Kapitel 4: 0-1-Gesetze

Ziel dieses Kapitels:

Zeige, dass Eigenschaften, die durch FO-Sätze (oder allgemeiner, durch Sätze der Logik $L^{\omega}_{\infty\omega}$, die in diesem Kapitel eingeführt wird), in fast allen Strukturen erfüllt sind oder in fast allen Strukturen nicht erfüllt sind.

4.1 Asymptotische Wahrscheinlichkeiten und 0-1-Gesetze

Sei σ eine endliche relationale Signatur (dh σ besteht aus endlich vielen Relationssymbolen).

Sei $\mathcal{S}$ eine unter Isomorphie abgeschlossene Klasse von σ-Strukturen.

Für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ sei

$$S_n := \{ \mathfrak{A} \in \mathcal{S} : A = \{0, \ldots, n-1\} \}$$

die Menge aller Strukturen aus $\mathcal{S}$ mit Universum $\{0, \ldots, n-1\}$.

Sei C eine unter Isomorphie abgeschlossene Teilklasse von S. Für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ sei $C_n := \{ \mathfrak{A} \in S_n : \mathfrak{A} \in C \}$ und setze

$$\mu_n(C|S) := \frac{|C_n|}{|S_n|} = \frac{|\{\mathfrak{A} \in C : A = \{0,\dots,n-1\}\}|}{|\{\mathfrak{A} \in S : A = \{0,\dots,n-1\}\}|}$$

D.h. $\mu_n(C|S)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig (gleichverteilt) aus S_n gewählte Struktur die Eigenschaft hat, zur Klasse C zu gehören.

Die <u>asymptotische Wahrscheinlichkeit von C bzgl S</u> ist definiert als

$$\mu(C|S) := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(C|S), & \text{falls der Grenzwert existiert} \\ \text{undefiniert}, & \text{sonst} \end{cases}$$

<u>Beispiel 4.1</u>

<u>(a)</u> Sei $\sigma := \emptyset$, sei ALL die Klasse aller σ-Strukturen und sei EVEN die Klasse aller endlichen σ-Strukturen, deren Universum gerade Kardinalität besitzt.

Dann gilt für jedes $n \geq 1$:

$$\mu_n(\text{EVEN} \mid \text{ALL}) = \frac{|\text{EVEN}_n|}{|\text{ALL}_n|}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

denn: ALL_n besteht aus genau einer Struktur, nämlich der Struktur mit Universum $\{0, \dots, n-1\}$,

und $\text{EVEN}_n = \emptyset$ für ungerades n, und
$\text{EVEN}_n = \text{ALL}_n$ für gerades n.

Somit ist $\mu(\text{EVEN} \mid \text{ALL}) =$ undefiniert.

(b) Sei $\sigma = \{U\}$ die Signatur, die aus einem 1-stelligen Relationssymbol U besteht.

Sei ALL die Klasse aller σ-Strukturen und sei PARITY die Klasse aller σ-Strukturen $\mathfrak{A}$, für die die Relation $U^{\mathfrak{A}}$ <u>gerade</u> Kardinalität besitzt.

Dann ~~besteht~~ ALL_n aus allen σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ mit $A = \{0, \dots, n-1\}$ und $U^{\mathfrak{A}} \subseteq A$.

D.h. $|\text{ALL}_n| = 2^n$

Und $PARITY_n$ besteht aus allen σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ mit $A = \{0, \dots, n-1\}$ und $|U^{\mathfrak{A}}|$ ist gerade.

Dh $|PARITY_n| = |\{w \in \{0,1\}^n : w \text{ hat gerade viele Einsen}\}|$
$= 2^{n-1}$

Somit gilt:

$$\mu_n(PARITY \mid ALL) = \frac{|PARITY_n|}{|ALL_n|} = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$$

und

$$\mu(PARITY \mid ALL) = \frac{1}{2}.$$

(c) Sei $\sigma = \{E\}$ die Signatur, die aus einem 2-stelligen Relationssymbol E besteht.

Sei UG die Klasse aller ungerichteten Graphen (dh aller Objekte $G = (V, E)$, wobei V eine nicht-leere Menge ist und E eine Menge von 2-elementigen Teilmengen von V).

Für alle $n \geq 1$ gilt: $|UG_n| = 2^{\binom{n}{2}}$

(die Anzahl aller ungerichteten Graphen mit Knotenmenge $\{0, \dots, n-1\}$).

Sei $\mathcal{I}$ die Klasse aller ungerichteten Graphen, die mindestens einen isolierten Knoten besitzen.

<u>Behauptung:</u> $\mu(\mathcal{I} \mid UG) = 0$

(dh: für $n \to \infty$ besitzt ein zufällig gewählter ungerichteter Graph mit Knotenmenge $\{0,\dots,n-1\}$ fast sicher <u>keinen</u> isolierten Knoten)

<u>Beweis:</u> Für $n \geq 1$ gilt

$$|\mathcal{I}_n| = |\{G : G \text{ ist ungerichteter Graph mit Knotenmenge } \{0,\dots,n-1\} \text{ und } G \text{ besitzt mind. einen isolierten Knoten}\}|$$

$$\leq n \cdot 2^{\binom{n-1}{2}}$$

(n Möglichkeiten, einen isolierten Knoten zu wählen, und $2^{\binom{n-1}{2}}$ Möglichkeiten, Kanten zwischen den restlichen $n-1$ Knoten zu wählen).

Somit gilt: $\mu_n(\mathcal{I} \mid UG) \leq \dfrac{n \cdot 2^{\binom{n-1}{2}}}{2^{\binom{n}{2}}} = \dfrac{n}{2^{\binom{n}{2}-\binom{n-1}{2}}}$

Es gilt: $\binom{n}{2}-\binom{n-1}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2} - \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} = \dfrac{(n-1)(n-n+2)}{2} = n-1$

Dh: $\mu_n(\mathcal{I} \mid UG) \leq \dfrac{n}{2^{n-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Somit ist $\mu(\mathcal{I} \mid UG) = 0$.

(d) Sei Z die Klasse aller zusammenhängenden ungerichteten Graphen.

Behauptung: $\mu(Z|UG) = 1$

(d.h.: für $n \to \infty$ ist ein zufällig gewählter ungerichteter Graph mit Knotenmenge $\{0,\dots,n-1\}$ fast sicher zusammenhängend)

Beweis:

Sei $\overline{Z} := UG \setminus Z$ die Klasse aller unzusammenhängenden ungerichteten Graphen.

Für $n \geq 1$ gilt offensichtlicherweise:

$$\mu_n(Z|UG) = 1 - \mu_n(\overline{Z}|UG).$$

Es gilt:

$$|\overline{Z}_n| \leq \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} \cdot 2^{\binom{k}{2}} \cdot 2^{\binom{n-k}{2}}$$

Anzahl möglicher Graphen mit Knotenmenge $\overline{M}$

Anzahl möglicher Zerlegungen der Knotenmenge $V=\{0,\dots,n-1\}$ in eine k-elementige Menge M und ihr Komplement $\overline{M} := V \setminus M$.

Anzahl möglicher Graphen mit Knotenmenge M

Und daher:

$$\mu_n(\overline{Z}|UG) \leq \frac{\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} \cdot 2^{\binom{k}{2}+\binom{n-k}{2}}}{2^{\binom{n}{2}}} = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}-\binom{n-k}{2}}}$$

Nebenrechnung: F.a. $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \{0,\dots,n\}$ gilt:

- $$\binom{n-k}{2} = \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} = \frac{n(n-k-1) - k(n-1-k)}{2}$$
$$= \frac{n(n-1) - nk - nk + k(1+k)}{2}$$
$$= \frac{n(n-1)}{2} - nk + \frac{k(k+1)}{2}$$
$$= \binom{n}{2} - nk + \frac{k(k+1)}{2}$$

- $$\binom{n}{2} - \binom{k}{2} - \binom{n-k}{2} = \binom{n}{2} - \frac{k(k-1)}{2} - \binom{n}{2} + nk - \frac{k(k+1)}{2}$$
$$= nk - \frac{k(k-1) + k(k+1)}{2}$$
$$= nk - \frac{k(k-1+k+1)}{2}$$
$$= nk - \frac{k \cdot 2k}{2}$$
$$= nk - k^2$$
$$= k \cdot (n-k) \qquad (*)$$

Somit ist

$$\mu_n(\overline{Z} \mid UG) \leq \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^{k(n-k)}} \leq \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} n^k \cdot \frac{1}{2^{k(n-k)}}$$
$$= \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} 2^{k \cdot \lg n} \cdot \frac{1}{2^{k(n-k)}} = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{2^{k(n-\lg n-k)}}$$

für $k \in \{1,\dots,\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ gilt:

$$k(n-\lg n-k) \geq 1 \cdot (n-\lg n-k) \geq n-\lg n-\frac{n}{2} = \frac{n}{2}-\lg n$$

Für alle hinreichend großen n gilt:

$$\frac{n}{2} - \lg n > \frac{n}{4}$$

Somit gilt für alle hinreichend großen n und f.a. $k \in \{1, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$:

- $k(n - \lg n - k) \geq \frac{n}{4}$, also
- $\frac{1}{2^{k(n-\lg n - k)}} \leq \frac{1}{2^{n/4}}$

Somit gilt f.a. hinreichend großen n:

$$\mu_n(\overline{Z} \mid UG) \leq \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{2^{k(n-\lg n - k)}} \leq \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{2^{n/4}}$$

$$\leq n/2 \cdot \frac{1}{2^{n/4}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

D.h.: $\mu(\overline{Z} \mid UG) = 0$

und somit $\mu(Z \mid UG) = 1$

// Ende Bsp 4.1

Definition 4.2

Sei σ eine endliche relationale Signatur,

sei S eine unter Isomorphie abgeschlossene Klasse von σ-Strukturen und

sei $\mathcal{L}$ eine Logik.

Wir sagen:

<u>$\mathcal{L}$ besitzt das 0-1-Gesetz bzgl S</u>,

falls für jeden $\mathcal{L}[\sigma]$-Satz φ und die zugehörige Klasse $C_\varphi := \mathrm{Mod}_S(\varphi) = \{\mathfrak{A} \in S : \mathfrak{A} \models \varphi\}$

gilt: $\mu(C_\varphi \mid S) = 0$ oder $\mu(C_\varphi \mid S) = 1$.

Im Folgenden schreiben wir oft auch $\mu(\varphi \mid S)$ an Stelle von $\mu(C_\varphi \mid S)$, und $\mu_n(\varphi \mid S)$ an Stelle von $\mu_n(C_\varphi \mid S)$.

<u>Ziel</u>:

Wir wollen zeigen, dass FO — und sogar die ausdrucksstärkere Logik $L^\omega_{\infty\omega}$, die im übernächsten Abschnitt eingeführt wird — das 0-1-Gesetz bzgl der Klasse UG aller ungerichteten Graphen besitzt, und auch bzgl der Klasse $\mathrm{ALL}(\sigma)$ aller σ-Strukturen, für jede endliche relationale Signatur σ.

4.2 Erweiterungsaxiome und 0-1-Gesetze für FO

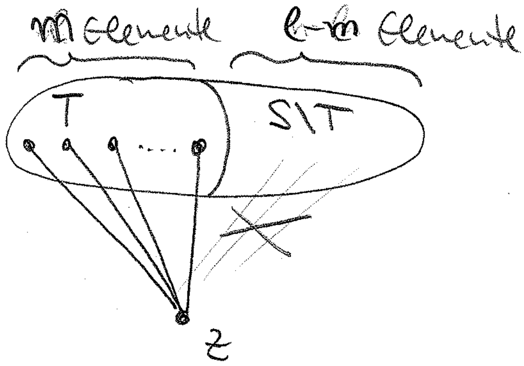
4.2.1 ... für die Klasse UG

Sei $\ell \geq 1$, $m \geq 0$ mit $m \leq \ell$.

Das Erweiterungsaxiom $EA_{\ell,m}$ besagt in einem Graphen:

> Ist S eine ℓ-elementige Menge von Knoten und ist T eine m-elementige Teilmenge von S, so gibt es einen Knoten z, der nicht zu S gehört, und der mit jedem Knoten aus T und mit keinem Knoten aus $S\setminus T$ durch eine Kante verbunden ist.

<u>Skizze</u>:



Das Erweiterungsaxiom $EA_{\ell,m}$ lässt sich durch den folgenden FO[E]-Satz beschreiben:

$$EA_{\ell,m} := \forall x_1 \cdots \forall x_\ell \Big(\bigwedge_{1\leq i<j\leq \ell} \neg x_i = x_j \;\rightarrow\; \exists z \Big(\bigwedge_{i=1}^{\ell} \neg z = x_i \;\wedge\; \bigwedge_{i=1}^{m} E(z,x_i) \;\wedge\; \bigwedge_{j=m+1}^{\ell} \neg E(z,x_j) \Big)\Big)$$

Für $k \geq 1$ setzen wir $EA_k := EA_{2k,k}$.

Beobachtung 4.3 ("$EA_k \Rightarrow EA_{\ell,m}$ f.a. $\ell \geq 1$, $m \geq 0$ mit $m \leq \ell \leq k$")

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| \geq 2k$.
Falls $G \models EA_k$, so gilt
$G \models EA_{\ell,m}$ für alle $\ell \geq 1$, $m \geq 0$ mit $m \leq \ell \leq k$.

Beweis:
Sei $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 2k$ und $G \models EA_k$,
dh $G \models EA_{2k,k}$.
Seien $\ell \geq 1$, $m \geq 0$ mit $m \leq \ell \leq k$.
Sei $S \subseteq V$ mit $|S| = \ell$ und sei $T \subseteq S$ mit $|T| = m$ und sei $T' := S \setminus T$.
Wegen $|V| \geq 2k$ kann man T und T' zu disjunkten, k-elementigen Mengen $\tilde{T}$ und $\tilde{T}'$ erweitern und die $2k$-elementige Menge $\tilde{S} := \tilde{T} \cup \tilde{T}'$ betrachten.
Wegen $G \models EA_{2k,k}$ gibt es einen Knoten $z \in V \setminus \tilde{S} \subseteq V \setminus S$, so dass es von z aus zu allen Knoten in $\tilde{T}$ und zu keinem Knoten in $\tilde{T}'$ eine Kante gibt. Somit gilt: $G \models EA_{\ell,m}$. $\square$

Der folgende Satz liefert uns den Schlüssel zum Beweis des 0-1-Gesetzes für FO bzgl UG.

Satz 4.4

Für jedes $k \geq 1$ ist $\mu(EA_k \mid UG) = 1$

(Anschaulich: "Fast jeder hinreichend große endliche ungerichtete Graph erfüllt das Erweiterungsaxiom EA_k")

Beweis:
Offensichtlicherweise reicht es, zu zeigen, dass

$$\mu(\neg EA_k \mid UG) = 0$$

ist.

Sei $C := \{ G \in UG : G \models \neg EA_k \}$

Für $n \geq 1$ ist

$$\mu_n(\neg EA_k \mid UG) = \mu_n(C \mid UG) = \frac{|C_n|}{|UG_n|}$$

Zunächst schätzen wir $|C_n|$ nach oben ab:

Dazu beachte: Für jeden Graphen $G = (V,E) \in C_n$ gilt: $V = \{0, \dots, n-1\}$ und $G \models \neg EA_k$, d.h. $G \models \neg EA_{2k,k}$, dh es gibt disjunkte Mengen $T, T' \subseteq V$ mit $|T| = k$ und $|T'| = k$, so dass für jeden Knoten $z \in V \setminus (T \dot\cup T')$ gilt: Es ist nicht der Fall, dass z mit jedem Knoten in T und mit keinem Knoten in T' durch eine Kante verbunden ist

Es gilt:

- Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, die Menge T zu wählen
- Es gibt $\binom{n-k}{k}$ Möglichkeiten, die Menge T' zu wählen
- Es gibt $2^{\binom{2k}{2}}$ Möglichkeiten, Kanten zwischen Knoten aus $T \dot\cup T'$ zu wählen
- Es gibt $2^{\binom{n-2k}{2}}$ Möglichkeiten, Kanten zwischen Knoten aus $V \setminus (T \dot\cup T')$ zu wählen
- Für jeden der $(n-2k)$ Knoten z in $V \setminus (T \dot\cup T')$ können die Kanten von z zu $T \dot\cup T'$ beliebig gewählt werden, nur nicht so, dass z zu allen Elemente in T eine Kante hat und zu allen Elementen in T' keine Kante hat.
  D.h. für jedes $z \in V \setminus (T \dot\cup T')$ gibt es $(2^{2k} - 1)$ Möglichkeiten, die Kanten zwischen z und $T \dot\cup T'$ zu wählen.
  Somit gibt es $(2^{2k} - 1)^{n-2k}$ Möglichkeiten, die Kanten zwischen $V \setminus (T \dot\cup T')$ und $(T \dot\cup T')$ zu wählen.

Insgesamt zeigt dies, dass

$$|C_n| \leq \binom{n}{k}\cdot\binom{n-k}{k}\cdot 2^{\binom{2k}{2}}\cdot 2^{\binom{n-2k}{2}}\cdot\left(2^{2k}-1\right)^{n-2k}$$

$$\leq n^{2k}\cdot\left(2^{2k}-1\right)^{n-2k}\cdot 2^{\binom{2k}{2}+\binom{n-2k}{2}}$$

Somit:

$$\mu_n(C\,|\,\mathcal{U}G) = \frac{|C_n|}{|\mathcal{U}G_n|} \leq n^{2k}\cdot\left(2^{2k}-1\right)^{n-2k}\cdot\frac{2^{\binom{2k}{2}+\binom{n-2k}{2}}}{2^{\binom{n}{2}}}$$

$$= n^{2k}\cdot\left(2^{2k}-1\right)^{n-2k}\cdot\frac{1}{2^{\binom{n}{2}-\binom{2k}{2}-\binom{n-2k}{2}}}$$

Aus Gleichung $\circledast$ in Beispiel 4.1 (d) wissen wir, dass $\binom{n}{2}-\binom{2k}{2}-\binom{n-2k}{2} = 2k\cdot(n-2k)$ ist.

Somit gilt:

$$\mu_n(C\,|\,\mathcal{U}G) \leq n^{2k}\left(2^{2k}-1\right)^{n-2k}\cdot\frac{1}{2^{2k\cdot(n-2k)}}$$

$$= n^{2k}\cdot\underbrace{\left(\frac{2^{2k}-1}{2^{2k}}\right)}_{<1}{}^{n-2k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(k ist fest!)

Somit gilt: $\mu(\neg EA_k\,|\,\mathcal{U}G) = \mu(C\,|\,\mathcal{U}G) = 0$,

d.h. $\mu(EA_k\,|\,\mathcal{U}G) = 1$ $\square$

Korollar 4.5

Für alle $\ell \geq 1$, $m \geq 0$ mit $m \leq \ell$ gilt:

(a) $\mu(EA_{\ell,m} \mid UG) = 1$

(b) $EA_{\ell,m}$ hat beliebig große endliche Modelle.
Genauer: Es gibt ein $N_0 \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ s.d.
für alle $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq N_0$ gilt:
Es gibt einen ungerichteten Graphen G auf N Knoten, s.d. $G \models EA_{\ell,m}$.

Beweis:

(a) Sei $k := \ell$
Wegen Beobachtung 4.3 gilt f.a. $G=(V,E) \in UG$ mit $|V| \geq 2k$ und $G \models EA_k$, dass $G \models EA_{\ell,m}$.
Somit gilt f.a. $n \geq 2k$, dass

$$\mu_n(EA_{\ell,m} \mid UG) \geq \mu_n(EA_k \mid UG) \xrightarrow[n \to \infty]{\text{Satz 4.4}} 1$$

(b) Folgt direkt aus (a).

□

Mit Hilfe von Korollar 4.5(a) ("$\mu(EA_{\ell,m} \mid UG) = 1$") lassen sich die Beweise aus Beispiel 4.1 (c) und (d) stark vereinfachen:

Beispiel 4.6

(a) Sei $I \subseteq UG$ die Klasse aller ungerichteten Graphen, die mind. einen isolierten Knoten besitzen.

Behauptung: $\mu(I \mid UG) = 0$

Beweis

Sei $\ell := 2, m = 2$. Gemäß Korollar 4.5(a) gilt: $\mu(EA_{\ell,m} \mid UG) = 1$.

Für jeden Graphen $G = (V,E)$ mit $G \models EA_{2,2}$ und $|V| \geq 2$ gilt:

G besitzt keinen isolierten Knoten, denn:

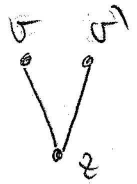
Seien $v, v' \in V$ beliebig, sei $S := \{v, v'\} = T$

Wegen $G \models EA_{2,2}$ gibt es

einen Knoten $z \in V \setminus \{v, v'\}$ s.d. es

Kanten zwischen z und v und zwischen

z und v' gibt

Skizze: 

Somit gilt f.a. $n \geq 2$:

$$\mu_n(I \mid UG) \leq 1 - \mu_n(EA_{2,2} \mid UG) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

D.h. $\mu(I \mid UG) = 0$.

(b) Sei $Z \subseteq UG$ die Klasse aller zusammenhängenden ungerichteten Graphen.

Behauptung: $\mu(Z \mid UG) = 1$

Beweis:

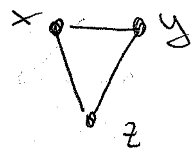
Sei $l := 2$, $m := 2$. In (a) haben wir gezeigt, dass für jeden Graphen $G = (V, E)$ mit $G \models EA_{2,2}$ und $|V| \geq 2$ und alle Knoten $v, v' \in V$ gilt: Es gibt in G einen Weg der Länge 2 von v nach v'.
Insbes. ist G also zusammenhängend.

Somit gilt f.a. $n \geq 2$:

$$\mu_n(Z \mid UG) \geq \mu_n(EA_{2,2} \mid UG) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1.$$

Dh $\mu(Z \mid UG) = 1$.

(c) Sei $D \subseteq UG$ die Klasse aller ungerichteten Graphen, die mindestens ein Dreieck besitzen.
Ein Dreieck in einem Graphen $G = (V, E)$ sind 3 paarweise verschiedene Knoten x, y, z, s.d. es in G Kanten zwischen x, y, zwischen y, z und zwischen z, x gibt. Skizze:



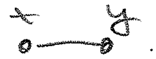
<u>Behauptung:</u> $\mu(D \mid UG) = 1$

<u>Beweis:</u>

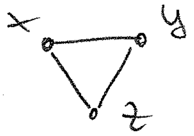
Sei $k := 2$. Zur Erinnerung: $EA_k = EA_{2k,k}$

Für jeden Graphen $G = (V,E)$ mit $G \models EA_k$ und $|V| \geq 2k = 4$ gilt gemäß Beobachtung 4.3:

$G \models EA_{\ell,m}$ f.a. $\ell \geq 1$, $m \geq 0$ mit $m \leq \ell \leq k$

Aus $G \models EA_{1,1}$ und $|V| > 1$ folgt, dass es Knoten $x, y \in V$ gibt die durch eine Kante miteinander verbunden sind. <u>Skizze:</u> .

Aus $G \models EA_{2,2}$ folgt für $S := \{x,y\} = T$, dass es einen Knoten $z \in V \setminus \{x,y\}$ gibt, der mit x und mit y durch Kanten verbunden ist

<u>Skizze:</u> . D.h.: G besitzt ein Dreieck.

Somit gilt: f.a. $n \geq 4$:

$$\mu_n(D \mid UG) \geq \mu_n(EA_2 \mid UG) \xrightarrow[N \to \infty]{} 1$$

D.h.: $\mu(D \mid UG) = 1$ $\triangleright$.

Mit Hilfe von Satz 4.4 und dem folgenden Lemma werden wir das 0-1-Gesetz für FO bzgl UG direkt folgern können.

<u>Lemma 4.7</u>

Sei $k \geq 1$ und seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei ungerichtete Graphen, die das Erweiterungsaxiom $EA_{\ell,m}$ für alle $\ell \geq 1$ und $m \geq 0$ mit $m \leq \ell < k$ erfüllen. Dann erfüllen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ genau die gleichen FO[E]-Sätze vom Quantorenrang $\leq k$.

<u>Beweis:</u>

Gemäß Satz von Ehrenfeucht genügt es, zu zeigen, dass Duplicator eine Gewinnstrategie im k-Runden EF-Spiel auf $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ hat.

Duplicators Gewinnstrategie wird durch die Erweiterungsaxiome gewährleistet:

<u>Runde 1:</u> Spoiler wählt einen Knoten $a_1 \in A$ oder einen Knoten $b_1 \in B$, und Duplicator antwortet mit einem beliebigen Knoten $b_1 \in B$ bzw $a_1 \in A$.

<u>Runde $i+1$, für $i \in \{1, \dots, k-1\}$:</u>

Seien $a_1, \dots, a_i \in A$ und $b_1, \dots, b_i \in B$ die in den ersten i Runden von Spoiler und

Duplicator gewählten Elemente.

$(*)_i$: Gemäß Induktionsannahme gilt f.a. $j, j' \in \{1, \dots, i\}$:
- $a_j = a_{j'} \iff b_j = b_{j'}$ und
- $\{a_j, a_{j'}\} \in E^{\mathfrak{A}} \iff \{b_j, b_{j'}\} \in E^{\mathfrak{B}}$

Wir betrachten OBdA den Fall, dass Spoiler in Runde $i+1$ ein Element $a_{i+1} \in A$ wählt (der Fall, dass Spoiler $b_{i+1} \in B$ wählt, kann analog behandelt werden).

Falls $a_{i+1} = a_j$ für ein $j \in \{1, \dots, i\}$, so wählt Duplicator $b_{i+1} := b_j$, und $(*)_{i+1}$ ist erfüllt.

Ansonsten (d.h., falls $a_{i+1} \notin \{a_1, \dots, a_i\}$) sei

$$T := \{ a \in \{a_1, \dots, a_i\} : \text{es gibt in } \mathfrak{A} \text{ eine Kante zwischen } a_{i+1} \text{ und } a \}$$

sei $T' := \{a_1, \dots, a_i\} \setminus T$ und sei $S := T \cup T' = \{a_1, \dots, a_i\}$

Sei $\ell := |S|$ und $m := |T|$.

klar: $\ell \geq 1$, $m \geq 0$, $m \leq \ell \leq i < k$. Gemäß Voraussetzung gilt also: $\mathfrak{B} \models EA_{\ell,m}$.

Sei $\hat{S} := \{b_1, \dots, b_i\}$, $\hat{T} := \{ b_j : a_j \in T, j \in \{1, \dots, i\}\}$

$\hat{T}' := \hat{S} \setminus \hat{T}$.

Wegen $\mathfrak{B} \models EA_{\ell,m}$ gibt es einen Knoten $z \in B \setminus \hat{S}$, der mit allen Elementen in $\hat{T}$ und mit keinem Element in $\hat{T}'$ durch eine Kante verbunden ist.

Duplicator wählt $b_{i+1} := z$ und stellt dadurch sicher, dass $(*)_{i+1}$ erfüllt ist.

Nach k Runden ist $(*)_k$ erfüllt, und daher hat Duplicator gewonnen. $\square$

<u>Theorem 4.8</u> (Glebskii et al 1969, Fagin 1972)

FO besitzt das 0-1-Gesetz bzgl. der Klasse UG aller ungerichteten Graphen

<u>Beweis</u>:

Sei φ ein FO[E]-Satz und sei $k := \max\{qr(\varphi), 1\}$.

Sei $\mathcal{E} := \{ EA_{\ell,m} : \ell \geq 1,\ m \geq 0,\ m \leq \ell < k \}$

Klar: $\mathcal{E}$ ist endlich.

Setze $\eta := \bigwedge_{\psi \in \mathcal{E}} \psi$.

<u>Behauptung (*)</u>: $\mu(\eta \mid UG) = 1$

<u>Beweis</u>: Folgt direkt aus Korollar 4.5(a) („$\mu(E_{\ell,m} \mid UG) = 1$") und der Endlichkeit von $\mathcal{E}$.

Details: Übung. $\square_{Beh (*)}$

<u>Fall 1:</u> Es gibt ein $G \in UG$ mit $G \models \eta$ und $G \models \varphi$.

Dann gilt für jedes $G' \in UG$ mit $G' \models \eta$, dass $G' \models \varphi$ (dies folgt direkt aus Lemma 4.7, da $k \geq qr(\varphi)$).

Somit gilt f.a. $n \geq 1$:

$$\mu_n(\varphi \mid UG) \geq \mu_n(\eta \mid UG) \xrightarrow[n \to \infty]{\text{Beh}(*)} 1.$$

D.h: $\mu(\varphi \mid UG) = 1$.

<u>Fall 2:</u> Für alle $G \in UG$ mit $G \models \eta$ gilt: $G \not\models \varphi$, d.h. $G \models \neg\varphi$.

Dann gilt offensichtlicherweise für alle $n \geq 1$:

$$\mu_n(\neg\varphi \mid UG) \geq \mu_n(\eta \mid UG) \xrightarrow[n \to \infty]{\text{Beh}(*)} 1.$$

D.h.: $\mu(\neg\varphi \mid UG) = 1$, und somit $\mu(\varphi \mid UG) = 0$.

$\square$

4.2.2 ... für die Klasse $ALL(\sigma)$

Für eine Signatur σ sei $ALL(\sigma)$ die Klasse aller σ-Strukturen.

Theorem 4.9 (Glebskii et al 1969, Fagin 1972)

Für jede endliche relationale Signatur σ gilt: FO besitzt das 0-1-Gesetz bzgl der Klasse $ALL(\sigma)$ aller σ-Strukturen

Der Beweis von Theorem 4.9 folgt demselben Schema wie der Beweis von Theorem 4.8.

An Stelle der Erweiterungsaxiome $EA_{\ell,m}$ werden dabei Erweiterungsaxiome der folgenden Form betrachtet:

- für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ seien $x_1, \dots, x_{\ell+1}$ paarweise verschiedene Variablen und sei

$$\Delta^\sigma_{\ell+1} := \{ R(x_{i_1}, \dots, x_{i_r}) : R \in \sigma,\ r = ar(R),\ \{x_{i_1}, \dots, x_{i_r}\} \subseteq \{x_1, \dots, x_{\ell+1}\},\ x_{\ell+1} \in \{x_{i_1}, \dots, x_{i_r}\} \}$$

(d.h.: $\Delta^\sigma_{\ell+1}$ ist die Menge aller atomaren σ-Formeln mit Variablen aus $\{x_1, \dots, x_{\ell+1}\}$, in denen die Variable $x_{\ell+1}$ vorkommt).

- für $\mathcal{F} \subseteq \Delta^\sigma_{\ell+1}$ sei $\overline{\mathcal{F}} := \Delta^\sigma_{\ell+1} \setminus \mathcal{F}$

- für $\ell \geq 0$ und $F \subseteq \Delta^\sigma_{\ell+1}$ sei

$$EA_{\ell,F} := \forall x_1 \cdots \forall x_\ell \Big(\bigwedge_{1 \le i < j \le \ell} \neg x_i = x_j \rightarrow$$
$$\exists x_{\ell+1} \Big(\bigwedge_{i=1}^{\ell} \neg x_{\ell+1} = x_i \;\wedge$$
$$\bigwedge_{\varphi \in F} \varphi \;\wedge \bigwedge_{\psi \notin F} \neg\psi \Big)\Big)$$

Insbes. gilt $EA_{0,F} = \exists x_1 \big(\bigwedge_{\varphi \in F} \varphi \wedge \bigwedge_{\psi \notin F} \neg\psi \big)$

Analog zu Satz 4.4 und Lemma 4.7 kann man Folgendes zeigen:

<u>Lemma 4.10</u>

Sei σ eine endliche relationale Signatur

<u>(a)</u> F.a. $\ell \in \mathbb{N}$, f.a. $F \subseteq \Delta^\sigma_{\ell+1}$ gilt

$$\mu\big(EA_{\ell,F} \mid All(\sigma) \big) = 1 .$$

<u>(b)</u> Sei $k \geq 1$ und seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei σ-Strukturen, die das Erweiterungsaxiom $EA_{\ell,F}$ für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ mit $\ell \leq k$ und jedes $F \subseteq \Delta^\sigma_{\ell+1}$ erfüllen.
Dann erfüllen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ genau die gleichen $FO[\sigma]$-Sätze vom Quantorenrang $\leq k$.

<u>Beweis:</u> Übung

Beweis von Theorem 4.9:

Sei φ ein FO[σ]-Satz und sei $k := qr(\varphi)$

Sei $\mathcal{E} := \{ EA_{\ell,\mathcal{F}} : 0 \leq \ell \leq k, \mathcal{F} \subseteq \Delta^{\sigma}_{\ell+1} \}$.

Klar: $\mathcal{E}$ ist endlich (denn: σ ist endlich, und daher auch $\Delta^{\sigma}_{\ell+1}$ endlich und $\mathcal{E}$ endlich)

Setze $\eta := \bigwedge_{\psi \in \mathcal{E}} \psi$

Behauptung (*): $\mu(\eta \mid ALL(\sigma)) = 1$

Beweis: Folgt direkt aus Lemma 4.10 (a), da $\mathcal{E}$ endlich ist.
Details: Übung. $\square$

Fall 1: Es gibt eine σ-Struktur $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \models \eta$ und $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Dann gilt für jede σ-Struktur $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{B} \models \eta$, dass $\mathfrak{B} \models \varphi$ (dies folgt direkt aus Lemma 4.10(b), da $k = qr(\varphi)$ ist).

Somit gilt f.a. $n \geq 1$, dass

$$\mu_n(\varphi \mid ALL(\sigma)) \geq \mu_n(\eta \mid ALL(\sigma)) \xrightarrow[n \to \infty]{\text{Beh } (*)} 1.$$

<u>Fall 2:</u> "Fall 1 gilt nicht", d.h.:

Für jede σ-Struktur $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \models \eta$ gilt: $\mathfrak{A} \not\models \varphi$
d.h. $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$

Dann gilt offensichtlicherweise f.a. $n \geq 1$:

$$\mu_n(\neg\varphi \mid All(\sigma)) \geq \mu_n(\eta \mid All(\sigma)) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{Beh}\circledast} 1$$

D.h. $\mu(\neg\varphi \mid All(\sigma)) = 1$, also

$\mu(\varphi \mid All(\sigma)) = 0$. $\square$

Das obige Theorem besagt, dass Graph-Zusammenhang nicht in *Mon*-Σ_1^1 definierbar ist. In der monadischen *universellen* Logik zweiter Stufe *Mon*-Π_1^1 kann Graph-Zusammenhang allerdings leicht definiert werden (siehe Beispiel 2.5 (b)).

Des Weiteren ist Graph-Zusammenhang ein Problem, das zur Klasse NP gehört (es gehört sogar zur Klasse PTIME) und kann daher nach dem Satz von Fagin (Theorem 2.8) auch durch eine ESO-Formel beschrieben werden. Zusammen mit Bemerkung 3.39 erhalten wir also:

$$\text{FO} < \textit{Mon-}\Sigma_1^1 < \text{ESO} \quad \text{auf Fin.}$$

Abschließend sei noch angemerkt, dass sich natürlich leicht eine Variante des Ajtai-Fagin Spiels finden lässt, die an Stelle der *Mon*-Σ_1^1-Definierbarkeit allgemein ESO-Definierbarkeit charakterisiert: an Stelle einer gegebenen Zahl l (die angibt, wie viele 1-stellige Relationen in den Phasen 1 und 2 gewählt werden) brauchen wir dazu nur eine Liste $(s_1, .., s_l)$ von Zahlen zu betrachten, die angibt, dass in den Phasen 1 und 2 des Spiels Relationen der Stelligkeiten $s_1, .., s_l$ gewählt werden.

4.3 Pebble-Spiele und infinitäre Logiken

In diesem Abschnitt werden wir sogenannte *infinitäre* Logiken behandeln, d.h. Logiken, deren Formeln unendliche Länge haben können. Solche Logiken werden vor allem im Bereich der unendlichen Modelltheorie untersucht. Für die endliche Modelltheorie, mit der wir uns hier beschäftigen, werden sie sich in ihrer allgemeinen Form als zu ausdrucksstark herausstellen. Schränkt man hingegen die Anzahl der erlaubten Variablen ein, so erhält man schwächere Logiken, die für die endliche Modelltheorie wichtige Erkenntnisse liefern.

4.3.1 Die infinitäre Logik $L_{\infty\omega}$

4.11 Definition. Sei σ eine Signatur.
Die Formelmenge $L_{\infty\omega}[\sigma]$ ist induktiv wie folgt definiert.

- $L_{\infty\omega}[\sigma]$ enthält alle atomaren σ-Formeln.
- Ist φ eine $L_{\infty\omega}[\sigma]$-Formel, so ist auch $\neg\varphi$ eine $L_{\infty\omega}[\sigma]$-Formel.
- Ist φ eine $L_{\infty\omega}[\sigma]$-Formel und ist x eine Variable erster Stufe, so sind auch $\exists x\varphi$ und $\forall x\varphi$ Formeln in $L_{\infty\omega}[\sigma]$.
- Ist Ψ eine *Menge* von $L_{\infty\omega}[\sigma]$-Formeln, so sind auch $\bigvee \Psi$ und $\bigwedge \Psi$ Formeln in $L_{\infty\omega}[\sigma]$. (*Beachte:* Hierbei darf Ψ auch unendlich sein.)

Die Semantik der Logik $L_{\infty\omega}$ ist die naheliegende Erweiterung der Semantik für FO. Hierbei wird $\bigvee \Psi$ als Disjunktion über alle Formeln in Ψ und entsprechend $\bigwedge \Psi$ als Konjunktion über alle Formeln in Ψ interpretiert. Das heißt (für eine Satzmenge Ψ), dass $\mathfrak{A} \models \bigvee \Psi$ genau dann gilt, wenn es (mindestens) einen Satz $\psi \in \Psi$ gibt mit $\mathfrak{A} \models \psi$. Analog dazu gilt

$\mathfrak{A} \models \bigwedge \Psi$ genau dann, wenn für jeden Satz $\psi \in \Psi$ gilt $\mathfrak{A} \models \psi$.
Offensichtlich ist $L_{\infty\omega}$ eine Erweiterung der Logik erster Stufe. Wir schauen uns zunächst einige Beispiele für $L_{\infty\omega}$-Formeln an:

4.12 Beispiel. Für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ sei φ_n der FO-Satz

$$\varphi_n \ := \ \exists x_1 \cdots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \neg x_i{=}x_j \ \wedge \ \forall y \bigvee_{i=1}^{n} x_i{=}y \right),$$

der besagt, dass es genau n Elemente in den Modellen von φ_n gibt. Nun gilt folgendes:

(1) Für jede Signatur σ ist $\psi := \bigvee \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine $L_{\infty\omega}[\sigma]$-Formel, die die Klasse aller *endlichen* σ-Strukturen definiert, das heißt: $\mathrm{Mod}_{\mathsf{All}}(\psi) = \mathsf{Fin}$.

(2) Analog definiert der $L_{\infty\omega}[\sigma]$-Satz $\psi_{\mathsf{Even}} := \bigvee \{\varphi_n : n \in \mathbb{N} \text{ und } n \text{ gerade}\}$ die Klasse aller endlichen Strukturen gerader Kardinalität, das heißt $\mathrm{Mod}_{\mathsf{All}}(\psi_{\mathsf{Even}}) = \mathsf{Even}$, wobei Even die Klasse aller endlichen σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ bezeichnet, deren Universum aus einer geraden Anzahl von Elementen besteht.

Wir wissen bereits, dass die Klasse aller endlichen Strukturen gerader Kardinalität nicht in FO definierbar ist. Die Logik $L_{\infty\omega}$ ist also echt ausdrucksstärker als FO, was angesichts der sehr allgemeinen Definition auch nicht verwundern dürfte.

Wie anfangs erwähnt, spielt die Logik $L_{\infty\omega}$ in der unendlichen Modelltheorie eine wichtige Rolle. Das nächste Beispiel zeigt jedoch, dass sie für die *endliche* Modelltheorie schon zu ausdrucksstark ist, weil einfach *jede* Klasse endlicher Strukturen durch eine $L_{\infty\omega}$-Formel beschrieben werden kann.

4.13 Beispiel. Sei σ eine (endliche) Signatur und C eine beliebige unter Isomorphie abgeschlossene Klasse endlicher σ-Strukturen. C wird definiert durch den $L_{\infty\omega}[\sigma]$-Satz $\varphi_{\mathsf{C}} := \bigvee \{\varphi_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \in \mathsf{C}\}$, wobei $\varphi_{\mathfrak{A}}$ ~~die~~ eine FO-Formel ~~aus Proposition 3.2~~ ist, die die Struktur $\mathfrak{A}$ bis auf Isomorphie beschreibt. Das heißt: $\mathrm{Mod}_{\mathsf{All}}(\varphi_{\mathsf{C}}) = \mathsf{C}$.

Wie das Beispiel zeigt, ist also jede Klasse endlicher Strukturen in $L_{\infty\omega}$ definierbar. Wir werden daher geeignete Einschränkungen der Logik definieren müssen, um für die endliche Modelltheorie interessante Aussagen treffen zu können.

4.3.2 Das k-Variablen Fragment von FO und $L_{\infty\omega}$

4.14 Definition (FO^k). Sei σ eine Signatur und sei $k \in \mathbb{N}$. Die Klasse $\mathrm{FO}^k[\sigma]$ besteht aus allen $\mathrm{FO}[\sigma]$-Formeln, in denen höchstens k verschiedene Variablen erster Stufe vorkommen.

4.15 Beispiel. Für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ gibt es eine $\mathrm{FO}^2[<]$-Formel $\psi_\ell(x)$, so dass für jede endliche linear geordnete Struktur $\mathfrak{A} := (A, <^{\mathfrak{A}})$ und jedes $a \in A$ gilt: $\mathfrak{A} \models \psi_\ell[a] \iff a$ ist das

ℓ-te Element bezüglich der Ordnung $<^{\mathfrak{A}}$ ist, d.h. $\ell = rg_{<^{\mathfrak{A}}}(a)$. Die Formel ψ_ℓ definieren wir induktiv durch

$$\psi_0(x) \;:=\; \forall y\, \neg y{<}x$$

$$\psi_{\ell+1}(x) \;:=\; \forall y \Big(y{<}x \leftrightarrow \bigvee_{i=0}^{\ell} \exists x \,(\, x{=}y \wedge \psi_i(x)\,)\Big).$$

Die Konstruktion $\exists x\,(x{=}y \wedge \psi_i(x))$ wird benutzt, da ψ_ℓ die Variable x und nicht y als freie Variable enthält.

Die Formel $\psi_{\ell+1}(x)$ besagt, dass alle Elemente $y < x$ höchstens den Rang ℓ in der Ordnung haben können. Also kann x höchstens den Rang $\ell{+}1$ haben. Andererseits kann x keinen Rang $\leqslant \ell$ haben, da andernfalls für $y = x$ die rechte Seite der Biimplikation erfüllt wäre, die linke aber nicht.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass man mit Substitutionen im Zusammenhang mit k-Variablen Logiken vorsichtig sein muss. Substituiert man einfach x durch y in $\psi_i(x)$, so würde, gemäß der Definition von Substitutionen, zunächst die gebunden vorkommende Variable y umbenannt, d.h. durch ein neues Variablensymbol ersetzt, und danach dann jedes frei vorkommende x durch y ersetzt. Hierbei ist aber nicht von vorneherein klar, dass damit nicht mehr als insgesamt zwei Variablen benutzt werden. Daher werden wir im Folgenden Substitutionen im Bezug auf k-Variablen Logiken vermeiden und lieber explizite Variablenumbenennungen verwenden.

Wir definieren nun das entsprechende k-Variablen Fragment der infinitären Logik $L_{\infty\omega}$.

4.16 Definition ($L^k_{\infty\omega}$). Sei σ eine Signatur und sei $k \in \mathbb{N}$. Die Formelklasse $L^k_{\infty\omega}[\sigma]$ ist definiert als die Klasse aller $L_{\infty\omega}[\sigma]$-Formeln, die höchstens k verschiedene Variablen erster Stufe enthalten. Des Weiteren sei $L^\omega_{\infty\omega}[\sigma] := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} L^k_{\infty\omega}[\sigma]$.

$L^\omega_{\infty\omega}$ ist also die Klasse aller $L_{\infty\omega}$-Formeln, in denen nur endlich viele Variablen benutzt werden. Als Ausblick auf Kapitel 6 sei erwähnt, dass sich die ~~bisher~~ dort behandelten Fixpunktlogiken LFP, IFP, PFP sämtlich in $L^\omega_{\infty\omega}$ einbetten lassen, es gilt also PFP $\leqslant L^\omega_{\infty\omega}$. Insbesondere übertragen sich also Nicht-Definierbarkeits-Resultate für $L^\omega_{\infty\omega}$ auch auf die Fixpunktlogiken.

4.17 Beispiel. Für jede Menge $J \subseteq \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ gibt es einen $L^3_{\infty\omega}[<]$-Satz φ_J, so dass

$$\mathrm{Mod}_{\mathsf{All}}(\varphi_J) \;=\; \{\, \mathfrak{A} = (A, <^{\mathfrak{A}}) \;:\; <^{\mathfrak{A}} \text{ ist eine lineare Ordnung auf } A \text{ und } |A| \in J \,\}.$$

Der Satz φ_J ist folgendermaßen konstruiert: Sei $\psi_{\mathrm{Ord}} \in \mathrm{FO}^3[<]$ ein Satz, der besagt, dass $<$ eine (strikte) lineare Ordnung ist. Außerdem sei $\psi_\ell(x)$, für jedes $\ell \in \mathbb{N}$, der $\mathrm{FO}^2[<]$-Satz aus Beispiel 4.15. Dann ist ψ_J definiert als

$$\psi_J \;:=\; \psi_{\mathrm{Ord}} \wedge \bigvee \{\, \exists x\, \psi_{\ell-1}(x) \;\wedge\; \neg\exists x\, \psi_\ell(x) \;:\; \ell \in J \,\}.$$

Wie dieses Beispiel zeigt, gibt es Strukturklassen, die schon in der 3-Variablen-Logik $L^3_{\infty\omega}$ definiert werden können, die aber nicht in FO definierbar sind (mit beliebig vielen Variablen). Wie der nächste Satz allerdings zeigt, können zwei *endliche* Strukturen, die in $L^k_{\infty\omega}$ unterschieden werden können, auch schon in FO^k unterschieden werden.

4.18 Definition. Sei $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, σ eine Signatur und $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ σ-Strukturen. Wir schreiben $\mathfrak{A} \equiv_{\mathrm{FO}^k} \mathfrak{B}$ (bzw. $\mathfrak{A} \equiv_{L^k_{\infty\omega}} \mathfrak{B}$), falls $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ dieselben $\mathrm{FO}^k[\sigma]$-Sätze (bzw. $L^k_{\infty\omega}[\sigma]$-Sätze) erfüllen.

4.19 Satz. *Für alle endlichen σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gilt:* $\mathfrak{A} \equiv_{\mathrm{FO}^k} \mathfrak{B} \iff \mathfrak{A} \equiv_{L^k_{\infty\omega}} \mathfrak{B}$.

Beweis: "$\Longleftarrow$": klar, da $\mathrm{FO}^k \subseteq L^k_{\infty\omega}$.
"$\Longrightarrow$": Per Induktion nach dem Aufbau von $L^k_{\infty\omega}$ zeigen wir, dass es zu jeder $L^k_{\infty\omega}[\sigma]$-Formel $\varphi(\vec{x})$ eine $\mathrm{FO}^k[\sigma]$-Formel $\tilde{\varphi}(\vec{x})$ gibt, so dass für alle $\vec{a} \in A$, $\vec{b} \in B$ gilt:

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff \mathfrak{A} \models \tilde{\varphi}[\vec{a}] \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} \models \varphi[\vec{b}] \iff \mathfrak{B} \models \tilde{\varphi}[\vec{b}]. \tag{3.7}$$

Der einzige nicht-triviale Fall ist, dass φ von der Form $\bigvee \Psi$ oder $\bigwedge \Psi$ ist, wobei Ψ eine Menge von $L^k_{\infty\omega}$-Formeln ist. Wir betrachten hier den Fall $\bigvee \Psi$, der andere ist dann analog.

Sei also Ψ eine Menge von $L^k_{\infty\omega}$-Formeln und $\varphi := \bigvee \Psi$. Für jedes $\vec{a} \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}]$ wähle eine Formel $\psi_{\vec{a}} \in \Psi$, so dass $\mathfrak{A} \models \psi[\vec{a}]$. Analog wähle für jedes $\vec{b} \in B$ mit $\mathfrak{B} \models \varphi[\vec{b}]$ eine Formel $\psi_{\vec{b}} \in \Psi$, so dass $\mathfrak{B} \models \psi_{\vec{b}}[\vec{b}]$. Nun definieren wir

$$\Psi_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}} := \{ \psi_{\vec{a}} : \vec{a} \in A \text{ und } \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \} \cup \{ \psi_{\vec{b}} : \vec{b} \in B \text{ und } \mathfrak{B} \models \varphi[\vec{b}] \}.$$

Nach Konstruktion ist $\Psi_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}$ eine *endliche* Teilmenge von Ψ. Weiterhin gilt für alle $\vec{a} \in A, \vec{b} \in B$:

$$\mathfrak{A} \models \bigvee \Psi_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}[\vec{a}] \iff \mathfrak{A} \models \bigvee \Psi[\vec{a}] \iff \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}]$$

sowie

$$\mathfrak{B} \models \bigvee \Psi_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}[\vec{b}] \iff \mathfrak{B} \models \bigvee \Psi[\vec{b}] \iff \mathfrak{B} \models \varphi[\vec{b}].$$

Gemäß Induktionsvoraussetzung ist jede Formel $\psi \in \Psi_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}$ äquivalent zu einer Formel in FO^k. Also ist auch $\bigvee \Psi_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}}$ äquivalent zu einer Formel $\tilde{\varphi}$ in FO^k. Es gilt also für alle $\vec{a} \in A$ und $\vec{b} \in B$: $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \iff \mathfrak{A} \models \tilde{\varphi}[\vec{a}]$ und $\mathfrak{B} \models \varphi[\vec{b}] \iff \mathfrak{B} \models \tilde{\varphi}[\vec{b}]$. Somit ist (3.7) gezeigt. Aus (3.7) folgt insbesondere folgendes: Falls es einen $L^k_{\infty\omega}$-Satz φ gibt, der zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ unterscheidet, so gibt es auch einen FO^k-Satz, der zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ unterscheidet. Dies schließt den Beweis von "$\Longrightarrow$" ab. $\square$

4.3.3 Pebble-Spiele

Ziel dieses Abschnitts ist es, Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele für die Logiken FO^k und $L^k_{\infty\omega}$ einzuführen. Dazu zunächst ein paar Notationen.

Der Einfachheit halber werden wir in diesem Abschnitt nur Signaturen betrachten, die *keine Konstantensymbole* enthalten. Solche Signaturen nennen wir *relationale Signaturen.*

4.20 Notation. Sei σ eine relationale Signatur, $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ σ-Strukturen.

- Wir vereinbaren, dass das Symbol "$*$" in keinem Universum einer Struktur vorkommt.
- Für $\vec{a} := a_1, .., a_k \in (A \dot{\cup} \{*\})^k$ definieren wir den *Träger* $\mathrm{Tr}(\vec{a})$ *von* $\vec{a}$ als
$$\mathrm{Tr}(\vec{a}) \ := \ \{i : a_i \neq *\}.$$
- Für $i \in \{1, .., k\}$, $a \in A$ und $\vec{a} := a_1 \dots a_k \in (A \cup \{*\})^k$ setzen wir
$$\vec{a}\tfrac{a}{i} \ := \ a_1, .., a_{i-1}, a, a_{i+1}, .., a_k .$$
Das heißt, wir ersetzen die i-te Stelle von $\vec{a}$ durch a.
- Für $\vec{a} = a_1, .., a_k \in (A \cup \{*\})^k$ schreiben wir $\vec{a}_{|\mathrm{Tr}(\vec{a})}$ um die Folge ~~das Tupel~~ über A zu bezeichnen, das aus $\vec{a}$ durch Löschen der "$*$"-Symbole entsteht.
- Für $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit $\mathrm{Tr}(\vec{a}) = \mathrm{Tr}(\vec{b})$ schreiben wir $(\vec{a} \mapsto \vec{b})_{|\mathrm{Tr}(\vec{a})}$ um die Abbildung $\big(\vec{a}_{|\mathrm{Tr}(\vec{a})} \mapsto \vec{b}_{|\mathrm{Tr}(\vec{b})}\big)$ zu bezeichnen.

4.21 Definition (k-partieller Isomorphismus)**.** Sei σ eine relationale Signatur, $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ seien σ-Strukturen, und seien $\vec{a} \in (A \cup \{*\})^k$ und $\vec{b} \in (B \cup \{*\})^k$. Die Abbildung $(\vec{a} \mapsto \vec{b})$ heißt *k-partieller Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$*, falls

(1) $\mathrm{Tr}(\vec{a}) = \mathrm{Tr}(\vec{b})$ und

(2) $(\vec{a} \mapsto \vec{b})_{|\mathrm{Tr}(\vec{a})}$ ist ein partieller Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$.

~~$\mathrm{Part}^k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ bezeichnet die Menge aller k-partiellen Isomorphismen von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$.~~

Man beachte, dass der Definitionsbereich jedes k-partiellen Isomorphismus höchstens k Elemente enthält.

Wir sind nun bereit, die Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele für die Logiken FO^k und $L^k_{\infty\omega}$ einzuführen.

4.22 Definition (Pebble-Spiele)**.** Sei σ eine relationale Signatur und seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ σ-Strukturen. Seien $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, $\vec{a} \in (A \dot{\cup} \{*\})^k$ und $\vec{b} \in (B \dot{\cup} \{*\})^k$ mit $\mathrm{Tr}(\vec{a}) = \mathrm{Tr}(\vec{b})$.

Das *k-Pebble-Spiel* $\mathcal{G}^k_\infty(\mathfrak{A}, \vec{a}, \mathfrak{B}, \vec{b})$ wird zwischen zwei Spielern, Spoiler und Duplicator, gespielt. Den Spielern stehen insgesamt $2{\cdot}k$ Spielsteine $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, $\beta_1, \dots, \beta_k$ zur Verfügung, die auf Elemente der Strukturen gelegt werden können. Zu Beginn des Spiels liegt für jedes $i \in \mathrm{Tr}(\vec{a})$ der Stein α_i auf dem Element a_i und β_i auf b_i. Die übrigen Steine liegen "nebem dem Spielbrett".

Eine Partie des Spiels besteht aus einer unbegrenzten Anzahl von Runden. In jeder Runde wählt Spoiler zunächst ein beliebiges $i \in \{1, .., k\}$ und nimmt entweder den Stein α_i und legt ihn auf ein beliebiges Element in A, oder er nimmt Stein β_i und legt ihn auf ein beliebiges Element in B. Duplicator antwortet, indem er den entsprechenden Stein (also β_i oder α_i) auf ein beliebiges Element in der anderen Struktur legt. D.h., Duplicator legt Stein β_i auf ein Element in B, falls Spoiler den Stein α_i gelegt hat; bzw. Duplicator legt Stein α_i auf ein Element in A, falls Spoiler den Stein β_i gelegt hat. Beachte:

- Steine, die bereits auf dem Spielfeld liegen, dürfen wiederverwendet werden.
- Es dürfen durchaus mehrere Steine auf demselben Element liegen.

Am Ende jeder Runde wird entschieden, ob Spoiler gewonnen hat (und das Spiel beendet ist) oder ob weitergespielt wird. Dazu seien $\vec{a} = a_1, .., a_k \in (A \cup \{*\})^k$ die am Ende der Runde durch die Steine $\alpha_1, .., \alpha_k$ in $\mathfrak{A}$ markierten Elemente (mit $a_j = *$ falls der Stein α_j noch "neben dem Spielbrett" liegt), und $\vec{b} = b_1, .., b_k \in (B \cup \{*\})^k$ seien die entsprechenden durch die Steine $\beta_1, .., \beta_k$ in $\mathfrak{B}$ markierten Elemente. Ist die Abbildung $(\vec{a} \mapsto \vec{b})$ *kein* k-partieller Isomorphismus, so endet das Spiel nach dieser Runde und *Spoiler gewinnt*. Andernfalls wird das Spiel mit einer weiteren Runde fortgesetzt.

Duplicator gewinnt, wenn unendlich lange gespielt wird, also nach jeder Runde die Abbildung $(\vec{a} \mapsto \vec{b})$ ein k-partieller Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ ist.

Bemerkung:

- Ist $\vec{a} = \vec{b} = \vec{*} = *, .., *$, so schreiben wir $\mathcal{G}^k_\infty(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ an Stelle von $\mathcal{G}^k_\infty(\mathfrak{A}, \vec{*}, \mathfrak{B}, \vec{*})$.
- Strategien und Gewinnstrategien im k-Pebble-Spiel sind analog zum herkömmlichen Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel definiert und werden daher hier nicht mehr formal eingeführt.
- Sind die Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ *endlich*, so gibt es nur eine endliche Zahl verschiedener Spielpositionen $(\vec{a}, \vec{b}) \in (A \cup \{*\})^k \times (B \cup \{*\})^k$. In diesem Fall steht also schon nach einer *endlichen* Zahl von Zügen fest, wer das Spiel gewinnen kann.

4.23 Beispiele. (a) Sei $\sigma := \varnothing$ und $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ σ-Strukturen mit $|A|, |B| \geqslant k$. Dann hat *Duplicator* eine Gewinnstrategie in $\mathcal{G}^k_\infty(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, indem er immer wenn Spoiler zwei Steine auf dasselbe Element legt ebenso zieht und ansonsten immer ein neues Element mit einem Stein belegt. Da es nicht mehr Steine als Elemente in den Strukturen gibt, kann er dies immer sicherstellen.

(b) Ist $\sigma = \varnothing$ und $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ sind σ-Strukturen mit $|A| < k$ und $|B| \neq |A|$, so hat *Spoiler* eine Gewinnstrategie in $\mathcal{G}^k_\infty(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.

(c) Seien jetzt $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ endliche, linear geordnete $\{<\}$-Strukturen. Dann hat Duplicator genau dann eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathcal{G}^2_\infty(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, wenn $|A| = |B|$. Dies kann man folgendermaßen sehen:

Gilt $|A| = |B|$ so sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei endliche lineare Ordnungen gleicher Kardinalität und somit isomorph. Folglich hat Duplicator eine Gewinnstratgie, indem er immer zu Spoilers Wahl isomorphe Elemente wählt.

Gilt $|A| \neq |B|$ und o.B.d.A $|A| > |B|$, so hat Spoiler eine Gewinnstratgie in $\mathcal{G}^2_\infty(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, indem er in jeder Runde $r \geqslant 1$ den Stein $\alpha_{1+(r-1 \bmod 2)}$ auf das Element mit Rang $r-1$ in $\mathfrak{A}$ legt.

In den ersten beiden Runden legt Spoiler also seine beiden Spielsteine α_1, α_2 auf die beiden kleinsten Elemente in $\mathfrak{A}$. In den folgenden Runden nimmt er jeweils den Stein auf dem kleineren Element und plaziert ihn auf das kleinste noch nicht im Spiel verwendete Element. Nach jeder Runde r liegen also die Steine α_1, α_2 auf den Elemeten mit Rang $r-2$ und $r-1$. Auf diese Weise werden im Verlauf des Spiels alle Elemente von $\mathfrak{A}$ in ihrer Reihenfolge gemäß der Ordnung durchlaufen.

Duplicator muss nun ebenfalls in jedem Zug den Stein auf dem kleineren der beiden Elemente in $\mathfrak{B}$ auf ein größeres legen, denn ansonsten wäre die Abbildung $\alpha_1, \alpha_2 \mapsto \beta_1, \beta_2$ kein k-partieller Isomorphismus und Duplicator hätte verloren. Da aber $|B| < |A|$ ist, kann Duplicator dies nach spätestens $|B|$ Runden nicht mehr gewährleisten und verliert daher das Spiel.

Analog zum Satz von Ehrenfeucht ~~und Fraïssé~~ werden wir nun den Zusammenhang zwischen Pebble-Spielen und der Logik $L^{\omega}_{\infty\omega}$ herstellen. ~~Dazu benötigen wir zunächst eine geeignete Variante von Hin-und-Her-Systemen (vgl. Definition 3.32).~~

3.56 Definition. Sei σ eine relationale Signatur und $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$. Zwei σ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen *k-partiell isomorph* (kurz: $\mathfrak{A} \cong^k_{\text{part}} \mathfrak{B}$), falls es eine *nicht-leere* Menge I k-partieller Isomorphismen gibt, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

k-Hin-Eigenschaft: Für alle $(\vec{a} \mapsto \vec{b}) \in I$, alle $i \in \{1, \dots, k\}$ und alle $a \in A$ gibt es ein $b \in B$, so dass $(\vec{a}\frac{a}{i} \mapsto \vec{b}\frac{b}{i}) \in I$.

k-Her-Eigenschaft: Für alle $(\vec{a} \mapsto \vec{b}) \in I$, alle $i \in \{1, \dots, k\}$ und alle $b \in B$ gibt es ein $a \in A$, so dass $(\vec{a}\frac{a}{i} \mapsto \vec{b}\frac{b}{i}) \in I$.

Ein System mit diesen Eigenschaften nennen wir *k-Hin-und-Her-System*. Wir schreiben $I : \mathfrak{A} \cong^k_{\text{part}} \mathfrak{B}$ um anzudeuten, dass I ein k-Hin-und-Her-System zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist.

3.57 Bemerkung. Die Menge

$$W^k_\infty(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) := \left\{ (\vec{a} \mapsto \vec{b}) \in \text{Part}^k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \;:\; \begin{array}{l} \text{Duplicator hat eine Gewinnstrategie im} \\ k\text{-Pebble-Spiel } \mathcal{G}^k_\infty(\mathfrak{A}, \vec{a}, \mathfrak{B}, \vec{b}) \end{array} \right\}$$

hat die k-Hin-und-Her-Eigenschaft, ist aber möglicherweise leer.

4.24 Theorem. *Sei σ eine endliche relationale Signatur, $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ σ-Strukturen, $\vec{a} \in (A \cup \{*\})^k, \vec{b} \in (B \cup \{*\})^k$ mit $\text{Tr}(\vec{a}) = \text{Tr}(\vec{b})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *Duplicator hat eine Gewinnstrategie im k-Pebble-Spiel $\mathcal{G}^k_\infty(\mathfrak{A}, \vec{a}, \mathfrak{B}, \vec{b})$.*, kurz: $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \approx^k_\infty (\mathfrak{B}, \vec{b})$.

~~(b) $(\vec{a} \mapsto \vec{b}) \in W^k_\infty(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ und $W^k_\infty : \mathfrak{A} \cong^k_{part} \mathfrak{B}$.~~

~~(c) Es gibt ein k-Hin-und-Her-System $I : \mathfrak{A} \cong^k_{part} \mathfrak{B}$ mit $(\vec{a} \mapsto \vec{b}) \in I$.~~

(b) *$\vec{a}$ in $\mathfrak{A}$ und $\vec{b}$ in $\mathfrak{B}$ erfüllen dieselben $L^k_{\infty\omega}[\sigma]$-Formeln*, d.h.: $(\mathfrak{A}, \vec{a}) \equiv_{L^k_{\infty\omega}} (\mathfrak{B}, \vec{b})$.

Beweis: Übung.

Beispiel 4.25

Aus Theorem 4.24 und Beispiel 4.23(a) folgt direkt für $\sigma = \emptyset$, $k \geq 1$ und beliebige σ-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ mit $|A|, |B| \geq k$, dass $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ dieselben $L^k_{\infty\omega}[\sigma]$-Sätze erfüllen.

Analog zu Lemma 4.7 können wir unter Verwendung des k-Pebble-Spiels Folgendes zeigen:

Lemma 4.26

Sei $k \geq 1$ und seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei ungerichtete Graphen, die das Erweiterungsaxiom $EA_{\ell,m}$ für alle $\ell \geq 1$ und $m \geq 0$ mit $m \leq \ell < k$ erfüllen. Dann gilt $\mathfrak{A} \equiv_{L^k_{\infty\omega}} \mathfrak{B}$, d.h. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erfüllen genau die gleichen $L^k_{\infty\omega}[E]$-Sätze.

Beweis: Übung.

Indem man im Beweis von Theorem 4.8 ("0-1-Gesetz für FO bzgl UG") Lemma 4.26 an Stelle von Lemma 4.7 verwendet, erhält man:

Theorem 4.27 (Kolaitis und Vardi, 1990)

$L^{\omega}_{\infty\omega}$ besitzt das 0-1-Gesetz bzgl. der Klasse UG aller ungerichteten Graphen

Beweis: (fast wörtlich übernommener Beweis von Theorem 4.8)

Sei φ ein $L^{\omega}_{\infty\omega}[E]$-Satz und sei $k \in \mathbb{N}$ die Anzahl der in φ vorkommenden Variablen. (OBdA ist $k \neq 0$).

Sei $\mathcal{E} := \{ EA_{\ell m} : \ell \geq 1,\ m \geq 0,\ m \leq \ell < k \}$

klar: $\mathcal{E}$ ist endlich.

Setze $\eta := \bigwedge\limits_{\psi \in \mathcal{E}} \psi$.

Wir wissen aus Behauptung (*) des Beweises von Theorem 4.8, dass gilt:

$$\mu(\eta \mid UG) = 1.$$

<u>Fall 1:</u> Es gibt ein $G \in \mathcal{UG}$ mit $G \models \eta$ und $G \models \varphi$.

Dann gilt für jedes $G' \in \mathcal{UG}$ mit $G' \models \eta$, dass $G' \models \varphi$ (dies folgt direkt aus Lemma 4.26, da φ ein $L^k_{\infty\omega}[E]$-Satz ist).

Somit gilt f.a. $n \geq 1$:

$$\mu_n(\varphi \mid \mathcal{UG}) \geq \mu_n(\eta \mid \mathcal{UG}) \xrightarrow[n \to \infty]{\text{Beh} \circledast} 1.$$

D.h. $\mu(\varphi \mid \mathcal{UG}) = 1$.

<u>Fall 2:</u> Für alle $G \in \mathcal{UG}$ mit $G \models \eta$ gilt: $G \not\models \varphi$, d.h. $G \models \neg\varphi$.

Dann gilt offensichtlicherweise für alle $n \geq 1$:

$$\mu_n(\neg\varphi \mid \mathcal{UG}) \geq \mu_n(\eta \mid \mathcal{UG}) \xrightarrow[n \to \infty]{\text{Beh} \circledast} 1.$$

D.h. $\mu(\neg\varphi \mid \mathcal{UG}) = 1$, und somit $\mu(\varphi \mid \mathcal{UG}) = 0$.

$\square$

Genauso lässt sich auch Folgendes analog zu Theorem 4.9 zeigen:

Theorem 4.28 (Kolaitis und Vardi, 1990)

Für jede endliche relationale Signatur σ gilt: $L^{\omega}_{\infty\omega}$ besitzt das 0-1-Gesetz bzgl. der Klasse $ALL(\sigma)$ aller σ-Strukturen.

Folgerung 4.29

In Beispiel 4.1 hatten wir gezeigt, dass

$\mu(EVEN \mid ALL)$ = undefiniert und

$\mu(PARITY \mid ALL) = \frac{1}{2}$

ist.

Aus Theorem 4.28 folgt daher, dass

EVEN <u>nicht</u> $L^{\omega}_{\infty\omega}$-definierbar in ALL ist

und dass

PARITY <u>nicht</u> $L^{\omega}_{\infty\omega}$-definierbar in ALL ist.

Es ist bekannt (hier ohne Beweis),

dass

$$\mu(\text{HAMILTONKREIS} \mid UG) = 1$$

D.h. unter Verwendung des 0-1-Gesetzes für $L^{\omega}_{\infty\omega}$ bzgl UG lässt sich nicht zeigen, dass es keinen $L^{\omega}_{\infty\omega}[E]$-Satz gibt, der in genau denjenigen Graphen gilt, die einen Hamiltonkreis besitzen. Unter Verwendung des Pebble-Spiels lässt sich dies allerdings nachweisen:

Satz 4.30 (de Rougemont, 1987)

HAMILTONKREIS ist nicht $L^{\omega}_{\infty\omega}$-definierbar in der Klasse aller endlichen ungerichteten Graphen

Beweis:

Angenommen, HAMILTONKREIS wäre durch einen $L^{k}_{\infty\omega}[E]$-Satz definierbar, für eine Zahl $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

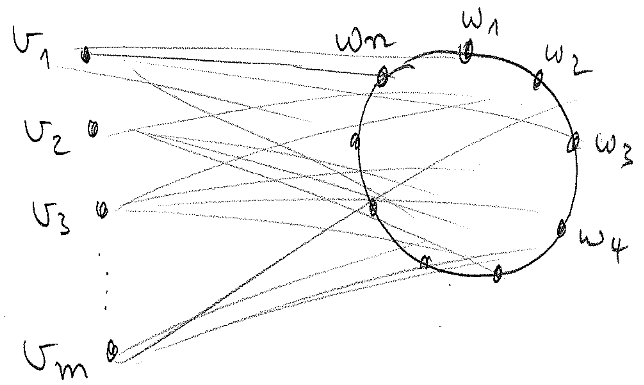
<u>Ziel:</u> Finde ungerichtete Graphen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, für die gilt:

- $\mathfrak{A}$ besitzt einen Hamiltonkreis,
- $\mathfrak{B}$ nicht, und
- Duplicator hat eine Gewinnstrategie im k-Pebble-Spiel auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$

<u>Beachte:</u> Mit Theorem 4.24 folgt dann, dass $\mathfrak{A} \equiv_{L^k_{\infty\omega}} \mathfrak{B}$, und wir sind fertig.

<u>Idee zur Wahl von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$:</u>

Für $m, n \geq 1$ betrachte den Graphen $G_{m,n}$:



Jedes v_i ist mit jedem w_j durch eine Kante verbunden

<u>Behauptung 1:</u>
$G_{m,n}$ besitzt einen Hamiltonkreis $\iff m \leq n$

<u>Beweis:</u> Übung.

Wähle $\mathfrak{A} := G_{k,k}$

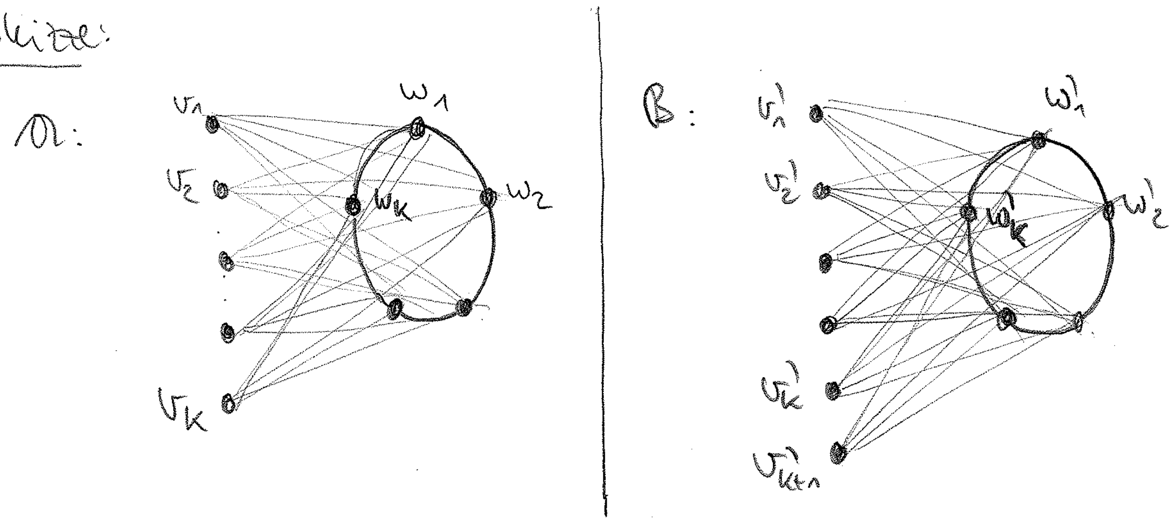
und $\mathfrak{B} := G_{k+1,k}$

Gemäß Behauptung 1 gilt: $\mathfrak{A}$ besitzt einen Hamiltonkreis; $\mathfrak{B}$ nicht. Mit der folgenden Behauptung 2 erreichen wir also unser Ziel.

<u>Behauptung 2:</u>
Duplicator hat eine Gewinnstrategie im k-Pebble-Spiel auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$

<u>Beweis:</u>

<u>Skizze:</u>



<u>Idee:</u>
- Auf den beiden (isomorphen) Kreisen spielt Duplicator gemäß dem Isomorphismus (dh: antwortet mit w'_j, falls Spoiler w_j wählt)
- Auf den "isolierten" Knoten $v_1, \dots, v_k$ bzw $v'_1, \dots, v'_{k+1}$ spielt Duplicator gemäß der Strategie auf Mengen (dh Strukturen über der leeren Signatur $\sigma = \emptyset$).

<u>Details:</u> Übung. $\square$

4.4 Der Rado-Graph

Richard Rado (1906-1989): dt-britischer Mathematiker

Definition 4.31

Der Rado-Graph (auch: Zufallsgraph, Erdös-Rényi-Graph) ist der unendliche, ungerichtete Graph $RG = (V^{RG}, E^{RG})$ mit Knotenmenge $V^{RG} = \mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$, so dass f.a. $i,j \in \mathbb{N}$ gilt: es gibt eine Kante zwischen Knoten i und Knoten j $\iff$ das i-te Bit der Binärrepräsentation von j ist 1, dh $\left\lfloor \frac{j}{2^i} \right\rfloor$ ist ungerade

(wobei für $r \in \mathbb{R}$ gilt: $\lfloor r \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq r\}$)

Bemerkung 4.32 Der Rado-Graph wird auch Zufallsgraph genannt, da man zeigen kann, dass die folgende randomisierte Konstruktion mit Wahrscheinlichkeit 1 einen zum Rado-Graphen isomorphen Graphen liefert: Die Knotenmenge sei $\mathbb{N}$, und für alle

$i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$ wird unabhängig mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ entschieden, ob es eine Kante zwischen i und j gibt.

Beobachtung 4.33

Der Rado-Graph erfüllt die Erweiterungsaxiome $EA_{\ell,m}$ für alle $\ell \geq 1$, $m \geq 0$ mit $m \leq \ell$.

Beweis: zu zeigen: $RG \models EA_{\ell,m}$.

Seien $x_1, \dots, x_\ell$ ℓ paarweise verschiedene Elemente in $V^{RG} = \mathbb{N}$.

Sei $S := \{x_1, \dots, x_\ell\}$, $T := \{x_1, \dots, x_m\}$ und $T' := S \setminus T = \{x_{m+1}, \dots, x_\ell\}$.

Wir suchen ein $z \in \mathbb{N}$, s.d. gilt:

- das x_i-te Bit von z ist 1, f.a. $x_i \in T$
- das x_i-te Bit von z ist 0, f.a. $x_i \in T'$
- $z \notin T \cup T' = \{x_1, \dots, x_\ell\}$.

Dann können wir z.B. wählen:

$$z := \sum_{x_i \in T} 2^{x_i} + 2^{max+1}$$

wobei $max := \max\{x_1, \dots, x_\ell\}$.

$\square$

Theorem 4.34

Jeder abzählbar unendliche, ungerichtete Graph G, der alle Erweiterungsaxiome $EA_{\ell,m}$ für $\ell \geq 1$, $m \geq 0$ mit $\ell \leq m$ erfüllt, ist isomorph zum Rado-Graphen.

Beweis: Das Theorem folgt direkt aus den beiden folgenden Behauptungen

Behauptung 1: Sei G ein ungerichteter Graph mit $G \models EA_{\ell,m}$ f.a. $\ell \geq 1$, $m \geq 0$ mit $\ell \leq m$.
Dann hat Duplicator eine Gewinnstrategie im ω-Runden EF-Spiel auf G und RG (kurz: $G \equiv_\omega RG$), d.h. Duplicator kann beliebig viele Runden des EF-Spiels auf G, RG so spielen, dass nach jeder Runde $i \in \mathbb{N}$ die in den ersten i Runden gewählten Knoten $a_1, \dots, a_i$ und $b_1, \dots, b_i$ einen partiellen Isomorphismus von G auf RG liefern.

Beweis:
Genau wie im Beweis von Lemma 3.7 liefern die Erweiterungsaxiome eine Gewinnstrategie für Duplicator.
Details: Übung.

$\square$ Beh 1

Behauptung 2

Sei σ eine relationale Signatur und seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei abzählbar unendliche σ-Strukturen mit $\mathfrak{A} \equiv_\omega \mathfrak{B}$.

Dann sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ isomorph.

Beweis:

Sei $(c_j)_{j\geq 1}$ eine Aufzählung aller Elemente in A, und sei $(d_j)_{j\geq 1}$ eine Aufzählung aller Elemente in B.

Wir lassen Spoiler das ω-Runden EF-Spiel auf $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ wie folgt spielen:

- In Runde 1 wählt Spoiler $a_1 := c_1$
- In jeder ungeraden Runde $i\geq 3$ wählt Spoiler als a_i dasjenige Element $c_j \in A \setminus \{a_1, \dots, a_{i-1}\}$ mit minimalem Index j
- In jeder geraden Runde $i \geq 2$ wählt Spoiler als b_i dasjenige Element $d_j \in B \setminus \{b_1, \dots, b_{i-1}\}$ mit minimalem Index j.

Wenn Duplicator gemäß seiner Gewinnstrategie im ω-Runden EF-Spiel auf $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ antwortet, dann gilt für die Abbildung π mit

$$\pi(a_i) = b_i \quad \text{f.a. } i \in \mathbb{N}_{\geq 1}:$$

- π ist eine Bijektion von A auf B, und
- f.a. $R \in \sigma$, für $r := ar(R)$, und f.a. $x_1, \ldots, x_r \in A$ gilt:

$$(x_1, \ldots, x_r) \in R^{\mathfrak{A}} \iff (\pi(x_1), \ldots, \pi(x_r)) \in R^{\mathfrak{B}}.$$

Somit ist π ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$.

$\square_{\text{Beh 2}}$

$\square_{\text{Theorem 3.14}}$

Definition 4.35

Sei $EA := \{ EA_{\ell,m} : \ell \geq 1, m \geq 0, m \leq \ell \}$

Satz 4.36

Für jeden $FO[E]$-Satz φ gilt:

$EA \models \varphi$ oder $EA \models \neg\varphi$.

<u>Beweis:</u>

Angenommen, φ ist ein $FO[E]$-Satz, für den gilt:

$EA \not\models \varphi$ und $EA \not\models \neg\varphi$.

Dann ist sowohl $EA \cup \{\neg\varphi\}$ als auch $EA \cup \{\varphi\}$ erfüllbar.

Gemäß <u>Satz von Löwenheim und Skolem</u> (vgl. Satz 4.36 der Vorlesung "Logik in der Informatik" im WS 17/18 an der HU Berlin) besitzt jede erfüllbare Menge $\Phi \subseteq FO[\sigma]$ für eine höchstens abzählbare Signatur σ ein höchstens abzählbares Modell.

Somit gibt es höchstens abzählbare $\{E\}$-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ mit $\mathcal{A} \models EA \cup \{\neg\varphi\}$ und $\mathcal{B} \models EA \cup \{\varphi\}$. Und aus der Definition von EA folgt, dass A und B unendlich sind und dass $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ungerichtete Graphen G_A und G_B repräsentieren, mit $G_A \models EA$, $G_B \models EA$, $G_A \models \neg\varphi$, $G_B \models \varphi$.

Gemäß Theorem 4.34 ist $G_A \cong RG$ und $G_B \cong RG$.

Somit gilt: $RG \models \varphi$ und $RG \models \neg\varphi$ $\lightning$ Widerspruch.

$\square$

Definition 4.37

Die Theorie des Rado-Graphen Th(RG) ist wie folgt definiert:

$$\mathrm{Th}(RG) := \{ \varphi : \varphi \text{ ist ein } FO[E]\text{-Satz mit } RG \models \varphi \}$$

Aus Beobachtung 4.33 und Satz 4.46 folgt direkt:

Folgerung 4.38

Th(RG) wird von EA axiomatisiert, d.h. es gilt:

$$\mathrm{Th}(RG) = \{ \varphi : \varphi \text{ ist ein } FO[E]\text{-Satz mit } EA \models \varphi \}$$

Satz 4.39

Th(RG) ist entscheidbar,
d.h. es gibt einen Algorithmus, der bei Eingabe eines FO[E]-Satzes φ nach endlich vielen Schritten anhält und entscheidet, ob $RG \models \varphi$ oder $RG \not\models \varphi$.

Beweis:

Wir nutzen folgende Begriffe der mathematischen Logik:
Sei σ eine endliche Signatur.

- Eine Theorie T ist eine Menge von $FO[\sigma]$-Sätzen, für die gilt:

  Für jeden $FO[\sigma]$-Satz φ mit $T \models \varphi$ ist $\varphi \in T$.

- Eine Theorie T heißt vollständig, wenn für jeden $FO[\sigma]$-Satz φ gilt: $\varphi \in T$ oder $\neg\varphi \in T$

(*) Insbes. ist für jede σ-Struktur $\mathfrak{A}$
$Th(\mathfrak{A}) := \{ \varphi : \varphi$ ist ein $FO[\sigma]$-Satz mit $\mathfrak{A} \models \varphi \}$
eine vollständige Theorie.

- Sei T eine Theorie, sei Φ eine Menge von $FO[\sigma]$-Sätzen.
  T wird von Φ axiomatisiert, falls gilt:

  $$T = \{ \varphi : \varphi \text{ ist ein } FO[\sigma]\text{-Satz mit } \Phi \models \varphi \}.$$

- Eine Menge Φ von $FO[\sigma]$-Sätzen heißt entscheidbar, wenn es einen Algorithmus gibt, der bei Eingabe eines $FO[\sigma]$-Satzes φ entscheidet, ob $\varphi \in \Phi$ ist

- Eine Theorie T heißt effektiv axiomatisierbar, wenn T von einer entscheidbaren Menge Φ von $FO[\sigma]$-Sätzen axiomatisiert wird.

Lemma 4.39 Jede vollständige, effektiv axiomatisierbare Theorie ist entscheidbar.

Beweis: Übung (unter Verwendung des Vollständigkeitssatzes der Logik erster Stufe). □

Da $Th(RG)$ vollständig ist (wegen (*)), durch EA axiomatisiert wird (wegen Folgerung 4.38) und EA offensichtlicherweise entscheidbar ist, folgt aus dem Lemma, dass $Th(RG)$ entscheidbar ist.
□

Satz 4.40

(a) Für jeden FO[E]-Satz φ gilt:

$$RG \models \varphi \iff \mu(\varphi \mid UG) = 1$$

(b) Es gibt einen Algorithmus, der bei Eingabe eines FO[E]-Satzes φ entscheidet, ob $\mu(\varphi \mid UG) = 1$ ist.

Beweis:

(a) "$\Longrightarrow$": Es gelte $RG \models \varphi$.

Wegen $RG \models EA$ und Satz 4.36 gilt $EA \models \varphi$.

Gemäß Endlichkeitssatz (vgl. Satz 4.28 in der Vorlesung "Logik in der Informatik" im WS17/18 an der HU Berlin) gibt es eine endliche Menge $\Gamma \subseteq EA$ mit $\Gamma \models \varphi$.

Sei $\eta := \bigwedge_{\gamma \in \Gamma} \gamma$. Beachte: $\Gamma \models \varphi$ bedeutet, dass $\eta \models \varphi$.

Aus Korollar 4.5 (a) ("$\mu(EA_{e,m} \mid UG) = 1$") folgt direkt, dass $\mu(\eta \mid UG) = 1$

Wegen $\eta \models \varphi$, folgt: $\mu(\varphi \mid UG) = 1$ ✓

"$\Leftarrow$" Es gelte $RG \not\models \varphi$

D.h. $RG \models \neg\varphi$. Gemäß "$\Rightarrow$" gilt dann

$\mu(\neg\varphi \,|\, \mathbb{U}G) = 1$, d.h. $\mu(\varphi \,|\, \mathbb{U}G) = 0$. ✓

(b) Folgt direkt aus (a) und Satz 4.39

$\square$

Bemerkung 4.41:

Satz 4.40 (b) besagt:

Es ist entscheidbar, ob ein gegebener FO[E]-Satz φ in fast allen endlichen ungerichteten Graphen gilt.

Zum Vergleich dazu beachte, dass aus dem Satz von Trakhtenbrot folgt:

Es ist nicht entscheidbar, ob ein gegebener FO[E]-Satz φ in allen endlichen ungerichteten Graphen gilt.

(tatsächlich ist dieses Problem nicht einmal semi-entscheidbar).