Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

9. Februar 2016

Logik in der Informatik

Wintersemester 2015/2016

Übungsblatt 14

Abgabe: *Es erfolgt keine Abgabe. Die Bearbeitung des Übungsblatts ist freiwillig.*

Aufgabe 1:

Vier Wochen nach Ausbruch des *Zombie-Virus*: Alice sitzt in der Kleinstadt *Hamster City* fest, die inzwischen nicht mehr als besonders ruhig gelten kann. Anfang Februar ist es entschieden zu kalt geworden, um länger auf Bäumen auszuharren, und auch Alices Munitionsvorrat erlaubt nur noch sehr sparsam dosierte Massaker an der durch das entwichene Virus zombifizierten Bevölkerung. Um endlich ein Serum gegen das Virus entwickeln zu können beschließt Alice, den sogenannten *Patient Zero* zu finden, d.h. denjenigen, der als erstes mit dem Zombie-Virus infiziert wurde. Natürlich kann es sich nur um jemanden handeln, der sich zur Zeit des Viren-Ausbruchs im Forschungslabor befand.

Bei der Suche nach Patient Zero „hilft“ Alice der Zombie-Hamster Charly. Charlys unfreiwillige Blutprobe (dies ist für Alice relativ ungefährlich, da Hamster im Gegensatz zu Menschen zwar am Zombie-Virus erkranken können, es jedoch selbst nicht weiter übertragen) ermöglicht es Alice, die Kette der Infektionen vom Forschungslabor, über verschiedene Wirte hinweg, bis zu Charly nachzuvollziehen.

Alice hat ihre Erkenntnisse in einem Logikprogramm $\Pi \in \mathsf{LP}$ formuliert:

```
% Zombies
hamster(bianca).
hamster(charly).
hamster(herby).
mensch(edward).
mensch(john).
mensch(seymour).
% Wer hat wen gebissen?
beisst(bianca, charly).
beisst(edward, herby).
beisst(john, bianca).
beisst(john, seymour).
beisst(herby, charly).
beisst(seymour, charly).
% Wer war im Labor?
im_labor(edward).
im_labor(john).
% Wer hat wen infiziert?
infiziert(X, Y) :-
    mensch(X),
    beisst(X, Y).
infiziert(X, Y) :-
    mensch(X),
    beisst(X, Z),
    infiziert(Z, Y).
% Patient Zero war im Labor
% und hat Charly infiziert
patient0(X) :-
    im_labor(X),
    infiziert(X, charly).
```

Hierbei repräsentiert `beisst(X, Y)` die Aussage, dass `Y` von `X` gebissen wurde, und `infiziert(X, Y)` bedeutet, dass `Y` von `X` (eventuell über andere Wirte) infiziert wurde.

(a) Geben Sie einen Beweisbaum für den Term `patient0(john)` aus Π an.

(b) Geben Sie eine Ableitung des Terms `patient0(john)` aus Π an.

Aufgabe 2:
Gegeben sei das folgende Logikprogramm $\Pi \in \mathsf{LP}$:

```
unat(null).
unat(s(X)) :- unat(X).
plus(null, Y, Y) :- unat(Y).
plus(s(X), Y, s(Z)) :- plus(X, Y, Z).
f(null, s(null)).
f(s(X), Z) :- f(X, Y), plus(Y, Y, Z).
```

(a) Welche der folgenden Terme gehören zu $\mathcal{B}(\Pi)$, welche nicht?

$$t_1 := \texttt{null}, \qquad t_2 := \texttt{unat(s(null))},$$
$$t_3 := \texttt{plus(2, 3, 5)}, \qquad t_4 := \texttt{f(s(s(null)), s(s(s(s(null)))))}$$

(b) Geben Sie die Bedeutung $\mathcal{B}(\Pi)$ des Logikprogramms Π an.

(c) Im Folgenden bezeichnen wir mit $\mathit{fib}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Funktion, die jede Zahl $i \in \mathbb{N}$ auf die i-te Fibonacci-Zahl abbildet. Insbesondere gilt für $i = 0$ und $i = 1$, dass $\mathit{fib}(0) = 0$ und $\mathit{fib}(1) = 1$. Für jedes $i > 1$ ist $\mathit{fib}(i) = \mathit{fib}(i-2) + \mathit{fib}(i-1)$.

Erweitern Sie durch das Hinzufügen von Fakten und Regeln das Logikprogramm Π zu einem Logikprogramm Π' mit der Bedeutung

$$\mathcal{B}(\Pi') \quad = \quad \mathcal{B}(\Pi) \quad \cup \quad \{\, \texttt{fib(s}^i\texttt{(null), s}^j\texttt{(null))} : i, j \in \mathbb{N} \text{ mit } \mathit{fib}(i) = j \,\}.$$

Aufgabe 3:

(a) Betrachten Sie die Substitution

$$S \;:=\; \{\, \texttt{X} \mapsto \texttt{g(Z)},\ \ \texttt{Y} \mapsto \texttt{f(a,b,g(c))},\ \ \texttt{Z} \mapsto \texttt{h(Z,Z)},\ \ \texttt{V} \mapsto \texttt{a} \,\}$$

sowie die Terme

$$t_1 \;:=\; \texttt{f(X, Y, h(Y, a))}\ , \qquad t_2 \;:=\; \texttt{f(g(Y), Y, Z)}\ .$$

(i) Berechnen Sie die Terme t_1S und t_2S.

(ii) Geben Sie eine Substitution S' an, so dass gilt: $t_1S' \;=\; t_2S'$.

(b) Betrachten Sie die folgenden Substitutionen

$$\begin{aligned}
S_1 &:= \{\, \texttt{X} \mapsto \texttt{f(a, X)},\ \texttt{Y} \mapsto \texttt{b},\ \texttt{Z} \mapsto \texttt{g(X, b, Z)} \,\}\\
S_2 &:= \{\, \texttt{X} \mapsto \texttt{f(a, X)},\ \texttt{Y} \mapsto \texttt{g(X, Y, f(Z,Z))},\ \texttt{Z} \mapsto \texttt{c} \,\}\\
T_1 &:= \{\, \texttt{X} \mapsto \texttt{f(a, b)},\ \texttt{Z} \mapsto \texttt{g(b, b, Y)} \,\}\\
T_2 &:= \{\, \texttt{X} \mapsto \texttt{X},\ \texttt{Y} \mapsto \texttt{g(U, V, W)} \,\}
\end{aligned}$$

(i) Berechnen Sie die Verkettung $S := S_1S_2$.

(ii) Betrachten Sie für jedes $i \in \{1, 2\}$ die beiden Substitutionen S_i und T_i. Ist eine Substitution allgemeiner als die andere? Falls dies der Fall ist so begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie eine Substitution S angeben, so dass $S_iS \equiv T_i$ beziehungsweise $T_iS \equiv S_i$.

Aufgabe 4:
Wir erinnern uns: In Aufgabe 1 führte der Zombie-Hamster Charly Alice auf die Fährte des zombifizierten Wissenschaftlers John, der beim Ausbruch des Zombie-Virus als erster mit dem Virus infiziert wurde und deshalb auch als *Patient Zero* bezeichnet wird. Unter Aufbietung einiger Raffinesse (und eines rostigen Rasenmähers) ist es Alice inzwischen gelungen, John einige DNA-Proben zu „entnehmen". Um das Genom des Zombie-Virus anhand dieser Proben zu bestimmen, stehen Alice leider nur die Mittel der Oster-Bastelecke des verwüsteten Einkaufszentrums von Hamster City zur Verfügung.

Alice notiert sich ihre lückenhaften Ergebnisse als Terme $t_i \in \mathsf{T_{LP}}$ mit $i \in \{1, \dots, 4\}$. In diesen repräsentiert Alice die drei im Zombie-Virus vorkommenden Aminosäuren *Methionin*, *Tryptophan* und *Valin* durch Funktoren `m/3`, `t/2` und `v/1`. Das erstaunlicherweise ebenso vorkommende seltene Element *Promethium* repräsentiert sie durch das Atom `p`. Um Lücken in den von ihr gefundenen Genom-Fragmenten zu markieren, die von ihrer Untersuchungsmethodik (oder auch dem Rasenmäher) hinterlassen wurden, setzt Alice Variablen aus der Menge $\mathsf{V_{LP}}$ ein.

$$t_1 := \texttt{m(v(X), v(Y), t(p, X))} \qquad t_2 := \texttt{m(v(Y), X, t(X, p))}$$
$$t_3 := \texttt{m(Z, p, t(Z, Z))} \qquad t_4 := \texttt{m(Z, v(Z), t(X, p))}$$

(a) Alice will ausschließen, dass sich in ihre Genom-Fragmente Messfehler eingeschlichen haben. Dazu will sie jeden der gefundenen Terme nur noch dann weiter untersuchen, wenn er mit mindestens einem anderen der Terme unifizierbar ist. Geben Sie deshalb für jedes $i \in \{2, 3, 4\}$ an, ob t_1 und t_i unifizierbar sind. Wenn ja, so geben Sie zusätzlich einen Unifikator für t_1 und t_i an.

(b) Alice überlegt, ob sie sich die Suche nach Unifikatoren für ihre Genom-Fragmente auch hätte einfacher machen können. Insbesondere fragt sie sich (und Sie!): Ist die Relation

$$U \ := \ \Big\{ (t, s) \ : \ \ t, s \in \mathsf{T_{LP}}, \ t \text{ und } s \text{ sind unifizierbar} \Big\}$$

eine Äquivalenzrelation, d.h. ist U reflexiv, transitiv und symmetrisch? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Betrachten Sie die folgenden Terme und Substitutionen:

$$t_1 := \texttt{m(X, t(p, X), p)} \qquad s_1 := \texttt{m(p, t(p, Y), Y)} \qquad S_1 := \{\, \texttt{X} \mapsto \texttt{v(p)},\, \texttt{Y} \mapsto \texttt{p} \,\}$$
$$t_2 := \texttt{t(t(p, X), Y)} \qquad s_2 := \texttt{t(Y, t(p, X))} \qquad S_2 := \{\, \texttt{X} \mapsto \texttt{p},\, \texttt{Y} \mapsto \texttt{t(p, p)} \,\}$$
$$t_3 := \texttt{m(m(p, X, Y), p, X)} \qquad s_3 := \texttt{m(m(p, Y, X), Y, p)} \qquad S_3 := \{\, \texttt{X} \mapsto \texttt{p},\, \texttt{Y} \mapsto \texttt{p} \,\}$$

Geben Sie für jedes $i \in [3]$ an, ob S_i ein allgemeinster Unifikator von t_i und s_i ist. Ist S_i kein allgemeinster Unifikator von t_i und s_i, so geben Sie einen allgemeinsten Unifikator für t_i und s_i an.