formeln, die im Syntaxbaum vorkommen.

Das Isomorphielemma

Das Isomorphielemma besagt, dass isomorphe Objekte (Strukturen bzw. Interpretationen) dieselben Formeln der Logik erster Stufe erfüllen.

Um diese Aussage präzise formulieren zu können, benötigen wir die folgende Notation.

Isomorphismen, Belegungen und Interpretationen

Definition 3.22

Sei σ eine Signatur, seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ isomorphe σ-Strukturen und sei π ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ (kurz: $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$).

(a) Für jede Belegung β in $\mathcal{A}$ sei $\pi\beta$ die Belegung in $\mathcal{B}$, so dass für alle $x \in \mathrm{VAR}$ gilt:

$$\pi\beta\,(x) \quad = \quad \pi\big(\beta(x)\big).$$

(b) Für eine Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ schreiben wir $\pi\mathcal{I}$ für die Interpretation

$$\pi\mathcal{I} \quad := \quad (\mathcal{B}, \pi\beta).$$

Aus dieser Definition folgt direkt:

Lemma 3.23

Sei σ eine Signatur, seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ isomorphe σ-Strukturen, sei $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, sei β eine Belegung in $\mathcal{A}$ und sei $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$.
Für jedes $x \in \mathrm{VAR}$, für jedes $a \in A$, für $\mathcal{I}' := \mathcal{I}\frac{a}{x}$ und für $b := \pi(a)$ gilt:

$$\pi\mathcal{I}' \quad = \quad (\pi\mathcal{I})\tfrac{b}{x}.$$

Das Isomorphielemma

Satz 3.24 (Das Isomorphielemma der Logik erster Stufe)

Sei σ eine Signatur, seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ isomorphe σ-Strukturen und sei $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. Für jede Belegung β in $\mathcal{A}$ und die σ-Interpretation $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$ gilt:

(a) *Für jeden σ-Term $t \in \mathsf{T}_\sigma$ ist* $[\![t]\!]^{\pi\mathcal{I}} = \pi\big([\![t]\!]^{\mathcal{I}}\big)$.

(b) *Für jede* FO[σ]*-Formel φ gilt:* $\pi\mathcal{I} \models \varphi \iff \mathcal{I} \models \varphi$.

Wir werden das Isomorphielemma per Induktion über den Aufbau von Termen und Formeln beweisen. Hierzu zunächst ein kurzer Überblick darüber, wie solche Induktionsbeweise prinzipiell aufgebaut sind.

Beweise per Induktion über den Aufbau von Termen und Formeln

- Ähnlich wie Aussagen über die aussagenlogischen Formeln können wir Aussagen über Terme und Formeln der Logik der erster Stufe per Induktion über den Aufbau von T_σ bzw. $\mathrm{FO}[\sigma]$ beweisen.
- Im Induktionsanfang beweisen wir die Aussagen für die gemäß Basisregeln definierten Terme bzw. Formeln. Im Induktionschritt schließen wir von den Subtermen bzw. Subformeln auf den Term bzw. die Formel selbst.
- Wie bei der Aussagenlogik ist dieses Vorgehen gerechtfertigt, weil es sich auch als vollständige Induktion über die Höhe des Syntaxbaums auffassen lässt.

Beweise per Induktion über den Aufbau von Termen

Schematisch sieht der Beweis einer Aussage $\mathbb{A}(t)$ für alle Terme $t \in \mathrm{T}_\sigma$ wie folgt aus:

Induktionsanfang:

- Beweise, dass für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$ die Aussage $\mathbb{A}(c)$ gilt.
- Beweise, dass für alle Variablen $x \in \mathrm{VAR}$ die Aussage $\mathbb{A}(x)$ gilt.

Induktionsschritt:

- Betrachte jedes Funktionssymbol $f \in \sigma$, sei $k := \mathrm{ar}(f)$, und seien $t_1, \ldots, t_k$ beliebige σ-Terme. Beweise, dass $\mathbb{A}\big(f(t_1, \ldots, t_k)\big)$ gilt, und verwende dazu die Induktionsannahme, dass $\mathbb{A}(t_i)$ für jedes $i \in [k]$ gilt.

Mit dieser Vorgehensweise beweisen wir nun Teil (a) des Isomorphielemmas.

Teil (b) des Isomorphielemmas beweisen wir per Induktion über den Aufbau von Formeln. Prinzipiell sind solche Induktionsbeweise wie folgt aufgebaut.

Beweise per Induktion über den Aufbau von Formeln

Schematisch sieht der Beweis einer Aussage $\mathbb{A}(\varphi)$ für alle FO[σ]-Formeln φ wie folgt aus:

Induktionsanfang:

- Beweise, dass für alle σ-Terme $t_1, t_2 \in \mathrm{T}_\sigma$ die Aussage $\mathbb{A}(t_1{=}t_2)$ gilt.
- Beweise, dass für alle Relationssymbole $R \in \sigma$, für $k := \mathrm{ar}(R)$ und für alle σ-Terme $t_1, \ldots, t_k \in \mathrm{T}_\sigma$ die Aussage $\mathbb{A}\big(R(t_1, \ldots, t_k)\big)$ gilt

Induktionsschritt:

Seien φ und ψ beliebige FO[σ]-Formeln. Die Induktionsannahme besagt, dass die Aussagen $\mathbb{A}(\varphi)$ und $\mathbb{A}(\psi)$ gelten.

Im Induktionsschritt muss dann gezeigt werden, dass

- für jede Variable $x \in \text{VAR}$ die Aussage $\mathbb{A}(\exists x\, \varphi)$ gilt,
- für jede Variable $x \in \text{VAR}$ die Aussage $\mathbb{A}(\forall x\, \varphi)$ gilt,
- die Aussage $\mathbb{A}(\neg\varphi)$ gilt,
- die Aussage $\mathbb{A}\big((\varphi \wedge \psi)\big)$ gilt,
- die Aussage $\mathbb{A}\big((\varphi \vee \psi)\big)$ gilt,
- die Aussage $\mathbb{A}\big((\varphi \to \psi)\big)$ gilt.

Mit dieser Vorgehensweise beweisen wir nun Teil (b) des Isomorphielemmas.

Das Koinzidenzlemma

Ähnlich wie für die Aussagenlogik gilt auch für die Logik erster Stufe ein Koinzidenzlemma, das besagt, dass der Wert $[\![t]\!]^{\mathcal{I}}$ eines Terms t bzw. der Wert $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}}$ einer Formel φ nur abhängt von

- denjenigen Bestandteilen von $\mathcal{A}$, die explizit in t bzw. φ vorkommen, und
- den Belegungen $\beta(x)$ derjenigen Variablen x, die in t vorkommen bzw. die in φ vorkommen und nicht im Wirkungsbereich eines Quantors stehen.

Um diese Aussage präzise zu formulieren, sind folgende Begriffe nützlich.

Definition 3.25

(a) Ist ξ ein Term oder eine Formel der Logik erster Stufe, so schreiben wir

- $\sigma(\xi)$, um die Menge aller Relations-, Funktions- und Konstantensymbole zu bezeichnen, die in ξ vorkommen,
- $\text{var}(\xi)$, um die Menge aller in ξ vorkommenden Variablen zu bezeichnen.

(b) Ist φ eine Formel und x eine Variable, so heißt jedes Vorkommen von x in einer Subformel von φ, die von der Form $\exists x \psi$ oder $\forall x \psi$ ist, **gebunden**. Jedes andere Vorkommen von x in φ heißt **frei**.

Beispiel:

$$\varphi \ := \quad \big(f(v_0, c) = v_3 \ \wedge \ \exists v_0 \, f(v_0, v_1) = c \big)$$

Das erste Vorkommen von v_0 in φ ist frei, das zweite und dritte Vorkommen von v_0 in φ ist gebunden. Die Vorkommen von v_1 und v_3 in φ sind frei.

Freie Variablen

Definition 3.26

Die Menge $\text{frei}(\varphi)$ aller freien Variablen einer Formel φ besteht aus allen Variablen, die mindestens ein freies Vorkommen in φ haben.
Die Menge $\text{frei}(\varphi)$ lässt sich rekursiv über den Aufbau von Formeln wie folgt definieren:

$$\begin{aligned}
\text{frei}(R(t_1,\ldots,t_k)) &:= \text{var}(t_1)\cup\cdots\cup\text{var}(t_k)\\
\text{frei}(t_1{=}t_2) &:= \text{var}(t_1)\cup\text{var}(t_2)\\
\text{frei}(\neg\varphi) &:= \text{frei}(\varphi)\\
\text{frei}((\varphi * \psi)) &:= \text{frei}(\varphi)\cup\text{frei}(\psi) \quad \text{für alle } * \in \{\wedge,\vee,\rightarrow\}\\
\text{frei}(\exists x\,\varphi) &:= \text{frei}(\forall x\,\varphi) \quad := \quad \text{frei}(\varphi)\setminus\{x\}.
\end{aligned}$$

Beispiele:

- $\text{frei}(f(v_0,c){=}v_3) \;=\; \{v_0,v_3\}$
- $\text{frei}(\exists v_0\, f(v_0,v_1){=}c) \;=\; \{v_1\}$
- $\text{frei}((\,f(v_0,c){=}v_3 \;\wedge\; \exists v_0\, f(v_0,v_1){=}c\,)) \;=\; \{v_0,v_3,v_1\}$

Das Koinzidenzlemma

Satz 3.27 (Koinzidenzlemma für Terme)

Sei $\mathcal{I}_1 = (\mathcal{A}_1, \beta_1)$ eine σ_1-Interpretation und sei $\mathcal{I}_2 = (\mathcal{A}_2, \beta_2)$ eine σ_2-Interpretation, wobei σ_1 und σ_2 Signaturen seien. Sei $t \in \mathrm{T}$ ein Term mit $\sigma(t) \subseteq \sigma_1 \cap \sigma_2$, so dass gilt:

1. $\mathcal{A}_1|_{\sigma(t)} \;=\; \mathcal{A}_2|_{\sigma(t)}$
   (d.h., die $\sigma(t)$-Redukte von $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ sind identisch), und
2. $\beta_1(x) = \beta_2(x)$, *für alle $x \in \mathrm{var}(t)$.*

Dann gilt: $[\![t]\!]^{\mathcal{I}_1} \;=\; [\![t]\!]^{\mathcal{I}_2}$.

Beweis: Per Induktion über den Aufbau von Termen. Details: Übung. $\square$

Satz 3.28 (Koinzidenzlemma für FO-Formeln)

Sei $\mathcal{I}_1 = (\mathcal{A}_1, \beta_1)$ eine σ_1-Interpretation und sei $\mathcal{I}_2 = (\mathcal{A}_2, \beta_2)$ eine σ_2-Interpretation, wobei σ_1 und σ_2 Signaturen seien.
Sei $\varphi \in \mathrm{FO}$ eine Formel der Logik erster Stufe mit $\sigma(\varphi) \subseteq \sigma_1 \cap \sigma_2$, so dass gilt:

1. $\mathcal{A}_1|_{\sigma(\varphi)} \;=\; \mathcal{A}_2|_{\sigma(\varphi)}$, *und*
2. $\beta_1(x) = \beta_2(x)$, *für alle $x \in \mathrm{frei}(\varphi)$.*

Dann gilt: $\mathcal{I}_1 \models \varphi \iff \mathcal{I}_2 \models \varphi$.

Beweis: Per Induktion über den Aufbau von Formeln. Details: Übung. $\square$

Notation für Terme

- Für einen Term $t \in \mathrm{T}_\sigma$ schreiben wir $t(x_1, \dots, x_n)$, um anzudeuten, dass $\mathrm{var}(t) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$.

- Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur und seien $a_1, \dots, a_n \in A$.
  Auf Grund des Koinzidenzlemmas gilt

$$[\![t]\!]^{(\mathcal{A},\beta)} \;=\; [\![t]\!]^{(\mathcal{A},\beta')}$$

  für alle Belegungen $\beta, \beta' : \mathrm{VAR} \to A$, so dass $\beta(x_i) = a_i = \beta'(x_i)$ für alle $i \in [n]$ gilt. Wir schreiben oft

$$t^{\mathcal{A}}[a_1, \dots, a_n],$$

  um das Element $[\![t]\!]^{(\mathcal{A},\beta)}$ zu bezeichnen.

- Für Terme $t \in \mathrm{T}_\sigma$, in denen keine Variable vorkommt, d.h. $\mathrm{var}(t) = \emptyset$ (so genannte Grundterme), schreiben wir einfach $t^{\mathcal{A}}$.

Notation für Formeln

- Für eine FO[σ]-Formel φ schreiben wir $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, um anzudeuten, dass $\text{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$.

- Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur und sind $a_1, \dots, a_n \in A$, so schreiben wir

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$$

wenn $(\mathcal{A}, \beta) \models \varphi$ für eine Belegung $\beta : \text{VAR} \to A$ mit $\beta(x_i) = a_i$ für alle $i \in [n]$ gilt.

Auf Grund des Koinzidenzlemmas gilt dann auch für alle Belegungen $\beta' : \text{VAR} \to A$ mit $\beta'(x_i) = a_i$ für alle $i \in [n]$, dass $(\mathcal{A}, \beta') \models \varphi$.

Sätze der Logik erster Stufe

Definition 3.29

Sei σ eine Signatur.

(a) Ein FO[σ]-Satz (kurz: Satz) ist eine FO[σ]-Formel φ mit $\text{frei}(\varphi) = \emptyset$.

(b) Wir schreiben S_σ, um die Menge aller FO[σ]-Sätze zu bezeichnen und setzen

$$\mathsf{S} \;:=\; \bigcup_{\sigma \text{ Signatur}} \mathsf{S}_\sigma.$$

(c) Für einen FO[σ]-Satz φ und eine σ-Struktur $\mathcal{A}$ schreiben wir $\mathcal{A} \models \varphi$, um auszudrücken, dass $(\mathcal{A}, \beta) \models \varphi$ für eine (und gemäß Koinzidenzlemma daher für jede) Belegung β in $\mathcal{A}$ gilt.

(d) Für eine Menge $\Phi \subseteq \mathsf{S}_\sigma$ von FO[σ]-Sätzen schreiben wir $\mathcal{A} \models \Phi$, falls $\mathcal{A} \models \varphi$ für *jedes* $\varphi \in \Phi$ gilt.

Als direkte Folgerung aus dem Isomorphielemma erhalten wir, dass für isomorphe σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ und für alle FO[σ]-Sätze φ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi \quad \iff \quad \mathcal{B} \models \varphi.$$

Modellklassen und Definierbarkeit

Definition 3.30

Sei σ eine Signatur und sei $\Phi \subseteq \mathsf{S}_\sigma$ (d.h. Φ ist eine Menge von FO[σ]-Sätzen).

(a) Die Modellklasse von Φ ist die Klasse $\mathrm{MOD}_\sigma(\Phi)$ aller σ-Strukturen $\mathcal{A}$ für die gilt: $\mathcal{A} \models \Phi$.

(b) Für eine Klasse $\mathfrak{C}$ von σ-Strukturen sagen wir

Φ definiert (oder axiomatisiert) $\mathfrak{C}$,

falls $\mathfrak{C} = \mathrm{MOD}_\sigma(\Phi)$.

(c) Für einen FO[σ]-Satz φ setzen wir $\mathrm{MOD}_\sigma(\varphi) := \mathrm{MOD}_\sigma(\{\varphi\})$ und sagen, dass φ die Klasse $\mathfrak{C} := \mathrm{MOD}_\sigma(\varphi)$ definiert (bzw. axiomatisiert).

Als direkte Folgerung aus dem Isomorphielemma erhalten wir:

Korollar 3.31

Für jede Signatur σ und jedes $\Phi \subseteq \mathsf{S}_\sigma$ ist $\mathrm{MOD}_\sigma(\Phi)$ unter Isomorphie abgeschlossen. D.h. für isomorphe σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gilt:

$$\mathcal{A} \in \mathrm{MOD}_\sigma(\Phi) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{B} \in \mathrm{MOD}_\sigma(\Phi).$$

Abschnitt 3.5:

Beispiele für Formeln der Logik erster Stufe in verschiedenen Anwendungsbereichen

Notation

- Ab jetzt verwenden wir für die Logik erster Stufe ähnliche Klammerkonventionen wie bei der Aussagenlogik.

- Für gewisse zweistellige Funktionssymbole wie $+, \cdot$ und zweistellige Relationssymbole wie $\leqslant$ verwenden wir Infix- statt Präfixnotation. Dabei setzen wir auf natürliche Weise Klammern, um die eindeutige Lesbarkeit zu gewährleisten.

- Wir schreiben $x < y$ als Abkürzung für die Formel $\big(x \leqslant y \ \land\ \neg\, x{=}y\big)$.

Ordnungen

Beispiel 3.32

Wir betrachten Strukturen und Formeln über der Signatur $\sigma := \{\leqslant\}$.

Zur Erinnerung: Eine σ-Struktur $\mathcal{A} = (A, \leqslant^{\mathcal{A}})$ ist eine lineare Ordnung, falls gilt:

(1) $\leqslant^{\mathcal{A}}$ ist reflexiv,

- d.h. für alle $a \in A$ gilt: $a \leqslant^{\mathcal{A}} a$
- d.h. $\mathcal{A} \models \varphi_{refl}$, wobei

$$\varphi_{refl} \;:=\; \forall x \; x \leqslant x$$

(2) $\leqslant^{\mathcal{A}}$ ist transitiv,

- d.h. für alle $a, b, c \in A$ gilt: Wenn $a \leqslant^{\mathcal{A}} b$ und $b \leqslant^{\mathcal{A}} c$, dann auch $a \leqslant^{\mathcal{A}} c$
- d.h. $\mathcal{A} \models \varphi_{trans}$, wobei

$$\varphi_{trans} \;:=\; \forall x \forall y \forall z \; \Big(\big(x \leqslant y \;\wedge\; y \leqslant z \big) \;\rightarrow\; x \leqslant z \Big)$$

(3) $\leqslant^{\mathcal{A}}$ ist antisymmetrisch,

- d.h. für alle $a, b \in A$ mit $a \neq b$ gilt: Wenn $a \leqslant^{\mathcal{A}} b$, dann $b \not\leqslant^{\mathcal{A}} a$
- d.h. $\mathcal{A} \models \varphi_{antisym}$, wobei

$$\varphi_{antisym} \quad := \quad \forall x \forall y \left(\neg\, x = y \ \rightarrow \left(x \leqslant y \ \rightarrow \ \neg\, y \leqslant x \right) \right)$$

(4) $\leqslant^{\mathcal{A}}$ ist konnex,

- d.h. für alle $a, b \in A$ gilt: $a \leqslant^{\mathcal{A}} b$ oder $b \leqslant^{\mathcal{A}} a$ oder $a = b$
- d.h. $\mathcal{A} \models \varphi_{konnex}$, wobei

$$\varphi_{konnex} \quad := \quad \forall x \forall y \left(x \leqslant y \ \vee \ y \leqslant x \ \vee \ x = y \right)$$

Insgesamt gilt für jede $\{\leqslant\}$-Struktur $\mathcal{A} = (A, \leqslant^{\mathcal{A}})$:
$\mathcal{A} = (A, \leqslant^{\mathcal{A}})$ ist eine lineare Ordnung $\iff$ $\mathcal{A} \models \varphi_{lin.Ord}$, wobei

$$\varphi_{lin.Ord} \quad := \quad \varphi_{refl} \ \wedge \ \varphi_{antisym} \ \wedge \ \varphi_{trans} \ \wedge \ \varphi_{konnex}$$

Der FO[σ]-Satz $\varphi_{lin.Ord}$ definiert (bzw. axiomatisiert) also die Klasse aller linearen Ordnungen.

Arithmetik

Beispiel 3.33

Wir betrachten Formeln über der Signatur $\sigma := \{+, \cdot, \leqslant, \underline{0}, \underline{1}\}$ und ihre Bedeutung im Standardmodell $\mathcal{A}_{\mathbb{N}}$ der Arithmetik.

- Gesucht: Eine FO[σ]-Formel $\varphi_{-}(x, y, z)$, die besagt „$x - y = z$“.

  Präzise: Für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ soll gelten:

$$\mathcal{A}_{\mathbb{N}} \models \varphi_{-}[a, b, c] \iff a - b = c.$$

  Lösung:

$$\varphi_{-}(x, y, z) := x = z + y$$

- Gesucht: Eine FO[σ]-Formel $\varphi_{|}(x, y)$, die besagt „x teilt y“.

  Präzise: Für alle $a, b \in \mathbb{N}$ soll gelten:

$$\mathcal{A}_{\mathbb{N}} \models \varphi_{|}[a, b] \iff \text{es gibt ein } c \in \mathbb{N}, \text{ so dass } a \cdot c = b.$$

  Lösung:

$$\varphi_{|}(x, y) := \exists z \; x \cdot z = y$$

- Gesucht: Eine FO[σ]-Formel $\varphi_{\equiv}(x, y, z)$, die besagt „$x \equiv y \pmod{z}$“.

  Präzise: Für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ soll gelten:

$$\mathcal{A}_{\mathbb{N}} \models \varphi_{\equiv}[a, b, c] \iff a \equiv b \pmod{c} \quad \text{d.h.} \quad c \;\Big|\; |a - b|$$

Lösung:

$$\varphi_{\equiv}(x, y, z) \;:=\; \exists w \Big(\underbrace{\big(\varphi_{-}(x, y, w) \vee \varphi_{-}(y, x, w)\big)}_{\text{„}w = |x-y|\text{“}} \wedge \underbrace{\varphi_{|}(z, w)}_{\text{„}z \mid w\text{“}} \Big)$$

- Gesucht: Eine FO[σ]-Formel $\varphi_{prim}(x)$, die besagt „x ist eine Primzahl".

  Präzise: Für alle $a \in \mathbb{N}$ soll gelten:

  $$\mathcal{A}_{\mathbb{N}} \models \varphi_{prim}[a] \iff a \text{ ist eine Primzahl}$$

  d.h. $a \geqslant 2$ und a ist nur durch sich selbst und durch 1 teilbar.

  Lösung:

  $$\varphi_{prim}(x) \ := \ \underbrace{\underline{1} + \underline{1} \leqslant x}_{„x \geqslant 2"} \ \wedge \ \forall z \left(\underbrace{\varphi_{|}(z,x)}_{„z \mid x"} \ \rightarrow \ \big(z = x \ \vee \ z = \underline{1} \big) \right)$$

- Gesucht: Ein FO[σ]-Satz φ_∞, der in $\mathcal{A}_{\mathbb{N}}$ besagt

  „Es gibt unendlich viele Primzahlen".

  Lösung:

  $$\varphi_\infty \ := \ \forall y \, \exists x \, \big(y \leqslant x \ \wedge \ \varphi_{prim}(x) \big)$$

  In $\mathcal{A}_{\mathbb{N}}$ besagt dieser Satz, dass es für jede natürliche Zahl b eine natürliche Zahl $a \geqslant b$ gibt, die eine Primzahl ist.

Worte

Beispiel 3.34

Wir betrachten das Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$ und die Signatur $\sigma_\Sigma = \{\leqslant, P_a, P_b\}$.

Zur Erinnerung: Wir repräsentieren ein nicht-leeres Wort $w \in \Sigma^*$ durch die σ_Σ-Struktur $\mathcal{A}_w$, deren Universum aus der Menge $\{1, \ldots, |w|\}$ aller Positionen in w besteht, und bei der $P_a^{\mathcal{A}_w}$ (bzw. $P_b^{\mathcal{A}_w}$) aus allen Positionen besteht, an denen der Buchstabe a (bzw. b) steht.

Gesucht: Ein FO[σ_Σ]-Satz φ, so dass für jedes nicht-leere Wort $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$\mathcal{A}_w \models \varphi \quad \iff \quad w \text{ ist von der Form } a^* b^*.$$

Lösung: Wir konstruieren eine Formel φ, die besagt, dass es eine Position x gibt, so dass alle Positionen links von x den Buchstaben a tragen und alle Positionen rechts von x den Buchstaben b tragen.

$$\varphi \ := \quad \exists x \, \forall y \, \Big(\big(y < x \to P_a(y) \big) \ \land \ \big(x < y \to P_b(y) \big) \Big)$$

Wie bereits vereinbart, schreiben wir hier „$x < y$“ als Abkürzung für die Formel $(x \leqslant y \land \neg\, x = y)$.

Transitionssysteme

Beispiel 3.35

Sei σ_A eine Menge von Aktionen und σ_P eine Menge von Propositionen. Wir betrachten Formeln über der Signatur $\sigma := \sigma_A \cup \sigma_P$.

Zur Erinnerung: Ein (σ_A, σ_P)-Transitionssystem ist eine $(\sigma_A \cup \sigma_P)$-Struktur $\mathcal{T}$.

- Sei
$$\varphi \;:=\; \forall x \Big(P(x) \to \exists y\, R(x,y) \Big)$$
wobei $P \in \sigma_P$ und $R \in \sigma_A$ ist.

  Dann gilt für alle (σ_A, σ_P)-Transitionssysteme $\mathcal{T}$:

  $\mathcal{T} \models \varphi \iff$ In allen Zuständen von $\mathcal{T}$, in denen P gilt, ist die Aktion R möglich.

- Sei $n \geqslant 2$, seien $R_1, \ldots, R_n \in \sigma_A$ und sei $P_F \in \sigma_P$.

  Gesucht: Eine FO[σ]-Formel $\psi_n(x)$, so dass für jedes (σ_A, σ_P)-Transitionssystem $\mathcal{T}$ und jeden Zustand $t \in T$ gilt:

  $\mathcal{T} \models \psi[t] \iff$ Vom Zustand t aus lässt sich mittels der Folge $(R_1, \ldots, R_n)$ von Aktionen ein Zustand erreichen, in dem P_F gilt.

  Lösung: Für $n = 3$ können wir beispielsweise folgende Formel wählen:

  $$\psi_3(x) \ := \quad \exists y_1 \exists y_2 \exists y_3 \ \Big(R_1(x, y_1) \land R_2(y_1, y_2) \land R_3(y_2, y_3) \land P_F(y_3) \Big)$$

  Allgemein ist für $n \geqslant 2$ die Formel $\psi_n(x)$ von der folgenden Form:

  $$\exists y_1 \exists y_2 \cdots \exists y_n \ \Big(R_1(x, y_1) \land R_2(y_1, y_2) \land \cdots \land R_n(y_{n-1}, y_n) \land P_F(y_n) \Big)$$

Abschnitt 3.6:

Logik und Datenbanken

Datenbanken

Zur Erinnerung: Wir repräsentieren eine Kinodatenbank, die Informationen über Kinos, Filme und das aktuelle Programm enthält, durch eine Struktur über der Signatur $\sigma_{\mathsf{KINO}} :=$

$$\{ R_{Kino}/4, \;\; R_{Film}/3, \;\; R_{Prog}/3 \} \;\cup\; \{ \text{`}c\text{'} \;:\; c \in \mathtt{ASCII}^* \}$$

und können so z.B. die folgende Kinodatenbank als σ_{KINO}-Struktur $\mathcal{D}$ auffassen, deren Universum D aus der Menge aller Worte über dem ASCII-Alphabet besteht.

Beispiel: Eine Kinodatenbank

Kino			
Name	Adresse	Stadtteil	Telefonnummer
Babylon	Dresdner Str. 126	Kreuzberg	030 61 60 96 93
Casablanca	Friedenstr. 12-13	Adlershof	030 67 75 75 2
Filmtheater am Friedrichshain	Bötzowstr. 1-5	Prenzlauer Berg	030 42 84 51 88
Kino International	Karl-Marx-Allee 33	Mitte	030 24 75 60 11
Moviemento	Kotbusser Damm 22	Kreuzberg	030 692 47 85
Urania	An der Urania 17	Schöneberg	030 21 89 09 1

Film		
Name	Regisseur	Schauspieler
Alien	Ridley Scott	Sigourney Weaver
Blade Runner	Ridley Scott	Harrison Ford
Blade Runner	Ridley Scott	Sean Young
Brazil	Terry Gilliam	Jonathan Pryce
Brazil	Terry Gilliam	Kim Greist
Casablanca	Michael Curtiz	Humphrey Bogart
Casablanca	Michael Curtiz	Ingrid Bergmann
Gravity	Alfonso Cuaron	Sandra Bullock
Gravity	Alfonso Cuaron	George Clooney
Monuments Men	George Clooney	George Clooney
Monuments Men	George Clooney	Matt Damon
Resident Evil	Paul Anderson	Milla Jovovich
Terminator	James Cameron	Arnold Schwarzenegger
Terminator	James Cameron	Linda Hamilton
Terminator	James Cameron	Michael Biehn
...	...	...

Programm		
Kino	Film	Zeit
Babylon	Casablanca	17:30
Babylon	Gravity	20:15
Casablanca	Blade Runner	15:30
Casablanca	Alien	18:15
Casablanca	Blade Runner	20:30
Casablanca	Resident Evil	20:30
Filmtheater am Friedrichshain	Resident Evil	20:00
Filmtheater am Friedrichshain	Resident Evil	21:30
Filmtheater am Friedrichshain	Resident Evil	23:00
Kino International	Casablanca	18:00
Kino International	Brazil	20:00
Kino International	Brazil	22:00
Moviemento	Gravity	17:00
Moviemento	Gravity	19:30
Moviemento	Alien	22:00
Urania	Monuments Men	17:00
Urania	Monuments Men	20:00

Die Kinodatenbank als Struktur

Signatur: $\sigma_{\text{KINO}} \ := \ \{\, R_{Kino}/4,\ \ R_{Film}/3,\ \ R_{Prog}/3 \,\} \ \cup \ \{\, \text{'}c\text{'} \ : \ c \in \texttt{ASCII}^* \,\}$

Die Kinodatenbank wird dargestellt als σ_{KINO}-Struktur $\mathcal{D}$.

Universum:

$$D \ := \ \texttt{ASCII}^* \ \supseteq \ \{\text{Babylon, Dresdner Str. 126, Kreuzberg, 030 61 60 96 93,}\ \text{Casablanca, \ldots, 20:00}\}.$$

Relationen:

$$\begin{aligned}
R_{Kino}^{\mathcal{D}} := \{\ & (\text{Babylon, Dresdner Str. 126, Kreuzberg, 030 61 60 96 93}),\\
& (\text{Casablanca, Friedenstr. 12-13, Adlershof, 030 67 75 75 2}),\\
& \ldots,\\
& (\text{Urania, An der Urania 17, Schöneberg, 030 21 89 09 1}) \ \}\\
R_{Film}^{\mathcal{D}} := \{\ & (\text{Alien, Ridley Scott, Sigourney Weaver}),\\
& (\text{Blade Runner, Ridley Scott, Harrison Ford}), \quad \ldots \quad \}\\
R_{Prog}^{\mathcal{D}} := \{\ & (\text{Babylon, Casablanca, 17:30}),\\
& (\text{Babylon, Gravity, 20:15}), \quad \ldots \quad \}.
\end{aligned}$$

Konstanten: $\text{'}c\text{'}^{\mathcal{D}} \ := \ c$, für jedes $c \in \texttt{ASCII}^*$.

D.h.: jedes Konstantensymbol wird durch den zwischen den Hochkommas stehenden Text interpretiert.

Beispiel 3.36

(a) Die Anfrage

„Gib die Titel aller Filme aus, die um 22:00 Uhr beginnen."

lässt sich durch folgende FO[σ_{KINO}]-Formel $\varphi_1(x_T)$ beschreiben:

$$\varphi_1(x_T) \ := \quad \exists x_K \ R_{Prog}(x_K, x_T, \text{‘22:00’})$$

(b) Die Anfrage

„Gib die Titel aller Filme aus, in denen George Clooney mitspielt oder Regie führt"

lässt sich durch folgende FO[σ_{KINO}]-Formel beschreiben: $\varphi_2(x_T) :=$

$$\exists x_R \ R_{Film}(x_T, x_R, \text{‘George Clooney’}) \ \vee \ \exists x_S \ R_{Film}(x_T, \text{‘George Clooney’}, x_S)$$

(c) Die Anfrage

„Gib Name und Stadtteil aller Kinos aus, in denen ein Film läuft, in dem George Clooney mitspielt oder Regie führt“

lässt sich durch folgende FO[σ_{KINO}]-Formel beschreiben: $\varphi_3(x_K, x_{St}) :=$

$$\exists x_A\, \exists x_{Tel}\;\; R_{Kino}(x_K, x_A, x_{St}, x_{Tel}) \quad \wedge$$
$$\exists x_T\, \exists x_Z\; \Big(R_{Prog}(x_K, x_T, x_Z) \;\wedge$$
$$\big(\exists x_R\; R_{Film}(x_T, x_R, \text{‘George Clooney’}) \;\vee\; \exists x_S\; R_{Film}(x_T, \text{‘George Clooney’}, x_S)\big)\Big)$$

Die erste Zeile der Formel stellt sicher, dass x_K ein Kino und x_S dessen Stadtteil ist; die Zeilen 2 und 3 stellen sicher, dass im Kino x_K ein Film läuft, in dem George Clooney mitspielt oder Regie führt.

Eine andere Sichtweise auf die Semantik

- Anstatt Wahrheitswerte in Interpretationen definieren Formeln der Logik der ersten Stufe auch Relationen in Strukturen.

- Junktoren und Quantoren entsprechen dann algebraischen Operatoren auf Relationen.

- Diese Sichtweise ist insbesondere in der Datenbanktheorie wichtig und bildet die Grundlage effizienter Algorithmen zur Auswertung von Datenbankanfragen.

Definition 3.37

Sei σ eine Signatur, sei $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ eine FO[σ]-Formel und sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur.
Die von $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ in $\mathcal{A}$ definierte n-stellige Relation ist

$$[\![\varphi(x_1, \dots, x_n)]\!]^{\mathcal{A}} \quad := \quad \{\, (a_1, \dots, a_n) \in A^n \;:\; \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \,\}.$$

Vorsicht: Die Relation $[\![\varphi(x_1, \dots, x_n)]\!]^{\mathcal{A}}$ hängt nicht nur von der Formel φ ab, sondern auch von dem Tupel $(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{VAR}^n$.

Beispiel 3.38

Die FO[σ_{KINO}]-Formeln $\varphi_2(x_T)$ und $\varphi_3(x_K, x_{St})$ aus Beispiel 3.36 definieren in unserer Beispiel-Datenbank $\mathcal{D}$ die Relationen

$$[\![\varphi_2(x_T)]\!]^{\mathcal{D}} \quad = \quad \begin{Bmatrix} (\,\text{Gravity}\,), \\ (\,\text{Monuments Men}\,) \end{Bmatrix}$$

und

$$[\![\varphi_3(x_K, x_{St})]\!]^{\mathcal{D}} \quad = \quad \begin{Bmatrix} (\,\text{Babylon, Kreuzberg}\,), \\ (\,\text{Moviemento, Kreuzberg}\,), \\ (\,\text{Urania, Schöneberg}\,) \end{Bmatrix}$$

Ändern der Variablen

Lemma 3.39

Sei σ eine Signatur, sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur und sei $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{FO}[\sigma]$.

(a) *Für jede Permutation*[2] *π von $[n]$ ist*

$$[\![\varphi(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})]\!]^{\mathcal{A}} \quad = \quad \{\, (a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(n)}) \ : \ (a_1, \ldots, a_n) \in [\![\varphi(x_1, \ldots, x_n)]\!]^{\mathcal{A}} \,\}.$$

(b) *Für jede Variable $y \in \mathrm{VAR} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ ist*

$$[\![\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)]\!]^{\mathcal{A}} \quad = \quad [\![\varphi(x_1, \ldots, x_n)]\!]^{\mathcal{A}} \ \times \ A.$$

(c) *Falls $x_n \notin \mathrm{frei}(\varphi)$, so ist*

$$[\![\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})]\!]^{\mathcal{A}} \quad = \quad \{\, (a_1, \ldots, a_{n-1}) \ : \ \textit{es gibt (mind.) ein } a \in A \textit{ so dass } (a_1, \ldots, a_{n-1}, a) \in [\![\varphi(x_1, \ldots, x_n)]\!]^{\mathcal{A}} \,\}.$$

---

[2] Eine Permutation einer Menge M ist eine bijektive Abbildung von M nach M.

Rekursive Beschreibung von $[\![\varphi(x_1,\ldots,x_n)]\!]^{\mathcal{A}}$

Beobachtung 3.40

Ist σ eine Signatur und $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur, so können wir für FO[σ]-Formeln φ und Variablentupel $(x_1,\ldots,x_n)$ mit $\text{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1,\ldots,x_n\}$ die Relation $[\![\varphi(x_1,\ldots,x_n)]\!]^{\mathcal{A}} \subseteq A^n$ rekursiv wie folgt beschreiben:

- Falls φ von der Form $t_1 = t_2$ für σ-Terme t_1, t_2 ist, so ist

$$[\![\varphi(x_1,\ldots,x_n)]\!]^{\mathcal{A}} \;=\; \{\ (a_1,\ldots,a_n) \in A^n : \ t_1^{\mathcal{A}}[a_1,\ldots,a_n] \;=\; t_2^{\mathcal{A}}[a_1,\ldots,a_n]\ \}$$

  Zur Erinnerung: Für einen σ-Term $t(x_1,\ldots,x_n)$ schreiben wir $t^{\mathcal{A}}[a_1,\ldots,a_n]$ um das Element $[\![t]\!]^{(\mathcal{A},\beta)} \in A$ zu bezeichnen, wobei β eine Belegung mit $\beta(x_i) = a_i$, für alle $i \in [n]$, ist.

- Falls φ von der Form $R(t_1,\ldots,t_k)$ für ein $R \in \sigma$, für $k := \text{ar}(R)$ und für σ-Terme $t_1,\ldots,t_k$ ist, so ist

$$[\![\varphi(x_1,\ldots,x_n)]\!]^{\mathcal{A}} \;=\; \{\ (a_1,\ldots,a_n) \in A^n : \ \big(\, t_1^{\mathcal{A}}[a_1,\ldots,a_n],\ \ldots,\ t_k^{\mathcal{A}}[a_1,\ldots,a_n] \,\big) \in R^{\mathcal{A}}\ \}$$

- Falls φ von der Form $\neg\psi$ ist, so ist

$$[\![\varphi(x_1,\ldots,x_n)]\!]^{\mathcal{A}} \quad = \quad A^n \setminus [\![\psi(x_1,\ldots,x_n)]\!]^{\mathcal{A}}$$

- Falls φ von der Form $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ ist, so ist

$$[\![\varphi(x_1,\ldots,x_n)]\!]^{\mathcal{A}} \quad = \quad [\![\psi_1(x_1,\ldots,x_n)]\!]^{\mathcal{A}} \cap [\![\psi_2(x_1,\ldots,x_n)]\!]^{\mathcal{A}}$$

- Falls φ von der Form $(\psi_1 \vee \psi_2)$ ist, so ist

$$[\![\varphi(x_1,\ldots,x_n)]\!]^{\mathcal{A}} \quad = \quad [\![\psi_1(x_1,\ldots,x_n)]\!]^{\mathcal{A}} \cup [\![\psi_2(x_1,\ldots,x_n)]\!]^{\mathcal{A}}$$

- Falls φ von der Form $(\psi_1 \rightarrow \psi_2)$ ist, so ist

$$[\![\varphi(x_1,\ldots,x_n)]\!]^{\mathcal{A}} \quad = \quad [\![\neg\psi_1(x_1,\ldots,x_n)]\!]^{\mathcal{A}} \cup [\![\psi_2(x_1,\ldots,x_n)]\!]^{\mathcal{A}}$$

- Falls φ von der Form $\exists y\ \psi$ ist, so ist

$$[\![\varphi(x_1,\dots,x_n)]\!]^{\mathcal{A}} \;=\; \{\ (a_1,\dots,a_n) \in A^n :\ \text{es gibt (mind.) ein}\ b \in A \text{ mit } (a_1,\dots,a_n,b) \in [\![\psi(x_1,\dots,x_n,y)]\!]^{\mathcal{A}}\ \}$$

Somit ist $[\![\varphi(x_1,\dots,x_n)]\!]^{\mathcal{A}}$ die Projektion von $[\![\psi(x_1,\dots,x_n,y)]\!]^{\mathcal{A}}$ auf die ersten n Stellen.

- Falls φ von der Form $\forall y\ \psi$ ist, so ist

$$[\![\varphi(x_1,\dots,x_n)]\!]^{\mathcal{A}} \;=\; \{\ (a_1,\dots,a_n) \in A^n :\ \text{für jedes}\ b \in A \text{ ist } (a_1,\dots,a_n,b) \in [\![\psi(x_1,\dots,x_n,y)]\!]^{\mathcal{A}}\ \}$$

Das Auswertungsproblem für FO

Eingabe: Eine endliche Signatur σ,
eine σ-Struktur $\mathcal{A}$, deren Universum A endlich ist,
eine FO[σ]-Formel φ,
eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ und
ein Variablentupel $(x_1, \dots, x_n) \in \text{VAR}^n$, so dass $\text{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ ist.

Aufgabe: Berechne $[\![\varphi(x_1, \dots, x_n)]\!]^{\mathcal{A}}$.

Beobachtung 3.40 führt unmittelbar zu einem rekursiven Algorithmus, der das Auswertungsproblem für FO löst.

Eine Laufzeitanalyse zeigt, dass Folgendes gilt:

Satz 3.41

Es gibt einen Algorithmus, der das Auswertungsproblem für FO *bei Eingabe einer Signatur σ, eine σ-Struktur $\mathcal{A}$, einer* $\mathrm{FO}[\sigma]$*-Formel φ, einer Zahl n und eines Variablentupels $(x_1, \ldots, x_n)$ mit* $\mathrm{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ *in Zeit*

$$O\left(\|\varphi\| + \|\mathcal{A}\| + \|\varphi\| \cdot w \cdot \|\mathcal{A}\|^w \right)$$

löst, wobei gilt:

- $\|\varphi\|$ *ist die Länge von φ, aufgefasst als Wort über dem Alphabet $A_{\mathrm{FO}[\sigma]}$*
- w *ist die maximale Anzahl freier Variablen in Subformeln von φ — die so genannte Breite (engl.: width) von φ*
- $\|\mathcal{A}\|$ *ist ein Maß für die Größe einer geeigneten Repräsentation von $\mathcal{A}$ als Eingabe für einen Algorithmus; präzise:*

$$\|\mathcal{A}\| := |\sigma| + \sum_{R \in \sigma} |R^{\mathcal{A}}| \cdot \mathrm{ar}(R) + \sum_{f \in \sigma} |A|^{\mathrm{ar}(f)} \cdot (\mathrm{ar}(f)+1)$$

(Hier ohne Beweis)

Abschnitt 3.7:

Äquivalenz von Formeln der Logik erster Stufe

Äquivalenz

Definition 3.42

Sei σ eine Signatur.

(a) Zwei FO[σ]-Formeln φ und ψ heißen äquivalent (kurz: $\varphi \equiv \psi$), wenn für jede σ-Interpretation $\mathcal{I}$ gilt:

$$\mathcal{I} \models \varphi \iff \mathcal{I} \models \psi.$$

(b) Zwei Formelmengen $\Phi, \Psi \subseteq \text{FO}[\sigma]$ heißen äquivalent (kurz: $\Phi \equiv \Psi$), wenn für jede σ-Interpretation $\mathcal{I}$ gilt:[3]

$$\mathcal{I} \models \Phi \iff \mathcal{I} \models \Psi.$$

[3] Zur Erinnerung: $\mathcal{I} \models \Phi$ bedeutet, dass $\mathcal{I} \models \varphi$ für jede Formel $\varphi \in \Phi$ gilt.

Beispiel 3.43

Welche der folgenden Formeln sind äquivalent, welche nicht?

- $\varphi_1 := \exists y\, E(x, y)$
- $\varphi_2 := \exists z\, E(x, z)$
- $\varphi_3 := \exists z\, E(y, z)$

Aussagenlogische Äquivalenzen

Lemma 3.44

Ersetzt man in äquivalenten aussagenlogischen Formeln aus $\mathsf{AL}(\{\wedge, \vee, \neg, \to\})$ *alle Aussagenymbole durch* $\mathsf{FO}[\sigma]$*-Formeln, so erhält man äquivalente* $\mathsf{FO}[\sigma]$*-Formeln.*

Beispiel

Aus der aussagenlogische Äquivalenz $(X \to Y) \equiv \neg X \vee Y$ folgt, dass

$$(\varphi \to \psi) \equiv \neg\varphi \vee \psi$$

für alle $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln φ und ψ gilt.

Quantoren und Negation

Man sieht leicht, dass Folgendes gilt:

Lemma 3.45

Für alle FO[σ]*-Formeln* φ *und alle Variablen* $x \in$ VAR *gilt:*

$$\neg\,\exists x\,\varphi \;\equiv\; \forall x\,\neg\varphi \qquad \textit{und} \qquad \neg\,\forall x\,\varphi \;\equiv\; \exists x\,\neg\varphi.$$

Beweis: Folgt direkt aus der Definition der Semantik (Details: Übung). $\square$

Das Ersetzungslemma

Lemma 3.46

Sei σ eine beliebige Signatur und sei φ eine $\mathsf{FO}[\sigma]$*-Formel.*
Ist φ' eine $\mathsf{FO}[\sigma]$*-Formel, die aus φ entsteht, indem man eine Subformel ψ von φ durch eine zu ψ äquivalente* $\mathsf{FO}[\sigma]$*-Formel ψ' ersetzt, so ist $\varphi \equiv \varphi'$.*

Beweis: Übung.

Satz 3.47

Jede $\mathsf{FO}[\sigma]$*-Formel ist äquivalent zu einer* $\mathsf{FO}[\sigma]$*-Formel, in der*

(a) *keiner der Junktoren $\{\wedge, \rightarrow\}$ vorkommt*
(d.h., es kommen nur die Junktoren $\neg, \vee$ und die Quantoren $\exists, \forall$ vor).

(b) *nur Existenzquantoren und die Junktoren $\neg, \vee$ vorkommen.*

(c) *nur Existenzquantoren und die Junktoren $\neg, \wedge$ vorkommen.*

(d) *nur Allquantoren und die Junktoren $\neg, \vee$ vorkommen.*

(e) *nur Allquantoren und die Junktoren $\neg, \wedge$ vorkommen.*

Daher genügt es, bei Beweisen per Induktion über den Aufbau von Formeln von nun an im Induktionsschritt i.d.R. nur noch die Fälle für $\exists$, $\neg$, $\vee$ zu betrachten.

Gebundene Umbennung

Sei σ eine beliebige Signatur, ψ eine FO[σ]-Formel
und $z \in \text{VAR} \setminus \text{frei}(\psi)$ eine Variable.

Falls ψ' aus ψ entsteht, indem jedes freie Vorkommen von x in ψ durch z ersetzt wird, dann gilt

$$\exists x\ \psi \ \equiv\ \exists z\ \psi' \tag{1}$$

$$\forall x\ \psi \ \equiv\ \forall z\ \psi'. \tag{2}$$

Beispiel:

$$\exists x\ \big(E(x,y) \land \forall z\ P(z)\big) \land P(x) \ \equiv\ \exists z\ \big(E(z,y) \land \forall z\ P(z)\big) \land P(x)$$

▸ Abschnitt Folgerung

Abschnitt 3.8:

Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele

In diesem Abschnitt werden Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele (kurz: EF-Spiele) eingeführt. Diese liefern ein Werkzeug, mit dessen Hilfe man zeigen kann, dass bestimmte Anfragen oder Klassen von Strukturen nicht in Logik erster Stufe definiert werden können.

Der Einfachheit halber betrachten wir hier nur Signaturen, die keine Funktionssymbole und keine Konstantensymbole enthalten. Solche Signaturen werden im Folgenden relationale Signaturen genannt.

Außerdem werden wir im Folgenden bei zwei gegebenen Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ immer o.B.d.A. annehmen, dass ihre Universen disjunkt sind, d.h. $A \cap B = \emptyset$.

Das m-Runden EF-Spiel

Sei σ eine relationale Signatur und seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen.

Für $k \in \mathbb{N}$ seien $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A$ und $\overline{b} := b_1, \ldots, b_k \in B$ Folgen der Länge k von Elementen aus A bzw. B.

Sei $m \in \mathbb{N}$.

Das m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ (bzw. auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, falls $k = 0$ ist) wird gemäß folgender Spielregeln gespielt:

Spielregeln des m-Runden EF-Spiels auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$

- Es gibt 2 Spieler, genannt Spoiler (kurz: *Sp*) und Duplicator (kurz: *Dupl*).
- Das Spielbrett besteht aus $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$.
- Eine Partie des Spiels besteht aus m Runden.

  In jeder Runde $i \in \{1, \ldots, m\}$ geschieht Folgendes:

  1. Zunächst wählt Spoiler entweder ein Element in A, das im Folgenden mit a_{k+i} bezeichnet wird, oder er wählt ein Element in B, das im Folgenden mit b_{k+i} bezeichnet wird.

     Beachte: Insbes. kann Spoiler in jeder Runde neu entscheiden, in welcher der beiden Strukturen er ein Element wählen möchte.

  2. Danach antwortet Duplicator mit einem Element aus dem Universum der anderen Struktur, d.h. er wählt ein $b_{k+i} \in B$, falls Spoiler ein $a_{k+i} \in A$ gewählt hat, bzw. ein Element $a_{k+i} \in A$, falls Spoiler ein $b_{k+i} \in B$ gewählt hat.

  Nach Runde m ist die Partie beendet und der Gewinner wird wie folgt ermittelt:

Gewinnbedingung

Duplicator hat gewonnen, falls die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(1) Für alle $j, j' \in \{1, \ldots, k+m\}$ gilt: $a_j = a_{j'} \iff b_j = b_{j'}$.

(2) Die Abbildung $\pi : \{a_1, \ldots, a_{k+m}\} \to \{b_1, \ldots, b_{k+m}\}$ mit

$$\pi(a_j) := b_j, \qquad \text{für jedes } j \in \{1, \ldots, k+m\}$$

ist ein partieller Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ (siehe Definition 3.48).

Spoiler hat gewonnen, falls mindestens eine der beiden obigen Bedingungen verletzt ist.

Definition 3.48 (partieller Isomorphismus)

Sei σ eine relationale Signatur, seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen, sei $X \subseteq A$. Eine Abbildung $\pi : X \to B$ heißt partieller Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$, falls gilt:

(1) π ist injektiv und

(2) für jedes $R \in \sigma$, für $r := \text{ar}(R)$ und für alle $(x_1, \ldots, x_r) \in X^r$ gilt:

$$(x_1, \ldots, x_r) \in R^{\mathcal{A}} \iff (\pi(x_1), \ldots, \pi(x_r)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

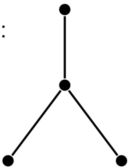
Beispiel 3.49

Sei $\sigma := \{ E/2 \}$ und sei $k := 0$.

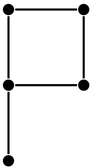
In den folgenden Darstellungen von Graphen repräsentiert jede ungerichtete Kante zwischen Knoten x, y die beiden gerichteten Kanten (x, y) und (y, x).

(a) Betrachte die folgenden beiden Graphen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$.

$\mathcal{A}$:

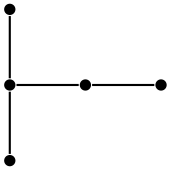


$\mathcal{B}$:

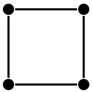


(b) Betrachte die beiden folgenden Graphen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$.

$\mathcal{A}$:



$\mathcal{B}$:



Die Ziele von Spoiler und Duplicator

Die Gewinnbedingung im EF-Spiel ist so gewählt, dass die Ziele von Spoiler und Duplicator anschaulich folgendermaßen beschrieben werden können:

- Spoilers Ziel ist es, zu zeigen, dass die beiden Strukturen $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ verschieden sind.
- Duplicators Ziel ist es, einen etwaigen Unterschied zwischen den beiden Strukturen zu vertuschen.

Gewinnstrategien

Eine Strategie für einen der beiden Spieler im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ ist eine Vorschrift, die ihm sagt, welchen Zug er als Nächstes machen soll. Formal:

- Eine Strategie für Spoiler ist eine Abbildung

$$f_{Sp} \ : \ \bigcup_{i=0}^{m-1} (A \times B)^i \ \longrightarrow \ A \cup B.$$

  Sind $a_{k+1}, \dots, a_{k+i} \in A$ und $b_{k+1}, \dots, b_{k+i} \in B$ die in den ersten i Runden gewählten Elemente, so gibt

$$f_{Sp}(a_{k+1}, b_{k+1}, \dots, a_{k+i}, b_{k+i})$$

  an, welches Element Spoiler in der $(i{+}1)$-ten Runde wählen soll.

- Eine Strategie für Duplicator ist eine Abbildung

$$f_{Dupl} \;:\; \bigcup_{i=0}^{m-1} (A \times B)^i \times (A \cup B) \;\longrightarrow\; B \cup A,$$

so dass für alle $i \in \{0, \ldots, m-1\}$, alle $a_{k+1}, \ldots, a_{k+i} \in A$, alle $b_{k+1}, \ldots, b_{k+i} \in B$ und alle $c_{k+i+1} \in A \cup B$ gilt:

$$c_{k+i+1} \in A \quad \Longleftrightarrow \quad f_{Dupl}(a_{k+1}, b_{k+1}, \ldots, a_{k+i}, b_{k+i}, c_{k+i+1}) \;\in\; B.$$

Sind $a_{k+1}, \ldots, a_{k+i} \in A$ und $b_{k+1}, \ldots, b_{k+i} \in B$ die in den ersten i Runden und ist $c_{k+i+1} \in A \cup B$ das von Spoiler in Runde $i+1$ gewählte Element, so gibt

$$f_{Dupl}(a_{k+1}, b_{k+1}, \ldots, a_{k+i}, b_{k+i}, c_{k+i+1})$$

an, welches Element Duplicator in der $(i+1)$-ten Runde wählen soll.

- Eine Gewinnstrategie ist eine Strategie für einen der beiden Spieler, mit der er jede Partie des m-Runden EF-Spiels auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ gewinnt.

Der Satz von Ehrenfeucht

Sei σ eine relationale Signatur, seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen, sei $m \in \mathbb{N}$, sei $k \in \mathbb{N}$, sei $\overline{a} = a_1, \ldots, a_k \in A$ und $\overline{b} = b_1, \ldots, b_k \in B$.

Der Satz von Ehrenfeucht besagt, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) Duplicator hat eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$.

(2) Für jede FO[σ]-Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ der Quantorentiefe $\leqslant m$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_k] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{B} \models \varphi[b_1, \ldots, b_k].$$

Anschaulich bedeutet dies, dass $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ aus Perspektive von FO[σ]-Formeln der Quantorentiefe $\leqslant m$ „gleich" aussehen, d.h. dass $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ von solchen Formeln nicht unterschieden werden können.

Die Quantorentiefe einer Formel φ ist dabei die maximale Anzahl von ineinander geschachtelten Quantoren, die in φ vorkommen:

Definition 3.50

Die Quantorentiefe (bzw. der Quantorenrang, engl.: quantifier rank) $\mathrm{qr}(\varphi)$ einer $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formel φ ist rekursiv wie folgt definiert:

- Ist φ atomar, so ist $\mathrm{qr}(\varphi) := 0$.
- Ist φ von der Form $\neg\psi$, so ist $\mathrm{qr}(\varphi) := \mathrm{qr}(\psi)$.
- Ist φ von der Form $(\psi_1 * \psi_2)$ mit $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, so ist $\mathrm{qr}(\varphi) := \max\{\mathrm{qr}(\psi_1),\ \mathrm{qr}(\psi_2)\}$.
- Ist φ von der Form $\exists x\, \psi$ oder $\forall x\, \psi$, so ist $\mathrm{qr}(\varphi) := \mathrm{qr}(\psi) + 1$.

Beispiele:

- $\mathrm{qr}\big(\exists x \forall y\ (x{=}y \vee E(x,y))\big) = 2.$
- $\mathrm{qr}\big(\exists x\ (E(x,x) \vee \forall y\ \neg E(x,y))\big) = 2.$
- $\mathrm{qr}\big((\exists x\ E(x,x) \vee \forall y\ \neg E(x,y))\big) = 1.$

Bemerkung 3.51

Gemäß Satz 3.47 ist jede $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formel φ äquivalent zu einer $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formel φ', in der nur Existenzquantoren und die Junktoren $\neg, \vee$ vorkommen (d.h.: in φ' kommt keins der Symbole $\forall, \wedge, \rightarrow$ vor). Man sieht leicht, dass φ' sogar so gewählt werden kann, dass gilt: $\mathrm{qr}(\varphi') = \mathrm{qr}(\varphi)$ und $\mathrm{frei}(\varphi') = \mathrm{frei}(\varphi)$.

Wir beweisen hier nur die Richtung „(1) $\Longrightarrow$ (2)“ des Satzes von Ehrenfeucht, deren Kontraposition in folgendem Satz formuliert wird.

Satz 3.52 (Satz von Ehrenfeucht, einfache Version)

Sei σ eine relationale Signatur und seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen, sei $m \in \mathbb{N}$, sei $k \in \mathbb{N}$, sei $\overline{a} = a_1, \ldots, a_k \in A$ und sei $\overline{b} = b_1, \ldots, b_k \in B$.

Falls es eine FO$[\sigma]$*-Formel* $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ *mit* $\mathrm{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_k\}$ *und* $\mathrm{qr}(\varphi) \leqslant m$ *gibt, so dass*

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_k] \qquad \text{und} \qquad \mathcal{B} \not\models \varphi[b_1, \ldots, b_k]\,,$$

so hat Spoiler eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ *und* $(\mathcal{B}, \overline{b})$*.*

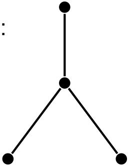
Beweisidee

Zunächst illustrieren wir die Beweisidee an einem Beispiel. Betrachte dazu die Formel

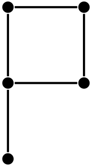
$$\varphi \;:=\; \exists x_1 \forall x_2 \; (\, x_1 = x_2 \;\vee\; E(x_1, x_2) \,)$$

und die beiden Graphen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ aus Beispiel 3.49(a).

$\mathcal{A}$:



$\mathcal{B}$:



Es gilt: $\mathcal{A} \models \varphi$ und $\mathcal{B} \not\models \varphi$, d.h. $\mathcal{B} \models \neg\varphi$.

Beweis von Satz 3.52:

Per Induktion über den Aufbau von Formeln. Es seien eine relationale Signatur σ und zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gegeben. Die Aussage $\mathbb{A}(\varphi)$, die wir für alle FO[σ]-Formeln φ beweisen wollen, besagt Folgendes:

> *Für alle $m, k \in \mathbb{N}$, alle $\overline{a} = a_1, \ldots, a_k \in A$ und alle $\overline{b} = b_1, \ldots, b_k \in B$ gilt:*
>
> *Falls $\mathrm{qr}(\varphi) \leqslant m$ und $|\,\mathrm{frei}(\varphi)| \leqslant k$ und*
>
> $$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_k] \iff \mathcal{B} \not\models \varphi[b_1, \ldots, b_k],$$
>
> *so hat* Spoiler eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$*.*

Um $\mathbb{A}(\varphi)$ für eine gegebene Formel φ zu beweisen, seien im Folgenden $m, k \in \mathbb{N}$, $\overline{a} = a_1, \ldots, a_k \in A$ und $\overline{b} = b_1, \ldots, b_k \in B$ beliebig gewählt. Es genügt, den Fall zu betrachten, in dem gilt:

$$(*): \quad m \geqslant \mathrm{qr}(\varphi), \quad k \geqslant |\,\mathrm{frei}(\varphi)| \quad \text{und} \quad \mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}] \iff \mathcal{B} \not\models \varphi[\overline{b}],$$

denn andernfalls muss gemäß der Formulierung von $\mathbb{A}(\varphi)$ nichts gezeigt werden.

Folgerung aus dem Satz von Ehrenfeucht

Notation 3.53

Eine Klasse $\mathfrak{C}$ von σ-Strukturen heißt FO-definierbar, falls es einen FO[σ]-Satz φ gibt, der $\mathfrak{C}$ definiert.

Zur Erinnerung:

Für einen FO[σ]-Satz φ und eine Klasse $\mathfrak{C}$ von σ-Strukturen sagen wir „φ definiert $\mathfrak{C}$“, falls für jede σ-Struktur $\mathcal{A}$ gilt: $\mathcal{A} \in \mathfrak{C} \iff \mathcal{A} \models \varphi$.

Um für eine gegebene Klasse $\mathfrak{C}$ von σ-Strukturen zu zeigen, dass sie nicht FO-definierbar ist, können wir das folgende Korollar nutzen, das wir als eine einfache Folgerung aus Satz 3.52 erhalten.

Korollar 3.54

Sei σ eine relationale Signatur und sei $\mathfrak{C}$ eine Klasse von σ-Strukturen. Falls es für jedes $m \geqslant 1$ zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}_m$ und $\mathcal{B}_m$ gibt, so dass gilt:

1. $\mathcal{A}_m \in \mathfrak{C}$ *und*
2. $\mathcal{B}_m \notin \mathfrak{C}$ *und*
3. *Duplicator hat eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $\mathcal{A}_m$ und $\mathcal{B}_m$,*

dann ist $\mathfrak{C}$ nicht FO-definierbar.

Lineare Ordnungen gerader Kardinalität

Wir werden nun Korollar 3.54 anwenden, um folgenden Satz zu zeigen.

Satz 3.55

Die Klasse EVEN$_\leqslant$, die aus allen linearen Ordnungen $\mathcal{A} = (A, \leqslant^{\mathcal{A}})$ gerader Kardinalität besteht (d.h., A ist endlich und $|A|$ ist durch 2 teilbar), ist nicht FO-definierbar.

Um diesen Satz zu beweisen, genügt es gemäß Korollar 3.54, für jede Rundenzahl $m \geqslant 1$ eine lineare Ordnung $\mathcal{A}_m$ gerader Kardinalität und eine lineare Ordnung $\mathcal{B}_m$ ungerader Kardinalität anzugeben, für die wir zeigen können, dass Duplicator eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $\mathcal{A}_m$ und $\mathcal{B}_m$ hat.

Als Vorbereitung dazu betrachten wir zunächst ein Beispiel.

Beispiel 3.56

Betrachte die linearen Ordnungen $\mathcal{A} = (A, \leqslant^{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{B} = (B, \leqslant^{\mathcal{B}})$ mit $A = \{1, \ldots, 8\}$ und $B = \{1, \ldots, 9\}$, wobei $\leqslant^{\mathcal{A}}$ und $\leqslant^{\mathcal{B}}$ die natürlichen linearen Ordnungen auf A und B sind.

Seien außerdem $k := 2$ und $\overline{a} := a_1, a_2$ und $\overline{b} := b_1, b_2$ mit $a_1 = b_1 = 1$ und $a_2 = 8$ und $b_2 = 9$ vorgegeben.

Frage: Was ist die größte Zahl m, so dass Duplicator eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ hat?

Die Gewinnstrategie für Duplicator lässt sich zu folgendem Resultat verallgemeinern.

Lemma 3.57

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ endliche lineare Ordnungen, sei $k := 2$, und sei $\overline{a} := a_1, a_2$ und $\overline{b} := b_1, b_2$, wobei a_1, b_1 die kleinsten und a_2, b_2 die größten Elemente in A und B bezüglich $\leqslant^{\mathcal{A}}$ und $\leqslant^{\mathcal{B}}$ sind.

Für jedes $m \geqslant 1$ gilt: Falls $|A|, |B| > 2^m$ oder $|A| = |B|$, so hat Duplicator eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$.

Wir zeigen nun, dass Duplicator so spielen kann, dass für jedes $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ die folgende Invariante $(*)_i$ erfüllt ist:

$(*)_i$: Sind $a_{2+1}, \ldots, a_{2+i}$ und $b_{2+1}, \ldots, b_{2+i}$ die in den Runden $1, \ldots, i$ gewählten Elemente in A und B, so gilt für alle $j, j' \in \{1, \ldots, 2+i\}$:

1. $a_j \leqslant^{\mathcal{A}} a_{j'} \iff b_j \leqslant^{\mathcal{B}} b_{j'}$ und
2. $Dist(a_j, a_{j'}) = Dist(b_j, b_{j'})$ oder $Dist(a_j, a_{j'}), Dist(b_j, b_{j'}) \geqslant 2^{m-i}$.

Der Beweis folgt per Induktion nach i.

Satz 3.55 folgt nun direkt aus Korollar 3.54 und Lemma 3.57.

Beweis von Satz 3.55.

Um nachzuweisen, dass die Klasse $EVEN_{\leqslant}$ nicht FO-definierbar ist, genügt es laut Korollar 3.54, für jede Zahl $m \geqslant 1$ eine endliche lineare Ordnung $\mathcal{A}_m$ gerader Kardinalität und eine endliche lineare Ordnung $\mathcal{B}_m$ ungerader Kardinalität zu finden, so dass Duplicator eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $\mathcal{A}_m$ und $\mathcal{B}_m$ besitzt.

Wir wählen für $\mathcal{A}_m$ die natürliche lineare Ordnung mit Universum $A_m := \{1, \ldots, 2^m+2\}$, und für $\mathcal{B}_m$ die natürliche lineare Ordnung mit Universum $B_m := \{1, \ldots, 2^m+1\}$.

Gemäß Lemma 3.57 hat Duplicator eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}_m, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}_m, \overline{b})$, wobei $\overline{a} = a_1, a_2$ und $\overline{b} = b_1, b_2$ jeweils aus dem kleinsten und dem größten Element der beiden linearen Ordnungen bestehen.

Offensichtlicherweise ist diese Gewinnstrategie auch eine Gewinnstrategie für Duplicator im m-Runden EF-Spiel auf $\mathcal{A}_m$ und $\mathcal{B}_m$. $\square$

Bemerkung 3.58

Der obige Beweis zeigt nicht nur, dass die Klasse $\mathit{EVEN}_{\leqslant}$ nicht FO-definierbar ist, sondern sogar die etwas stärkere Aussage:

> *Es gibt keinen* $\mathrm{FO}[\{\leqslant\}]$*-Satz* ψ*, so dass für jede* **endliche lineare Ordnung** $\mathcal{B}$ *gilt:* $\mathcal{B} \models \psi \iff |B|$ *ist gerade.*

Graph-Zusammenhang und Erreichbarkeit sind nicht FO-definierbar

Wir können die Aussage von Bemerkung 3.58 nutzen, um Folgendes zu zeigen.

Satz 3.59

Sei $\sigma := \{E/2\}$.

(a) *„Graph-Zusammenhang ist nicht* FO*-definierbar."*
D.h.: Es gibt keinen FO$[\sigma]$*-Satz* φ_{Conn}*, so dass für jeden endlichen ungerichteten Graphen* $\mathcal{G} = (V^{\mathcal{G}}, E^{\mathcal{G}})$ *und die zugehörige* σ*-Struktur* $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ *gilt:* $\mathcal{A} \models \varphi_{Conn} \iff \mathcal{G}$ *ist zusammenhängend.*

(b) *„Erreichbarkeit ist nicht* FO*-definierbar."*
D.h.: Es gibt keine FO$[\sigma]$*-Formel* $\varphi_{Reach}(x, y)$*, so dass für alle endlichen gerichteten Graphen* $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ *und alle Knoten* $a, b \in A$ *gilt:*
$\mathcal{A} \models \varphi_{Reach}[a, b] \iff$ *es gibt in* $\mathcal{A}$ *einen Weg von Knoten* a *zu Knoten* b*.*

(b) folgt direkt aus *(a)*, denn:

Angenommen $\varphi_{Reach}(x, y)$ wäre eine FO[σ]-Formel, so dass für alle gerichteten Graphen $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ und alle Knoten $a, b \in A$ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi_{Reach}[a, b] \iff$ es gibt in $\mathcal{A}$ einen Weg von Knoten a zu Knoten b.

Dann ist

$$\varphi_{Conn} \;:=\; \forall x \, \forall y \; \varphi_{Reach}(x, y)$$

ein FO[σ]-Satz, der in einem gerichteten Graphen $\mathcal{A}$ genau dann erfüllt ist, wenn $\mathcal{A}$ stark zusammenhängend ist.

Insbesondere gilt dann für jeden ungerichteten Graphen $\mathcal{G}$ und die zu $\mathcal{G}$ gehörende σ-Struktur $\mathcal{A}$: $\mathcal{A} \models \varphi_{Conn} \iff \mathcal{G}$ ist zusammenhängend.

Dies ist ein Widerspruch zu *(a)*.

Logische Reduktionen

Bemerkung 3.60

Die im Beweis von Satz 3.59 benutzte Vorgehensweise ist unter dem Begriff logische Reduktion (oder Transduktionen) bekannt.

Im Beweis von Teil *(b)* wurde gezeigt: Falls es eine FO[$\{E\}$]-Formel gibt, die ausdrückt, dass Knoten y von Knoten x aus erreichbar ist, dann gibt es auch eine FO[$\{E\}$]-Formel, die Graph-Zusammenhang definiert.

Somit wurde das Problem, einen FO[$\{E\}$]-Satz zu finden, der Graph-Zusammenhang definiert, auf das Problem reduziert, eine FO[$\{E\}$]-Formel zu finden, die ausdrückt, dass Knoten y von Knoten x aus erreichbar ist.

Im Beweis von Teil *(a)* wurde das Problem, einen FO[$\{\leqslant\}$]-Satz zu finden, der ausdrückt, dass eine endliche lineare Ordnung eine gerade Kardinalität besitzt, auf das Problem reduziert, einen FO[$\{E\}$]-Satz zu finden, der Graph-Zusammenhang definiert.

D.h. es wurde gezeigt: Falls Graph-Zusammenhang FO-definierbar ist, so ist auch die Aussage „eine endliche lineare Ordnung besitzt eine gerade Kardinalität“ FO-definierbar.

Dies wurde dadurch erreicht, dass man innerhalb einer linearen Ordnung einen geeigneten Graphen „simuliert“ (bzw. “interpretiert“), indem man die Kantenrelation des Graphen durch eine FO[$\{\leqslant\}$]-Formel beschreibt.

Generell ist diese Methode der logischen Reduktionen oft nützlich, um bereits bekannte Nicht-Definierbarkeits-Resultate auf neue Nicht-Definierbarkeits-Resultate zu übertragen.

▸ Abschnitt Äquivalenz

Abschnitt 3.9:

Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit und die Folgerungsbeziehung

Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit und die Folgerungsbeziehung

Die im Folgenden eingeführten Begriffe der Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit und der Folgerungsbeziehung sind für die Logik erster Stufe ähnlich definiert wie für die Aussagenlogik.

Im Folgenden sei σ stets eine beliebige Signatur.

Erfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit

Definition 3.61

Eine FO[σ]-Formel φ (bzw. eine Formelmenge $\Phi \subseteq \text{FO}[\sigma]$) heißt erfüllbar, wenn es eine σ-Interpretation gibt, die φ (bzw. Φ) erfüllt.

Eine Formel oder Formelmenge, die nicht erfüllbar ist, nennen wir unerfüllbar.

Definition 3.62

Eine FO[σ]-Formel φ heißt allgemeingültig, wenn jede σ-Interpretation die Formel φ erfüllt.

Wir schreiben kurz $\models \varphi$ um auszudrücken, dass φ allgemeingültig ist.

Offensichtlicherweise gilt für alle FO[σ]-Formeln φ:

$$\varphi \text{ ist allgemeingültig} \iff \neg\varphi \text{ ist unerfüllbar.}$$

Verum ($\top$) und Falsum ($\bot$)

Beispiele:

- Die FO[σ]-Formel $\forall v_0 \; v_0{=}v_0$ ist allgemeingültig.
- Die FO[σ]-Formel $\exists v_0 \; \neg \; v_0{=}v_0$ ist unerfüllbar.

Notation 3.63

Wir schreiben $\top$ (in Worten: Verum), um die allgemeingültige FO-Formel $\forall v_0 \; v_0{=}v_0$ zu bezeichnen.

Wir schreiben $\bot$ (in Worten: Falsum), um die unerfüllbare FO-Formel $\exists v_0 \; \neg \; v_0{=}v_0$ zu bezeichnen.

Die Folgerungsbeziehung

Definition 3.64

Eine FO[σ]-Formel ψ folgt aus einer Formelmenge $\Phi \subseteq$ FO[σ] (wir schreiben: $\Phi \models \psi$), wenn für jede σ-Interpretation $\mathcal{I}$ gilt:
Falls $\mathcal{I} \models \Phi$, so gilt auch $\mathcal{I} \models \psi$.

Notation

Für zwei FO[σ]-Formeln φ, ψ schreiben wir kurz $\varphi \models \psi$ an Stelle von $\{\varphi\} \models \psi$ und sagen, dass die Formel ψ aus der Formel φ folgt.

Zusammenhänge

Es bestehen ähnliche Zusammenhänge wie bei der Aussagenlogik:

Lemma 3.65 (Allgemeingültigkeit, Unerfüllbarkeit und Folgerung)

Für jede FO[σ]*-Formel* φ *gilt:*

(a) φ *ist allgemeingültig* $\iff$ $\varphi \equiv \top$ $\iff$ $\top \models \varphi$.

(b) φ *ist unerfüllbar* $\iff$ $\varphi \equiv \bot$ $\iff$ $\varphi \models \bot$.

(c) $\models \varphi \iff \emptyset \models \varphi$.

D.h.: φ *ist allgemeingültig* $\iff$ φ *folgt aus der leeren Menge.*

Lemma 3.66 (Erfüllbarkeit und die Folgerungsbeziehung)

(a) *Für alle Formelmengen* $\Phi \subseteq$ FO[σ] *und alle* FO[σ]*-Formeln* ψ *gilt:*

$$\Phi \models \psi \quad \iff \quad \Phi \cup \{\neg\psi\} \text{ ist unerfüllbar.}$$

(b) *Für alle* FO[σ]*-Formeln* φ, ψ *gilt:* $\varphi \equiv \psi \iff \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$.

Beweis der beiden Lemmas: Analog zu den Beweisen der entsprechenden Resultate in der Aussagenlogik. Details: Übung.

Abschnitt 3.10:

Normalformen

Negationsnormalform

Die Negationsnormalform für Formeln der Logik erster Stufe ist ähnlich definiert wie die Negationsnormalform der Aussagenlogik.

Definition 3.67

Sei σ eine beliebige Signatur. Eine FO[σ]-Formel φ ist in Negationsnormalform (kurz: NNF), wenn Negationszeichen in φ nur unmittelbar vor <u>atomaren</u> Subformeln auftreten und φ den Junktor „$\rightarrow$" nicht enthält.

Satz 3.68

Jede FO[σ]*-Formel* φ *ist äquivalent zu einer Formel in NNF.*

Beweis.

Gemäß Satz 3.47 können wir o.B.d.A. annehmen, dass φ den Junktor „$\rightarrow$" nicht enthält.
Ähnlich wie für die Aussagenlogik definieren wir per Induktion über den Aufbau zu jeder FO[σ]-Formel φ zwei FO[σ]-Formeln φ' und φ'' in NNF, so dass gilt: $\varphi \equiv \varphi'$ und $\neg\varphi \equiv \varphi''$. Details: Übung. $\square$

Pränexe Normalform

Definition 3.69

Sei σ eine beliebige Signatur.

(a) Eine FO[σ]-Formel heißt quantorenfrei, falls in ihr keins der Symbole $\exists, \forall$ vorkommt.
Die Menge aller quantorenfreien FO[σ]-Formeln bezeichnen wir mit QF_σ.

(b) Eine FO[σ]-Formel φ ist in pränexer Normalform (bzw. Pränex-Normalform, kurz: PNF), wenn sie von der Form

$$Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n \; \chi$$

ist, wobei $n \geqslant 0$, $Q_1, \ldots, Q_n \in \{\exists, \forall\}$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{VAR}$ und $\chi \in \mathrm{QF}_\sigma$.
$Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n$ wird Quantoren-Präfix von φ genannt;
χ heißt Kern (bzw. Matrix) von φ.

Satz 3.70

Jede FO[σ]-*Formel* φ *ist äquivalent zu einer* FO[σ]-*Formel* φ' *in pränexer Normalform mit* $\mathrm{frei}(\varphi') = \mathrm{frei}(\varphi)$.

Bevor wir Satz 3.70 beweisen, betrachten wir zunächst ein Beispiel.

Beispiel 3.71

Sei

$$\varphi(y) \;:=\; \forall x\, \neg\big(\exists y\, E(x,y) \;\to\; \exists x\, E(x,y)\big).$$

Umformung in eine äquivalente Formel in Pränex-Normalform:

Beweis von Satz 3.70:

Wir zeigen zunächst drei Lemmas und schließen danach den Beweis ab.

Lemma 3.72

Sei $\psi := Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n\, \chi$, *wobei* $n \geqslant 0$, $Q_1, \ldots, Q_n \in \{\exists, \forall\}$ *und* $\chi \in \mathsf{FO}[\sigma]$. *Für jedes* $Q \in \{\exists, \forall\}$ *sei*

$$\widetilde{Q} := \begin{cases} \forall & \textit{falls } Q = \exists\,, \\ \exists & \textit{falls } Q = \forall\,. \end{cases}$$

Dann gilt: $\neg\,\psi \quad \equiv \quad \widetilde{Q}_1 x_1 \cdots \widetilde{Q}_n x_n\, \neg\chi$.

Beweis.

Einfaches Nachrechnen per Induktion nach n unter Verwendung der Tatsache, dass $\neg\,\exists x\,\varphi \;\equiv\; \forall x\,\neg\varphi$ und $\neg\,\forall x\,\varphi \;\equiv\; \exists x\,\neg\varphi$ (Lemma 3.45).
Details: Übung. □

Lemma 3.73

Für alle FO[σ]*-Formeln* φ *und* ψ *und für alle Variablen* $x \in \text{VAR} \setminus \text{frei}(\varphi)$ *gilt:*

$$\big(\varphi \ \wedge \ \exists x\, \psi\big) \ \equiv \ \exists x\, \big(\varphi \wedge \psi\big) \quad , \quad \big(\varphi \ \wedge \ \forall x\, \psi\big) \ \equiv \ \forall x\, \big(\varphi \wedge \psi\big) \, ,$$

$$\big(\varphi \ \vee \ \exists x\, \psi\big) \ \equiv \ \exists x\, \big(\varphi \vee \psi\big) \quad , \quad \big(\varphi \ \vee \ \forall x\, \psi\big) \ \equiv \ \forall x\, \big(\varphi \vee \psi\big) \, .$$

Beweis. Die Beweise aller vier Äquivalenzen sind ähnlich. Wir beweisen hier nur die erste:

$$\big(\varphi \ \wedge \ \exists x\, \psi\big) \ \equiv \ \exists x\, \big(\varphi \wedge \psi\big) \, . \tag{3}$$

Lemma 3.74

Seien

$$\psi_1 := Q_1 x_1 \cdots Q_\ell x_\ell \ \chi_1 \qquad \textit{und} \qquad \psi_2 := Q'_1 y_1 \cdots Q'_m y_m \ \chi_2 \ ,$$

wobei $\ell, m \geqslant 0$, $Q_1, \ldots, Q_\ell,\ Q'_1, \ldots, Q'_m \in \{\exists, \forall\}$,
$x_1, \ldots, x_\ell,\ y_1, \ldots, y_m \in \mathrm{VAR}$, $\chi_1, \chi_2 \in \mathrm{FO}[\sigma]$.

Es gelte: $\{x_1, \ldots, x_\ell\} \cap \mathrm{frei}(\psi_2) = \emptyset$ *und* $\{y_1, \ldots, y_m\} \cap \mathrm{frei}(\chi_1) = \emptyset$.

Dann gilt für $* \in \{\wedge, \vee\}$, *dass*

$$(\psi_1 * \psi_2) \quad \equiv \quad Q_1 x_1 \cdots Q_\ell x_\ell \ Q'_1 y_1 \cdots Q'_m y_m \ (\chi_1 * \chi_2).$$

Beweis.

Zwei Induktionen über ℓ bzw. m unter Verwendung von Lemma 3.73.
Details: Übung. □

Abschluss des Beweises von Satz 3.70:

Sei φ eine FO[σ]-Formel.

Gemäß Satz 3.47 können wir o.B.d.A. annehmen, dass φ den Junktor „$\rightarrow$“ nicht enthält.

Per Induktion über den Aufbau von φ zeigen wir, dass es eine zu φ äquivalente Formel φ' in PNF gibt mit $\text{frei}(\varphi') = \text{frei}(\varphi)$.

Induktionsanfang: Atomare Formeln sind quantorenfrei und daher insbesondere in PNF.

Induktionsschritt: