Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Dr. Christoph Berkholz

4. Dezember 2018

Logik in der Informatik

Wintersemester 2018/2019

Übungsblatt 7

Abgabe: *bis 11. Dezember 2018, 11.15 Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 3.401 und 3.402 im Johann von Neumann-Haus (Rudower Chaussee 25))*

Aufgabe 1: (20 Punkte)

Achtung: Diese Aufgabe ist bis zum Abgabetermin durch die Beantwortung eines Quiz in Moodle **von jeder Teilnehmerin/jedem Teilnehmer einzeln** abzugeben.

(a) Sei $\sigma := \{f, R, S, c\}$ eine Signatur mit einem 1-stelligen Funktionssymbol f, einem 2-stelligen Relationssymbol R, einem 3-stelligen Relationssymbol S und einem Konstantensymbol c.

Überprüfen Sie für jedes der folgenden Worte, ob es sich jeweils um einen σ-Term, um eine atomare σ-Formel und/oder um eine $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formel gemäß der Definitionen 3.11 und 3.15 aus dem Skript handelt.

(i) $(A_1 \wedge A_2)$

(ii) $(v_1 \wedge v_2)$

(iii) $f(f(v_2))$

(iv) $f^{\mathcal{A}}(f^{\mathcal{A}}(\beta(v_2)))$

(v) $R(f(v_2), v_3)$

(vi) $\forall v_1\ S(f(v_3), v_2, v_4)$

(vii) $\exists v_7 \neg\, f(f(f(v_7)))=f(v_7, v_7)$

(viii) $\exists v_2 \forall v_3 \forall v_2 (f(v_2)=v_1 \;\rightarrow\; \forall v_2(S(f(v_1), v_3, v_5) \;\wedge\; R(v_2, v_3)))$

(b) Sei $\sigma := \{f, c\}$ eine Signatur mit einem 2-stelligen Funktionssymbol f und einem Konstantensymbol c. Wir betrachten die σ-Struktur $\mathcal{A} := (A, f^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$, wobei $A := \{\text{Stein}, \text{Schere}, \text{Papier}, \text{Echse}, \text{Spock}\}$ und $c^{\mathcal{A}} :=$ Spock. Der Wert $f^{\mathcal{A}}(x, y)$ für $x, y \in A$ findet sich in Zeile x und Spalte y der Tabelle.

$f^{\mathcal{A}}$	Stein	Schere	Papier	Echse	Spock
Stein	Stein	Stein	Papier	Stein	Spock
Schere	Stein	Schere	Schere	Schere	Spock
Papier	Papier	Schere	Papier	Echse	Papier
Echse	Stein	Schere	Echse	Echse	Echse
Spock	Spock	Spock	Papier	Echse	Spock

Sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ die σ-Interpretation mit der Belegung $\beta\colon \mathsf{VAR} \to A$, für die gilt:

$$\beta(v_0) = \text{Stein},\ \beta(v_1) = \text{Spock},\ \beta(v_2) = \text{Schere},\ \text{ und } \beta(v_i) = \text{Papier} \ \text{ für alle } i \geq 3.$$

Berechnen Sie für jedes $i \in [4]$ den Wert $[\![t_i]\!]^{\mathcal{I}}$ für die folgenden σ-Terme:

(i) $t_1 := f(c, v_1)$

(ii) $t_2 := f(v_1, f(v_0, v_2))$

(iii) $t_3 := f(f(c, v_0), f(v_2, v_1))$

(iv) $t_4 := f(c, f(f(v_6, v_7), f(v_2, c)))$

Aufgabe 2: **(28 Punkte)**

Sei $\sigma := \{B, F, L, \mathit{Nachfolger}, \mathit{letzter}\}$ eine Signatur, wobei B, F, L 1-stellige Relationssymbole, *Nachfolger* ein 1-stelliges Funktionssymbol und *letzter* ein Konstantensymbol ist. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur mit $A = \{1, 2, \dots, 34\}$ und $\mathit{letzter}^{\mathcal{A}} = 34$, so dass für alle $a \in A$ gilt:

- $a \in B^{\mathcal{A}} \iff$ ALBA **B**ERLIN gewinnt am Spieltag a,
- $a \in F^{\mathcal{A}} \iff$ die Fraport Skyliners **F**rankfurt gewinnen am Spieltag a,
- $a \in L^{\mathcal{A}} \iff$ die MHP Riesen **L**udwigsburg gewinnen am Spieltag a, und
- $\mathit{Nachfolger}^{\mathcal{A}}(a) := \begin{cases} a+1, & \text{falls } a \in \{1, 2, \dots, 33\} \\ a, & \text{falls } a = 34. \end{cases}$

(a) Geben Sie $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln an, die in $\mathcal{A}$ Folgendes aussagen:

(i) Die Fraport Skyliners Frankfurt gewinnen an mindestens einem Spieltag.

(ii) An jedem Spieltag gewinnt genau eine der drei Mannschaften.

(iii) Gewinnt ALBA BERLIN an einem Spieltag, dann gewinnt ALBA BERLIN auch an jedem folgenden Spieltag.

(b) Beschreiben Sie umgangssprachlich, was jede der folgenden $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln in $\mathcal{A}$ aussagt:

(i) $\forall x \Big(\neg \big(B(x) \lor x = \mathit{letzter} \big) \to B(\mathit{Nachfolger}(x)) \Big)$

(ii) $\Big(F(\mathit{letzter}) \lor \forall x \big(\neg \exists y\, x = \mathit{Nachfolger}(y) \to F(x) \big) \Big)$

(iii)
$$\forall x \Bigg(\neg L(x) \land \Big(\neg \exists y\, x = \mathit{Nachfolger}(y) \to \big(B(x) \land \neg F(x) \big) \Big) \land \Big(\neg x = \mathit{letzter} \to \Big(\big(B(x) \leftrightarrow F(\mathit{Nachfolger}(x))\big) \land \big(F(x) \leftrightarrow B(\mathit{Nachfolger}(x))\big) \Big) \Big) \Bigg)$$

Aufgabe 3: **(27 Punkte)**

(a) Sei $\sigma := \{E, g\}$ eine Signatur mit dem 2-stelligen Relationssymbol E und dem 1-stelligen Funktionssymbol g. Geben Sie für jeden der folgenden $\mathsf{FO}[\sigma]$-Sätze je eine σ-Struktur an, die den Satz erfüllt und eine, die den Satz nicht erfüllt. Die Universen der Strukturen, die Sie angeben, sollen jeweils maximal 3 Elemente besitzen.

(i) $\forall x\, \neg g(x){=}x \;\wedge\; \forall x \forall y \Big(E(x,y) \;\leftrightarrow\; g(x){=}y \Big)$

(ii) $\forall x \forall y \Big(\big(\neg g(y){=}g(x) \;\leftrightarrow\; E(x,y) \big) \;\vee\; \big(E(x,y) \;\leftrightarrow\; \neg E(y,x) \big) \Big)$

(b) Sei $\Sigma := \{a, b, c\}$ und sei $\sigma := \sigma_\Sigma = \{\leqslant, P_a, P_b, P_c\}$ die in der Vorlesung definierte Signatur zur Repräsentation von Worten über Σ.
Definition: Ein $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz φ *beschreibt* eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, falls für jedes nicht-leere Wort $w \in \Sigma^*$ gilt: $w \in L \iff \mathcal{A}_w \models \varphi$.

(i) Welche Sprache beschreibt der folgende $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz ψ?

$$\psi \;:=\; \forall x \Bigg(P_c(x) \;\rightarrow\; \exists y \Bigg(P_a(y) \wedge y \leqslant x \wedge \forall z \Big((y \leqslant z \wedge z \leqslant x) \rightarrow (z = x \vee z = y) \Big) \Bigg) \Bigg)$$

Sie können die Sprache durch einen regulären Ausdruck, durch eine Mengenbeschreibung oder auch umgangsprachlich angeben.

(ii) Geben Sie einen $\mathsf{FO}[\sigma]$-Satz an, der die durch den regulären Ausdruck $(b\,c\,a^*)^*$ definierte Sprache beschreibt.

(c) Sei $\sigma := \{+, \cdot, \leqslant, \underline{0}, \underline{1}\}$. Geben Sie $\mathsf{FO}[\sigma]$-Formeln an, die im Standardmodell $\mathcal{A}_\mathbb{N}$ der Arithmetik folgende intuitive Bedeutung haben:

(i) Jede Primzahl ist die Summe zweier Quadratzahlen.

(ii) Es gibt unendlich viele Sophie Germain Primzahlen, d.h. Primzahlen p, so dass $2p + 1$ auch prim ist.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Lesen Sie Kapitel 9 aus dem Buch „Learn Prolog Now!“.
Die Kapitel 7 und 8 werden erst am Ende des Semesters bearbeitet.

Achtung: *Die Bearbeitung dieser Aufgabe ist unter Beachtung der bekannten Abgabehinweise über Moodle abzugeben!*

(a) Auf der Website zur Prolog-Übung finden Sie die Datei `al.pl`. Speichern Sie die Datei in einem Verzeichnis Ihrer Wahl.

Machen Sie sich mit den in dieser Datei definierten Operatoren und Prädikaten vertraut. Beachten Sie insbesondere die durch das Prädikat `al/1` definierte Repräsentation aussagenlogischer Formeln.

Erstellen Sie im selben Verzeichnis eine neue Datei `blatt7.pl`, die mit der Zeile

```
:- ensure_loaded([al]).
```

beginnt.

Anmerkung: Diese Zeile lädt die Operatoren und Prädikate aus `al.pl`, so dass sie von Ihnen in den folgenden Teilaufgaben benutzt werden können.

(b) Schreiben Sie (in der Datei `blatt7.pl`) ein Prädikat `as_in_al/2`, so dass das Ziel `as_in_al(F, X)` genau dann erfüllt ist, wenn `F` eine aussagenlogische Formel repräsentiert und `X` ein Aussagensymbol, das in `F` vorkommt.

Beispielsweise sollte die Anfrage

```
?- as_in_al(~(c => (a /\ ~ b)), X).
```

zu den Antworten `X = c; X = a; X = b; false.` führen.

(c) Gehen Sie vor wie im Beweis von Satz 2.38 des Vorlesungsskripts, um (in der Datei `blatt7.pl`) ein Prädikat `al2nnf/3` zu schreiben, so dass die Anfrage

```
?- al2nnf(F, P, N).
```

genau dann erfüllt ist, wenn gilt:

- `F` repräsentiert eine aussagenlogische Formel φ,
- `P` repräsentiert die im Beweis konstruierte, zu φ äquivalente, aussagenlogische Formel in Negationsnormalform und
- `N` repräsentiert die im Beweis konstruierte, zu $\neg\varphi$ äquivalente, aussagenlogische Formel in Negationsnormalform.

Hinweis: Erweitern Sie dazu den Beweis von Satz 2.38 um den Fall aussagenlogischer Formeln der Form $(\psi_1 \to \psi_2)$.

Beispielsweise sollte die Anfrage

```
?- al2nnf(~(c => (a /\ ~ b)), P, N).
```

zu der Antwort

```
P = c/\ (~a\/b), N = ~c\/ (a/\ ~b)
```

führen.

Hinweise: Es macht nichts, wenn Prolog die gesuchten aussagenlogischen Formeln über das Backtracking mehrfach ausgibt. Beachten Sie zudem, dass die unschöne Formatierung der Leerzeichen in der Ausgabe aussagenlogischer Formeln nicht zu vermeiden ist und insbesondere keinen Fehler Ihres Prädikats darstellt.