Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Dr. Christoph Berkholz

13. November 2018

Logik in der Informatik

Wintersemester 2018/2019

Übungsblatt 4

Abgabe: *bis 20. November 2018, 11.^{15} Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 3.401 und 3.402 im Johann von Neumann-Haus (Rudower Chaussee 25))*

Aufgabe 1: **(30 Punkte)**

Das *Winter Sneeze* Festival (Aufgabe 1 von Blatt 2) hat inzwischen intergalaktische Berühmtheit erlangt. Somit sollen zum nächsten Termin alle ***M**etler*, ***H**ippies*, ***R**ocker* und ***G**oths* des Universums eingeladen werden. Hierfür ist extra ein unendlich großer Zeltplatz mit Parzellen $\langle i, j\rangle$ für alle $i, j \in \mathbb{Z}$ angemietet worden. Entsprechend existieren nun auch unendlich viele Aussagensymbole $M_{i,j}, H_{i,j}, R_{i,j}, G_{i,j}, T_{i,j}$.

(a) Stellen Sie unendliche Formelmengen Φ_1, Φ_2 und Φ_3 auf, die die in Aufgabe 1**(a)**, **(b)**, **(c)** von Blatt 2 beschriebenen Bedingungen repräsentieren, allerdings für den neuen Zeltplatz. Wenn Sie die Formelmengen Φ_1 und Φ_3 auf Grundlage Ihrer erstellten Formeln φ_1 und φ_3 aus Aufgabe Aufgabe 1 von Blatt 2 bilden, dann geben Sie φ_1 und φ_3 bitte erneut an. Sollten Sie wissen oder befürchten, dass Ihre Formeln φ_1 und φ_3 fehlerhaft sind, dann verwenden Sie die Formeln φ_1 und φ_3, die wir im Anhang auf der letzten Seite dieses Blattes zur Verfügung stellen.

(b) Warum kann die Bedingung aus Aufgabe 1**(d)** von Blatt 2 nicht durch eine unendliche Formelmenge über den gegebenen Aussagensymbolen repräsentiert werden?

(c) Da das Festival vom *intergalaktischen Verständigungsrat* unterstützt wird, und um eine leichte Erreichbarkeit der Trixie-Klos zu gewährleisten, soll auf jedem drei mal drei Parzellen großen Teilstück des Zeltplatzes jede Zuschauergruppierung vertreten sein und sich auch mindestens ein Trixie-Klo befinden. Stellen Sie eine unendliche Formelmenge Φ_4 auf, die diese Bedingung repräsentiert.

(d) Im Vorverkauf wurden bereits einige Plätze an *Metler*, *Hippies*, *Rocker* und *Goths* verteilt und bereits eine Verteilung der *Trixie*-Klos vorgenommen. Sei $\Phi := \Phi_1 \cup \Phi_2 \cup \Phi_3 \cup \Phi_4$ und sei Ψ die Formelmenge

$$\begin{aligned}\Psi := &\Big\{M_{i,j} : \text{Metler haben Parzelle } \langle i,j\rangle \text{ gebucht}\Big\}\\ &\cup \Big\{H_{i,j} : \text{Hippies haben Parzelle } \langle i,j\rangle \text{ gebucht}\Big\}\\ &\cup \Big\{R_{i,j} : \text{Rocker haben Parzelle } \langle i,j\rangle \text{ gebucht}\Big\}\\ &\cup \Big\{G_{i,j} : \text{Goths haben Parzelle } \langle i,j\rangle \text{ gebucht}\Big\}\\ &\cup \Big\{T_{i,j} : \text{Auf Parzelle } \langle i,j\rangle \text{ ist ein Trixie-Klo geplant}\Big\}\end{aligned}$$

Nun stellt sich für die Veranstalter die Frage, ob es einen Belegungsplan gibt, der die zusätzlichen Bedingungen aus dem Vorverkauf berücksichtigt, d.h. ob $\Phi \cup \Psi$ erfüllbar ist.

Zeigen Sie: Es gibt genau dann einen korrekten Belegungsplan für den gesamten Zeltplatz, wenn es für jedes endliche quadratische Teilstück einen solchen Belegungsplan gibt.

Aufgabe 2: (20 Punkte)

Wandeln Sie analog zu Beispiel 2.54 aus dem Vorlesungsskript die Formel

$$\varphi \;:=\; \Big(((P \vee \neg Q) \wedge S) \to \neg(Q \vee \neg S) \Big)$$

mit dem Tseitin-Verfahren in eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel φ_K in 3-KNF um.

Achtung:
Halten Sie sich strikt an die Art der Notation und Zeilenaufteilung von Beispiel 2.54. Dies beinhaltet folgende Eigenschaften:

- Die Subformeln ψ (beginnend mit ψ_1) werden aufsteigend in der Reihenfolge ihres Vorkommens als Teilwort von φ nummeriert. Hierbei werden die Subformeln in φ wie in Beispiel 2.54 markiert.
- Negierte Aussagensymbole bilden keine eigene Subformel. Im Gegensatz dazu bilden aber negierte Formeln, die aus mehr als nur einem Aussagensymbol bestehen, eine eigene Subformel.
- Die neuen Aussagensymbole sind entsprechend aus der Menge $\{X_\varphi, X_{\psi_1}, X_{\psi_2}, \ldots\}$ zu wählen. Für jede Subformel wird in φ' eine neue Zeile begonnen und rechtsseitig die passende Begründung angegeben.
- In φ_K entspricht die Zeilenaufteilung der Zeilenaufteilung von φ'.

Lösungen, die sich nicht an obige Formregeln halten, werden nicht korrigiert. Bei fehlerhaften Zeilen in φ' können eventuell die entsprechenden Zeilen in φ_K nicht korrigiert werden.

Aufgabe 3: (25 Punkte)

(a) Stellen Sie für die Klauselmenge

$$\Gamma_1 \;:=\; \{\ \{Q, S\},\ \{\neg Q, \neg S\},\ \{S, \neg R\},\ \{\neg S, R\},\ \{\neg Q, \neg R\}\ \}$$

eine aussagenlogische Formel φ_1 in KNF auf, so dass für jede Interpretation $\mathcal{I}$ gilt:

$$\mathcal{I} \models \varphi_1 \quad\Longleftrightarrow\quad \mathcal{I} \models \Gamma_1\ .$$

(b) Sei Γ_1 die Klauselmenge aus Aufgabenteil **(a)** und sei

$$\Gamma_2 \;:=\{\ \{P, \neg Q, R\},\ \{P, \neg Q, \neg R\},\ \{\neg P, \neg Q\},\ \{Q, S\},\ \{Q, \neg S\}\ \}\ ,$$
$$\Gamma_3 \;:=\{\ \{P, Q, R, \neg S\},\ \{\neg P, \neg S\},\ \{Q, \neg R\},\ \{\neg Q, R, S\},\ \{\neg Q, \neg S\},\ \{S\}\ \}\ ,$$

wobei P, Q, R, S unterschiedliche Aussagensymbole aus AS sind. Geben Sie für jede der drei Klauselmengen jeweils ein Modell oder eine Resolutionswiderlegung an. Bei einer Resolutionswiderlegung gehen Sie analog zu Beispiel 2.59 vor und wählen entweder die graphische Darstellung oder die Resolutionswiderlegung als Auflistung mit rechtsseitigen Begründungen.

— auf der nächsten Seite geht's weiter —

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Lesen Sie Kapitel 4 aus dem Buch "Learn Prolog Now!".

Achtung: *Die Bearbeitung der Teilaufgabe (c) ist unter Beachtung der bekannten Abgabehinweise über Moodle abzugeben!*

(a) Wie antwortet Prolog auf die folgenden Anfragen?

(i) `?- [a, X, a] = [Y, b, Y].`

(ii) `?- [Y, c] = [c, Y | []].`

(iii) `?- [_, [] | [a, Y]] = [a, _, Z, b].`

(iv) `?- [a | [b | T]] = [X, H | [c | [d]]].`

(b) Das Prädikat `member/2` wird in Abschnitt 4.2 des Buchs "Learn Prolog Now!" definiert. Zeichnen Sie den Suchbaum für die Anfrage

`?- member(a, [b, X, a]).`

(c) Definieren Sie *rekursiv* ein Prädikat `nimm/3`, so dass `nimm(E, X, Y)` genau dann erfolgreich ist, wenn `E` ein Element der Liste `X` ist und `Y` aus der Liste `X` durch Löschung eines Vorkommens von `E` entsteht.

Anhang: Lösungsvorschlag für φ_1 und φ_3 von Aufgabe 1 von Blatt 2

$$\begin{aligned}\varphi_1 \;:=\; \bigwedge_{i,j\in\{1,\ldots,25\}} \Big(& (M_{i,j} \wedge \neg H_{i,j} \wedge \neg R_{i,j} \wedge \neg G_{i,j} \wedge \neg T_{i,j}) \\ & \vee (\neg M_{i,j} \wedge H_{i,j} \wedge \neg R_{i,j} \wedge \neg G_{i,j} \wedge \neg T_{i,j}) \\ & \vee (\neg M_{i,j} \wedge \neg H_{i,j} \wedge R_{i,j} \wedge \neg G_{i,j} \wedge \neg T_{i,j}) \\ & \vee (\neg M_{i,j} \wedge \neg H_{i,j} \wedge \neg R_{i,j} \wedge G_{i,j} \wedge \neg T_{i,j}) \\ & \vee (\neg M_{i,j} \wedge \neg H_{i,j} \wedge \neg R_{i,j} \wedge \neg G_{i,j} \wedge T_{i,j}) \Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_3 \;:=\; \bigwedge_{i,j\in\{2,\ldots,24\}} H_{i,j} \to \Big(& (H_{i-1,j} \vee H_{i+1,j} \vee H_{i,j-1} \vee H_{i,j+1}) \\ & \wedge \neg(M_{i-1,j} \vee M_{i+1,j} \vee M_{i,j-1} \vee M_{i,j+1}) \Big)\end{aligned}$$