Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Dr. Christoph Berkholz

30. Oktober 2018

Logik in der Informatik

Wintersemester 2018/2019

Übungsblatt 2

Abgabe: *bis 6. November 2018, 11.15 Uhr (vor der Vorlesung oder im Briefkasten zwischen den Räumen 3.401 und 3.402 im Johann von Neumann-Haus (Rudower Chaussee 25))*

Aufgabe 1: (25 Punkte)

Der Veranstalter des *Winter Sneeze* Festivals hat als Übernachtungsmöglichkeit unter anderem einen 25 mal 25 Parzellen großen Zeltplatz zur Verfügung. Alle Parzellen sind quadratisch und gleich groß, wodurch die Parzelle $\langle i, j\rangle$ mit $i, j \in \{1, 2, \ldots, 25\}$ benachbart ist zu den Parzellen $\langle i-1, j\rangle$, $\langle i+1, j\rangle$, $\langle i, j-1\rangle$ und $\langle i, j+1\rangle$. Hierbei haben Parzellen am Rand des Zeltplatzes natürlich weniger als vier Nachbarn.

Es werden als Zuschauergruppierungen ***M****etler*, ***H****ippies*, ***R****ocker* und ***G****oths* erwartet. Außerdem werden einige Parzellen für ***T****rixie-Klos* benötigt. Auf jeder Parzelle kann immer nur exakt eine Zuschauergruppierung übernachten oder ein Klo stehen.

Um einen Belegungsplan für den Zeltplatz zu erstellen benutzt der Veranstalter die Aussagensymbole $M_{i,j}, H_{i,j}, R_{i,j}, G_{i,j}, T_{i,j}$ mit $i, j \in \{1, 2, \ldots, 25\}$. Hierbei beschreibt z. B. $R_{13,9}$ ob Parzelle $\langle 13, 9\rangle$ von Rockern belegt wird. Die anderen Aussagensymbole sind analog definiert.

Nun soll der Zeltplatz maximal ausgelastet werden und es sollen dabei die Wünsche aller Festivalteilnehmer berücksichtigt werden. Hierbei sind Festivalteilnehmer, die auf einer Parzelle am Rand des Zeltplatzes übernachten, immer zufrieden egal wer oder was sich wo sonst auf dem Zeltplatz befindet, da man mit einem Randplatz besonders schnell zur Bühne gelangt.

(a) Stellen Sie eine Formel φ_1 auf, die repräsentiert, dass jede Parzelle des Zeltplatzes belegt ist und keine Doppelbelegung existiert.

(b) Sei

$$\varphi_2 := \bigwedge_{i,j\in\{2,\ldots,24\}} \left((M_{i,j} \vee R_{i,j}) \to (\neg T_{i-1,j} \wedge \neg T_{i+1,j} \wedge \neg T_{i,j-1} \wedge \neg T_{i,j+1})\right) .$$

Welche Bedingung wird durch φ_2 repräsentiert?

(c) Hippies sind, sofern sie keine Parzelle am Rand bekommen, nur zufrieden, wenn mindestens auf einer Nachbarparzelle ebenfalls Hippies übernachten und zusätzlich auf keiner Nachbarparzelle Metler wohnen. Stellen Sie eine Formel φ_3 auf, die repräsentiert, dass alle Hippies zufrieden sind.

(d) Goths wollen sich mindestens einmal pro Nacht in großer Gruppe treffen, weswegen irgendwo auf dem Zeltplatz eine von Goths bewohnte Parzelle existieren muss, die von vier anderen Parzellen, die ebenfalls von Goths bewohnt werden, umgeben ist. Stellen Sie eine Formel φ_4 auf, die repräsentiert, dass mindestens eine solche Parzelle existiert.

Aufgabe 2: (25 Punkte)

(a) Entscheiden Sie für jede der folgenden aussagenlogischen Formeln, ob sie erfüllbar, unerfüllbar und/oder allgemeingültig ist. Geben Sie für jede erfüllbare Formel ein Modell an und für jede nicht allgemeingültige Formel eine Interpretation, die die Formel nicht erfüllt.

- **(i)** $\varphi_1 := (A_1 \vee \mathbf{1}) \vee A_2$
- **(ii)** $\varphi_2 := \big((\neg A_0 \wedge A_1) \rightarrow (\neg A_0 \vee A_1)\big)$
- **(iii)** $\varphi_3 := \big((\mathbf{0} \rightarrow (\neg A_0 \vee \neg A_1)) \leftrightarrow \mathbf{0}\big)$
- **(iv)** $\psi_n := \bigwedge_{i=1}^{n} (A_i \leftrightarrow A_{2i})$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$

(b) Seien φ_1, φ_2 und φ_3 wie in Aufgabenteil **(a)** definiert und sei $\Phi := \{\varphi_1, \varphi_2\}$.
Gilt nun, dass $\Phi \models \varphi_3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ ist *durch 3 teilbar*, falls es eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $n = 3 \cdot m$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ sei die aussagenlogische Formel φ_n definiert durch

$$\varphi_n \;:=\; \begin{cases} (A_n \leftrightarrow \neg A_{n+1}), & \text{falls } n \text{ durch 3 teilbar ist} \\ ((A_n \leftrightarrow A_{n+1}) \leftrightarrow A_{n+2}), & \text{falls } n \text{ nicht durch 3 teilbar ist} \end{cases}$$

und $\Phi := \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}\}$.
Es ist also beispw. $\varphi_1 = ((A_1 \leftrightarrow A_2) \leftrightarrow A_3)$, $\varphi_2 = ((A_2 \leftrightarrow A_3) \leftrightarrow A_4)$, $\varphi_3 = (A_3 \leftrightarrow \neg A_4)$, $\varphi_4 = ((A_4 \leftrightarrow A_5) \leftrightarrow A_6)$, $\varphi_5 = ((A_5 \leftrightarrow A_6) \leftrightarrow A_7)$ und $\varphi_6 = (A_6 \leftrightarrow \neg A_7)$.
Geben Sie eine Interpretation $\mathcal{I}\colon \mathsf{AS} \rightarrow \{0,1\}$ an, so dass gilt: $\mathcal{I} \models \Phi$ und erklären Sie, warum $\mathcal{I} \models \Phi$ gilt.

Aufgabe 3: (25 Punkte)

(a) Finden Sie für die folgenden Formeln heraus, ob $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ bzw. $\varphi_3 \equiv \varphi_4$ gilt.

$$\varphi_1 := (\neg A_0 \vee \neg A_1) \qquad \varphi_3 := \big(A_0 \vee (A_1 \wedge \neg A_2)\big)$$
$$\varphi_2 := \big((A_0 \wedge A_1) \rightarrow \neg(A_0 \vee A_2)\big) \qquad \varphi_4 := \big(\neg(A_0 \rightarrow A_1) \wedge (\neg A_2 \vee A_0)\big)$$

Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(b) Seien $I = \{i_1, \ldots, i_m\}$ und $J = \{j_1, \ldots, j_n\}$ endliche Mengen und sei für jedes $i \in I$ und $j \in J$ eine Formel $\varphi_{i,j}$ gegeben. Gilt dann in jedem Fall, dass die Bedingung

$$\bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J} \varphi_{i,j} \quad \equiv \quad \bigvee_{j \in J} \bigwedge_{i \in I} \varphi_{i,j}$$

erfüllt ist? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

(c) Beweisen Sie, dass für alle $\Phi \subseteq \mathsf{AL}$, $\varphi, \psi \in \mathsf{AL}$ gilt: $\quad \Phi \cup \{\varphi\} \models \psi \iff \Phi \models \varphi \rightarrow \psi$

Aufgabe 4: (25 Punkte)

Lesen Sie Kapitel 2 aus “Learn Prolog Now!”.

(a) Welche der folgenden Paare von Termen lassen sich unifizieren? Wie werden die Variablen dabei belegt?

- **(i)** `donut` und `croissant`
- **(ii)** `tier(X)` und `tier(toto)`
- **(iii)** `Essen` und `'Essen'`
- **(iv)** `lecker` und `'lecker'`
- **(v)** `gut(pizza, Y)` und `gut(X, salami)`
- **(vi)** `f(a, X, Y)` und `f(X, Y, b)`
- **(vii)** `plus(sqr(a), X)` und `plus(sqr(Y), mult(b, Y))`

(b) Betrachten Sie erneut die Wissensbasis aus Aufgabe 4**(b)** von Blatt 1. Zeichnen Sie den Suchbaum für die folgende Anfrage:

```
?- verfolgt(darth_vader, Y).
```