Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Dr. Christoph Berkholz

20. November 2018

Logik in der Informatik

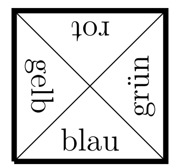
Wintersemester 2018/2019

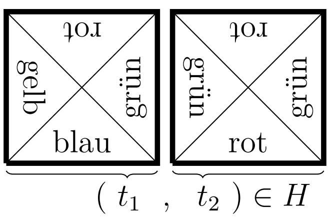
Übungsblatt 5

Abgabe: *bis 27. November 2018, 11.¹⁵ Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 3.401 und 3.402 im Johann von Neumann-Haus (Rudower Chaussee 25))*

Aufgabe 1: (25 Punkte)

Eine Kachel ist ein Einheitsquadrat mit gefärbten Kanten (vgl. Beispielabbildung rechts). Alle Kacheln eines Kacheltyps t besitzen die selbe Färbung ihrer Kanten. Sei K eine endliche Menge von Kacheltypen. Seien H und V zwei Relationen, die für zwei Kacheltypen t_1, t_2 besagen, dass t_1 und t_2 in dieser Reihenfolge horizontal bzw. vertikal zueinander passen, also die sich berührenden Kanten von der selben Farbe sind.





D.h. für $t_1, t_2 \in K$ gilt:

$(t_1, t_2) \in H$ genau dann wenn t_2 rechts neben t_1 passt

und analog

$(t_1, t_2) \in V$ genau dann wenn t_2 über t_1 passt.

Eine K-Kachelung der $n \times n$-Ebene (für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$) ist eine Funktion $k : \{1, \ldots, n\}^2 \to K$, die H und V respektiert, d.h. für alle $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ und alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$(k(i,j), k(i+1,j)) \in H \qquad \text{und} \qquad (k(j,i), k(j,i+1)) \in V.$$

Eine K-Kachelung der (unendlichen) $\mathbb{N}_{\geq 1} \times \mathbb{N}_{\geq 1}$-Ebene ist eine Funktion $k : \mathbb{N}_{\geq 1}^2 \to K$, die H und V respektiert, d.h. für alle $i, j \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gilt:

$$(k(i,j), k(i+1,j)) \in H \qquad \text{und} \qquad (k(j,i), k(j,i+1)) \in V.$$

Benutzen Sie für die Lösung der Aufgabe Aussagensymbole der Form $A_{i,j}^t$ für $t \in K, i, j \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit der Bedeutung, dass Feld (i,j) mit einer Kachel vom Typ t gekachelt wird.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Konstruieren Sie eine endliche Menge Γ_n von aussagenlogischen Formeln, so dass jede Interpretation $\mathcal{I}$, die Γ_n erfüllt, einer K-Kachelung der $n \times n$-Ebene entspricht. Begründen Sie die Wahl Ihrer Formelmenge Γ_n.

(b) Zeigen Sie das folgende Theorem:

> Sei K eine endliche Menge von Kacheltypen. Wenn es für jede $n \times n$-Ebene eine K-Kachelung gibt, dann gibt es auch eine K-Kachelung der (unendlichen) $\mathbb{N}_{\geq 1} \times \mathbb{N}_{\geq 1}$-Ebene.

Hinweis: Nutzen Sie den Endlichkeitssatz der Aussagenlogik.

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

(a) Geben Sie eine Resolutionswiderlegung für die Klauselmenge

$$\Gamma_1 \ := \{ \ \{P, \neg Q\}, \ \{\neg P, \neg S\}, \ \{Q, S\}, \ \{\neg P, \neg Q, S\}, \ \{P, Q, \neg S\} \ \}$$

an, wobei P, Q, S unterschiedliche Aussagensymbole aus AS sind. Gehen Sie dabei analog zu Beispiel 2.59 vor und wählen entweder die graphische Darstellung oder die Resolutionswiderlegung als Auflistung mit rechtsseitigen Begründungen.

(b) Beweisen Sie, dass die folgende Aussage für alle Klauselmengen Γ und alle Klauseln δ gilt:

$$\Gamma \models \delta \quad \iff \quad \text{es gibt ein } \delta' \subseteq \delta \text{ mit } \Gamma \vdash_R \delta'. \tag{1}$$

Hinweise: Der Beweis hat zwei Richtungen und Sie können folgendermaßen vorgehen: Für die "$\Longleftarrow$"–Richtung beweisen Sie zunächst per Induktion über die Länge von Resolutionsableitungen, dass für alle Klauselmengen Γ und alle Klauseln δ' gilt: $\Gamma \vdash_R \delta' \implies \Gamma \models \delta'$. Für die "$\Longrightarrow$"–Richtung zeigen Sie zunächst, dass für alle Klauselmengen Γ und alle Klauseln $\delta = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ gilt:

$$\Gamma \models \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\} \quad \iff \quad \Gamma \cup \Big\{ \{\overline{\lambda_1}\}, \ldots, \{\overline{\lambda_k}\} \Big\} \text{ ist unerfüllbar.}$$

(c) Beweisen Sie, dass die folgende verschärfte Aussage von (1) *nicht* stimmt:

$$\text{Für alle Klauselmengen } \Gamma \text{ und alle Klauseln } \delta \text{ gilt:} \quad \Gamma \models \delta \iff \Gamma \vdash_R \delta. \tag{2}$$

Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Seien Q, R, S, T, U, W unterschiedliche Aussagensymbole aus AS. Wenden Sie den DPLL-Algorithmus auf die folgende Klauselmenge Γ an. Erklären Sie dabei Schritt für Schritt, wie der Algorithmus vorgeht.

$$\begin{aligned} \Gamma \ := \Big\{ \ & \{\neg R, T, W\}, \ \{\neg R, \neg S, \neg W\}, \ \{\neg R, \neg T\}, \ \{\neg Q, S, T\}, \ \{\neg Q, R, \neg S\}, \\ & \{R, S, W\}, \ \{R, \neg T, \neg W\}, \ \{Q, U\}, \ \{S, \neg U, \neg W\}, \ \{Q, W\}, \ \{Q, \neg S, \neg U\} \ \Big\} \end{aligned}$$

Hinweis: Um Ihnen selbst und unseren Korrektoren die Arbeit zu erleichtern, wählen Sie bitte in Zeile 4 des DPLL-Algorithmus nicht-negierte Literale, und zwar in alphabetischer Reihenfolge. Ebenso wählen Sie bitte bei der Anwendung der Vereinfachungsheuristiken die Literale in alphabetischer Reihenfolge.

Geben Sie wie in Beispiel 2.64 entsprechend die entstehende Klauselmenge und die benutzte Vereinfachungsheuristik an.

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Lesen Sie Kapitel 5 aus dem Buch “Learn Prolog Now!”.

Achtung: *Die Bearbeitung dieser Aufgabe ist unter Beachtung der bekannten Abgabehinweise über Moodle abzugeben!*

(a) Wir kodieren aussagenlogische Literale wie folgt durch Prolog-Terme: Ist $i \in \mathbb{N}$, dann repräsentiert `pos(`i`)` das Literal A_i und `neg(`i`)` das Literal $\neg A_i$. Weiterhin kodieren wir Mengen von Literalen als Prolog-Listen. Beispielsweise repräsentieren wir $\{A_1, \neg A_2, \neg A_3\}$ durch `[pos(1), neg(2), neg(3)]`.

Schreiben Sie ein Prädikat `resolvente/3`, so dass Folgendes gilt: Unter der Annahme, dass `L1`, `L2` und `R` Mengen von Literalen repräsentieren, ist `resolvente(L1, L2, R)` erfüllt wenn `R` eine Resolvente von `L1` und `L2` ist. Beispielsweise sollte die Anfrage

`?- resolvente([pos(1), neg(3), pos(4)], [pos(2), pos(3), neg(4)], R).`

zu folgenden Ausgaben führen:

`R = [pos(1),pos(4),pos(2),neg(4)]` und `R = [pos(1),neg(3),pos(2),pos(3)]`

Hinweise: Nutzen Sie gegebenenfalls das Prädikat `nimm/3` aus Blatt 4 Teilaufgabe 4(c); haben Sie diese Aufgabe nicht gelöst, so können Sie die Online-Hilfe von SWI-Prolog nutzen, um sich mit dem vordefinierten Prädikat `select/3` vertraut zu machen. Nutzen Sie außerdem das vordefinierte Prädikat `union/3`.

(b) Im dargestellten Zahlenrätsel repräsentieren die Buchstaben `Z`, `W`, `E`, `I`, `V`, `R`, `S`, `C`, `H` die einzelnen Stellen von Dezimalzahlen. Ordnen wir beispielsweise den Buchstaben `V`, `I`, `E`, `R` die Ziffern 8, 7, 1, 4 zu, so entpricht `VIER` der Dezimalzahl 8714.

$$\begin{array}{cccccc} & & \mathtt{Z} & \mathtt{W} & \mathtt{E} & \mathtt{I} \\ + & & \mathtt{V} & \mathtt{I} & \mathtt{E} & \mathtt{R} \\ \hline = & \mathtt{S} & \mathtt{E} & \mathtt{C} & \mathtt{H} & \mathtt{S} \end{array}$$

Eine Zuordnung der Ziffern aus $\{0, \dots, 9\}$ zu den Buchstaben `Z`, `W`, `E`, `I`, `V`, `R`, `S`, `C`, `H` ist eine Lösung für das Rätsel, wenn

- die Gleichung `ZWEI` + `VIER` = `SECHS` erfüllt ist.
- es keine zwei Buchstaben aus {`Z`, `W`, `E`, `I`, `V`, `R`, `S`, `C`, `H`} gibt, denen die gleiche Ziffer zugeordnet ist
- die Zahlen aus der Gleichung keine führenden Nullen besitzen (d.h.: weder `Z` noch `V` noch `S` darf die Ziffer 0 zugeordnet werden).

Schreiben Sie ein Prädikat `raetsel/9`, so dass

`raetsel(Z, W, E, I, V, R, S, C, H)`

alle Lösungen für das Rätsel ausgibt.

Hinweise: Definieren Sie für jedes $n \in \{0, \dots, 9\}$ einen Fakt `ziffer(n)`. Entnehmen Sie gegebenfalls zusätzlich von Ihnen benötigte mathematische Operatoren der Online-Hilfe von SWI-Prolog.

Achtung: Falls die Berechnungen aller Lösungen auf `gruenau6` mehr als 10 Sekunden benötigt, werden Sie mit Ihrer Abgabe nicht die volle Punktzahl erreichen.