3.6 Der Satz von Hanf

Der Satz von Hanf liefert ein hinreichendes Kriterium für die m-Äquivalenz zweier Strukturen, so dass man durch eine einfache Anwendung dieses Satzes leicht zeigen kann, dass $(\mathfrak{A}, \bar{a}) \approx_m (\mathfrak{B}, \bar{b})$, ohne dabei explizit eine Gewinnstrategie für Duplicator im m-Runden EF-Spiel konstruieren zu müssen.

Bevor wir die exakte Formulierung des Satzes von Hanf angeben können, benötigen wir noch ein paar Notationen.

<u>Definition 3.30</u> (Gaifman-Graph, Distanzfunktion, Nachbarschaft)

Sei σ eine relationale Signatur und sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Struktur.

<u>(a)</u> Der <u>Gaifman-Graph</u> $\mathcal{G}(\mathfrak{A})$ von $\mathfrak{A}$ ist der ungerichtete Graph mit Knotenmenge $V^{\mathcal{G}(\mathfrak{A})} := A$ und Kantenmenge
$$E^{\mathcal{G}(\mathfrak{A})} := \left\{ \{u,v\} : \begin{array}{l} u \neq v \text{ und es gibt ein } R \in \sigma \\ \text{und ein Tupel } (a_1, \dots, a_r) \in R^{\mathfrak{A}} \\ \text{s.d. } u, v \in \{a_1, \dots, a_r\} \end{array} \right\}$$

(b) Die <u>Distanzfunktion</u> $Dist^{\mathfrak{A}} : A \times A \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ist definiert durch

$$Dist^{\mathfrak{A}}(u,v) := \begin{cases} 0 & \text{falls } u = v \\ \infty & \text{falls } u \neq v \text{ und es in } G(\mathfrak{A}) \\ & \text{keinen Pfad von } u \text{ nach } v \text{ gibt} \\ \min\left\{ \ell \in \mathbb{N} : \begin{array}{l} \text{es gibt in } G(\mathfrak{A}) \text{ einen} \\ \text{Pfad der Länge } \ell \text{ von} \\ u \text{ nach } v \end{array} \right\}, & \text{sonst} \end{cases}$$

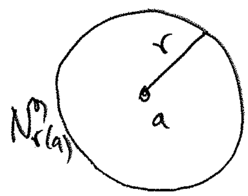
Ist $u \in A$ und $U \subseteq A$, so setzen wir

$$Dist^{\mathfrak{A}}(u,U) := \min\{ Dist^{\mathfrak{A}}(u,v) : v \in U \}$$

(c) Für ein $a \in A$ und eine Zahl $r \in \mathbb{N}$ ist die <u>r-Umgebung</u> (oder: <u>r-Nachbarschaft</u>) von a die Menge

$$N_r^{\mathfrak{A}}(a) := \{ a' \in A : Dist^{\mathfrak{A}}(a,a') \leq r \}$$

Skizze:



Ist $U \subseteq A$, so setzen wir

$$N_r^{\mathfrak{A}}(U) := \{ a' \in A : Dist^{\mathfrak{A}}(a',U) \leq r \} = \bigcup_{u \in U} N_r^{\mathfrak{A}}(u)$$

Ist $U = \{a_1, \ldots, a_k\}$, so schreiben wir auch $N_r^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k)$ an Stelle von $N_r^{\mathfrak{A}}(U)$.

(d) Ist $U \subseteq A$, so schreiben wir $\mathfrak{A}|_U$ für die durch die Menge U <u>induzierte Substruktur</u> von $\mathfrak{A}$, d.h.

$$\mathfrak{A}|_U := \left(U, \ \left(R^{\mathfrak{A}} \cap U^{ar(R)} \right)_{R \in \sigma} \right)$$

(e) • Ist $\bar{a} = a_1, \dots, a_k \in A$ für $k \geq 1$, so ist

$$\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) := \mathfrak{A}|_{N_r^{\mathfrak{A}}(\bar{a})}$$

die <u>r-Nachbarschaft</u> von $\bar{a}$ in $\mathfrak{A}$.

• Für $k=0$ und das leere Tupel $\bar{a}$ ist $\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) := \emptyset$.

<u>Notation:</u>

Für σ-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ und Elemente $\bar{a} = a_1, \dots, a_k \in A$ und $\bar{b} = b_1, \dots, b_k \in B$ (für $k \geq 0$) schreiben wir

$$\pi : (\mathfrak{A}, \bar{a}) \cong (\mathfrak{B}, \bar{b})$$

um auszudrücken, dass π ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ ist mit $\pi(a_i) = b_i$ f.a. $i \in \{1, \dots, k\}$.

<u>Definition 3.31</u> (r-Umgebungstyp)

Sei σ eine relationale Signatur, $\mathfrak{A}$ eine σ-Struktur, $a \in A$. Sei $r \in \mathbb{N}$.

(a) Der r-Umgebungstyp von a in $\mathfrak{A}$ ist

$$\left(\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(a), \ a \right).$$

(b) Ist ϱ ein r-Umgebungstyp, so bezeichnet

$$\#_{\varrho}(\mathfrak{A}) := \left| \{ \vec{a} \in A : (\mathcal{N}_r^{\mathfrak{A}}(\vec{a}), \vec{a}) \cong \varrho \} \right|$$

die Anzahl der Elemente in A, deren r-Umgebungstyp isomorph zu ϱ ist.

Satz 3.32 (Satz von Hanf, 1965)

Sei σ eine relationale Signatur,
seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ σ-Strukturen,
sei $k \in \mathbb{N}$ und sei $\overline{a} = a_1, \dots, a_k \in A$ und
$\overline{b} = b_1, \dots, b_k \in B$. Sei $m \in \mathbb{N}$. Falls gilt:

(1) es gibt eine Zahl $e \geq 1$, so dass jede 3^m-Umgebung eines Elements in $\mathfrak{A}$ bzw $\mathfrak{B}$ höchstens e Elemente besitzt und

(2) für jeden 3^m-Umgebungstyp ρ ist
$\#_\rho(\mathfrak{A}) = \#_\rho(\mathfrak{B})$ oder $\#_\rho(\mathfrak{A}), \#_\rho(\mathfrak{B}) \geq (m+k)\cdot e$
und

(3) $k = 0$ oder $\left(\mathcal{N}^{\mathfrak{A}}_{3^m}(\overline{a}), \overline{a}\right) \cong \left(\mathcal{N}^{\mathfrak{B}}_{3^m}(\overline{b}), \overline{b}\right)$,

so ist $(\mathfrak{A}, \overline{a}) \approx_m (\mathfrak{B}, \overline{b})$.

Beachte:

Falls $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ endlich sind, kann man Bedingung (1) z.B. dadurch erfüllen, dass man $e := \max\{|A|, |B|\}$ wählt.

Beweis:

Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, k, $\bar{a}$, $\bar{b}$, m gegeben, die die Voraussetzungen des Satzes erfüllen.

Um zu zeigen, dass $(\mathfrak{A},\bar{a}) \simeq_m (\mathfrak{B},\bar{b})$ gilt, zeigen wir, dass Duplicator im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathfrak{A},\bar{a})$ und $(\mathfrak{B},\bar{b})$ so spielen kann, dass für jedes $i \in \{0,1,\dots,m\}$ gilt:

$(*)_i$: Sind $a_{k+1},\dots,a_{k+i}$ bzw. $b_{k+1},\dots,b_{k+i}$ die in den ersten i Runden gewählten Elemente in A und B, so gilt:

$$\left(\mathcal{N}_{r_i}^{\mathfrak{A}}(a_1,\dots,a_{k+i}),\ a_1,\dots,a_{k+i}\right) \cong \left(\mathcal{N}_{r_i}^{\mathfrak{B}}(b_1,\dots,b_{k+i}),\ b_1,\dots,b_{k+i}\right)$$

Für $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ sind die Zahlen $r_i \in \mathbb{N}$ dabei so gewählt, dass gilt: $r_m = 0$ und für alle $i < m$ ist $r_i = 3 r_{i+1} + 1$

(Einfaches Nachrechnen zeigt, dass $r_i = \frac{3^{m-i} - 1}{2}$.

Insbes ist $r_0 = \frac{3^m - 1}{2} \leq 3^m$).

Per Induktion nach i zeigen wir, dass Dupl. so spielen kann, dass nach Runde i die Bedingung $(*)_i$ erfüllt ist.

$\underline{i=0}$: Falls $k=0$,
so sagt $(*)_0$ nichts aus.
Falls $k \geq 1$, so ist $(*)_0$
gemäß Voraussetzung $\underline{(3)}$ erfüllt (beachte, dass $r_0 \leq 3^m$).

$\underline{i \to i+1}$: Gemäß Induktionsannahme ist $(*)_i$ nach Runde i erfüllt.
Wir müssen zeigen, dass Duplicator in Runde $i+1$ so spielen kann, dass $(*)_{i+1}$ nach Runde $i+1$ erfüllt ist.

Wir betrachten hier nur den Fall, dass Spoiler in Runde $i+1$ ein Element a_{k+i+1} in A wählt.
(Der Fall, dass Sp. ein b_{k+i+1} in B wählt, kann analog, durch Vertauschen der Rollen von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ behandelt werden.)

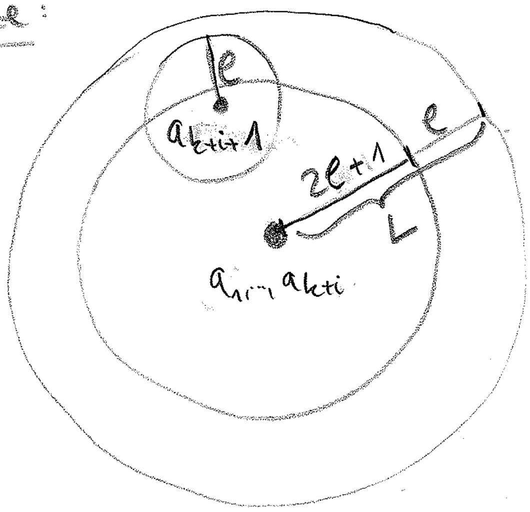
Sei $\ell := r_{i+1}$ und $L := r_i$. Gemäß der Wahl der r_i gilt: $L = 3\ell + 1$. Gemäß $(*)_i$ gibt es einen Isomorphismus

$$\boxed{\pi : \left(\mathcal{N}_L^{\mathfrak{A}}(a_1,\dots,a_{k+i}),\ a_1,\dots,a_{k+i}\right) \cong \left(\mathcal{N}_L^{\mathfrak{B}}(b_1,\dots,b_{k+i}),\ b_1,\dots,b_{k+i}\right)} \qquad (*)$$

Sei $a_{k+i+1} \in A$ das von Sp. in Runde $i+1$ gewählte Element.

<u>Fall 1:</u> $a_{k+i+1} \in N_{2\ell+1}^{\mathfrak{A}}(a_1,\dots,a_{k+i})$

<u>Skizze:</u>



Es gilt: $N_\ell^{\mathfrak{A}}(a_{k+i+1}) \subseteq N_L^{\mathfrak{A}}(a_1,\dots,a_{k+i})$, und

daher $N_\ell^{\mathfrak{A}}(a_1,\dots,a_{k+i+1}) \subseteq N_L^{\mathfrak{A}}(a_1,\dots,a_{k+i})$

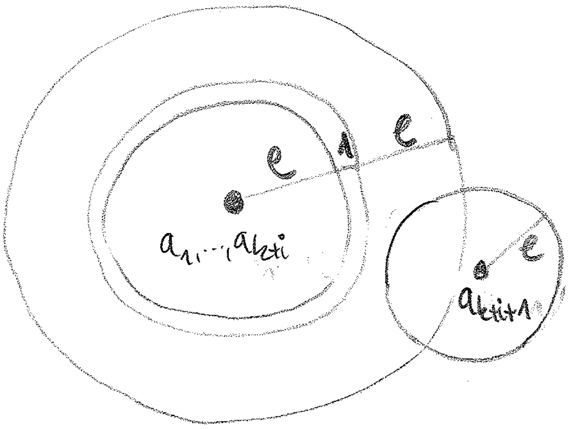
Für $b_{k+i+1} := \pi(a_{k+i+1})$ folgt daher aus $(*)$, dass

$$\left(\mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{A}}(a_1,\dots,a_{k+i+1}),\ a_1,\dots,a_{k+i+1}\right) \cong \left(\mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{B}}(b_1,\dots,b_{k+i+1}),\ b_1,\dots,b_{k+i+1}\right)$$

und somit ist $(*)_{i+1}$ erfüllt, wenn Dupl. in Runde $i+1$ das Element b_{k+i+1} wählt.

Fall 2: $a_{k+i+1} \notin N_{2e+1}^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_{k+i})$

Skizze:



Es gilt: $Dist^{\mathfrak{A}}(a_{k+i+1}, \{a_1, \dots, a_{k+i}\}) > 2e+1$, d.h.

$N_e^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_{k+i}) \cap N_e^{\mathfrak{A}}(a_{k+i+1}) = \emptyset$ und

kein Tupel einer Relation in $\mathfrak{A}$ enthält sowohl Elemente aus $N_e^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_{k+i})$ als auch Elemente aus $N_e^{\mathfrak{A}}(a_{k+i+1})$.

Somit ist $\mathcal{N}_e^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_{k+i+1})$ die disjunkte Vereinigung der beiden Strukturen $\mathcal{N}_e^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_{k+i})$ und $\mathcal{N}_e^{\mathfrak{A}}(a_{k+i+1})$

Um $(*)_{i+1}$ zu gewährleisten, genügt es daher, ein $b_{k+i+1} \in B$ zu finden, für das gilt:

(I) $(\mathcal{N}_e^{\mathfrak{B}}(b_{k+i+1}), b_{k+i+1}) \cong (N_e^{\mathfrak{A}}(a_{k+i+1}), a_{k+i+1})$ und

(II) $b_{k+i+1} \notin N_{2e+1}^{\mathfrak{B}}(b_1, \dots, b_{k+i})$

Beachte: Dann gilt nämlich: $(\mathcal{N}_e^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_{k+i+1}), a_1, \dots, a_{k+i+1}) \cong (\mathcal{N}_e^{\mathfrak{B}}(b_1, \dots, b_{k+i+1}), b_1, \dots, b_{k+i+1})$.

Sei ρ der ℓ-Umgebungstyp von a_{k+i+1} in $\mathfrak{A}$, d.h.

$\rho := \left(\mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{A}}(a_{k+i+1}) \, , \, a_{k+i+1} \right)$

Man sieht leicht, dass aus Voraussetzung (2) wegen $\ell \leq 3^m$ folgt:

$$(1): \quad \boxed{\#_\rho(\mathfrak{A}) = \#_\rho(\mathfrak{B}) \quad \text{oder} \quad \#_\rho(\mathfrak{A}), \#_\rho(\mathfrak{B}) \geq (k+m)\cdot e}$$

Aus $(*)_i$ und $L = 3\ell+1$ und Voraussetzung (1) folgt außerdem:

$$(2): \quad \boxed{\begin{aligned} & \left| \left\{ a' \in N_{2\ell+1}^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_{k+i}) \; : \; \left(\mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{A}}(a'), a'\right) \cong \rho \right\} \right| \\ \underset{(*)_i}{=} \; & \left| \left\{ b' \in N_{2\ell+1}^{\mathfrak{B}}(b_1, \dots, b_{k+i}) \; : \; \left(\mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{B}}(b'), b'\right) \cong \rho \right\} \right| \\ \underset{(1)}{\leq} \; & (k+m-1)\cdot e \end{aligned}}$$

Aus (1) und (2) folgt für

$$z := \left| \left\{ b' \in B \; : \; b' \notin N_{2\ell+1}^{\mathfrak{B}}(b_1, \dots, b_{k+i}) \text{ und } \left(\mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{B}}(b'), b'\right) \cong \rho \right\} \right|,$$

dass

$$z = \left| \left\{ a' \in A : a' \notin N_{2\ell+1}^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_{k+i}) \text{ und } \left(\mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{A}}(a'), a'\right) \cong \rho \right\} \right|$$

$$\geq 1 \quad \left(\text{da } a_{k+i+1} \notin N_{2\ell+1}^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_{k+i}) \text{ und } \left(\mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{A}}(a_{k+i+1}), a_{k+i+1}\right) \cong \rho \right)$$

<u>oder</u>

$$z \geq (k+m)\cdot e - (k+m-1)\cdot e = e \geq 1$$

Wegen $z \geq 1$ kann Dupl. also ein $b_{k+i+1} \in B$ finden mit
$\left(\mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{B}}(b_{k+i+1}), b_{k+i+1}\right) \cong \left(\mathcal{N}_\ell^{\mathfrak{A}}(a_{k+i+1}), a_{k+i+1}\right)$ und $b_{k+i+1} \notin N_{2\ell+1}^{\mathfrak{B}}(b_1, \dots, b_{k+i})$.

Die Bedingung $(*)_{i+1}$ ist dann nach Runde $i+1$ erfüllt.

Für $i=m$ gilt insbes nach Runde m, dass (beachte: $r_m = 0$)

$$\left(\mathcal{N}_0^{\mathfrak{A}}(a_1,\dots,a_{k+m}),\, a_1,\dots,a_{k+m}\right) \cong \left(\mathcal{N}_0^{\mathfrak{B}}(b_1,\dots,b_{k+m}),\, b_1,\dots,b_{k+m}\right)$$

d.h. Duplicator hat die Partie gewonnen.

$\square$ Satz von Hanf

Die Hanf-Lokalität der Logik erster Stufe:

Der Satz von Hanf liefert ein hinreichendes Kriterium, mit dem man leicht zeigen kann, dass zwei Strukturen m-äquivalent sind.
Der Satz von Hanf besagt, dass alle FO-Sätze der Quantorentiefe m in dem Sinne "lokal" sind, dass sie nur über Umgebungen vom Radius 3^m "sprechen können".
Im Folgenden wird diese Lokalität der Logik erster Stufe etwas genauer dargestellt.

Definition 3.33 (Hanf-Lokalität)

Sei σ eine relationale Signatur. (d.h. σ enthält keine Funktions- und keine Konstantensymbole)

(a) Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ endliche σ-Strukturen und sei $r \in \mathbb{N}$.
$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen r-bijektiv, kurz: $\mathfrak{A} \leftrightarrows_r \mathfrak{B}$, falls für jeden r-Umgebungstyp ρ gilt: $\#_\rho(\mathfrak{A}) = \#_\rho(\mathfrak{B})$.

(b) Sei S eine Klasse endlicher σ-Strukturen und sei $C \subseteq S$.

C heißt Hanf-lokal in S, falls es eine Zahl $r \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in S$ gilt:

Falls $\mathfrak{A} \rightleftarrows_r \mathfrak{B}$, so $(\mathfrak{A} \in C \iff \mathfrak{B} \in C)$.

Als einfache Folgerung aus dem Satz von Hanf erhält man:

Satz 3.34 (Hanf-Lokalität von FO)

Sei σ eine endliche relationale Signatur und sei S eine Klasse endlicher σ-Strukturen. Dann gilt für jeden FO$[\sigma]$-Satz φ:

$\{\mathfrak{A} \in S : \mathfrak{A} \models \varphi\}$ ist Hanf-lokal in S.

Beweis:

Sei $m := qr(\varphi)$ und sei $r := 3^m$.

Für $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in S$ mit $\mathfrak{A} \rightleftarrows_r \mathfrak{B}$ gilt:

Für jeden 3^m-Umgebungstyp ρ ist $\#_\rho(\mathfrak{A}) = \#_\rho(\mathfrak{B})$.

Somit ist Voraussetzung (2) des Satzes von Hanf erfüllt.

Voraussetzungen (1) und (3) sind erfüllt, da $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ endlich sind und da wir $k=0$ wählen.

Gemäß Satz von Hanf gilt daher: $\mathfrak{A} \approx_m \mathfrak{B}$.

Wegen $m = qr(\varphi)$ gilt: $\mathfrak{A} \models \varphi \iff \mathfrak{B} \models \varphi$ (gemäß Satz von Ehrenfeucht.)

Somit ist $\{\mathfrak{A} \in S : \mathfrak{A} \models \varphi\}$ Hanf-lokal in S. $\square$

Bemerkung 3.35

Indem man zeigt, dass eine Klasse C nicht Hanf-lokal in S ist, kann man (unter Verwendung von Satz 3.34) folgern, dass C nicht FO-definierbar in S ist, d.h. dass es keinen $FO[\sigma]$-Satz φ gibt, s.d. f.a. σ-Strukturen $\mathfrak{A} \in S$ gilt: $\mathfrak{A} \in C \iff \mathfrak{A} \models \varphi$.

Dass C nicht Hanf-lokal in S ist, kann man dadurch zeigen, dass man für jede Zahl $r \in \mathbb{N}$ Strukturen $\mathfrak{A}_r \in C$ und $\mathfrak{B}_r \in S \setminus C$ mit $\mathfrak{A}_r \leftrightarrows_r \mathfrak{B}_r$ angibt.

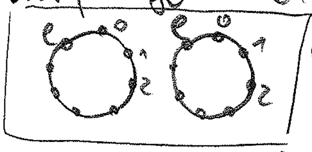
Beispiel 3.36

Die Verwendung der Hanf-Lokalität von FO liefert einen alternativen Beweis dafür, dass Graph-Zusammenhang nicht FO-definierbar ist.

Beweis: Gemäß Bemerkung 3.35 reicht es, zu zeigen, dass die Klasse Conn aller endlichen zusammenhängenden Graphen nicht Hanf-lokal in der Klasse UGraphs aller endlichen ungerichteten Graphen ist.
Wir müssen also für jedes $r \in \mathbb{N}$ einen endlichen zusammenhängenden Graphen $\mathfrak{A}_r$ und einen endlichen nicht-zusammenhängenden Graphen $\mathfrak{B}_r$ finden, so dass $\mathfrak{A}_r \leftrightarrows_r \mathfrak{B}_r$.

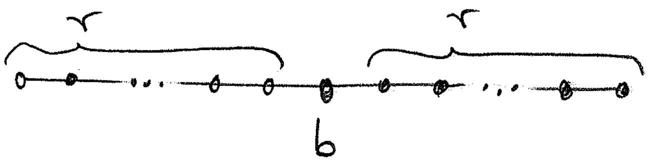
Sei $r \in \mathbb{N}$ beliebig.

Als $\mathfrak{B}_r$ wählen wir einen Graph, der aus zwei disjunkten Kreisen auf je $\ell+1$ Knoten besteht, wobei $\ell \geq 2r+1$ ist.

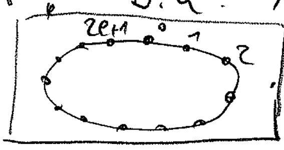


$\mathfrak{B}_r$

Wegen $\ell \geq 2r+1$ sieht jeder r-Umgebungstyp eines Knotens $b \in B_r$ folgendermaßen aus:

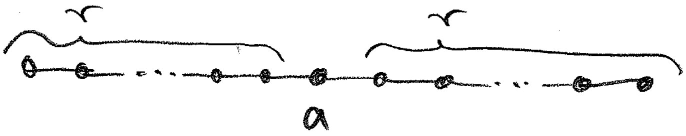
$W_r^{\mathfrak{B}_r}(b)$:


Als Struktur $\mathfrak{A}_r$ wählen wir einen Kreis, der genausoviele Knoten wie $\mathfrak{B}_r$ hat. D.h. $\mathfrak{A}_r$ ist ein Kreis auf $2\ell+2$ Knoten.



$\mathfrak{A}_r$

Jeder r-Umgebungstyp eines Knotens $a \in A_r$ sieht folgendermaßen aus:

$W_r^{\mathfrak{A}_r}(a)$:


D.h.: Für alle $a \in A_r$ und $b \in B_r$ ist $(W_r^{\mathfrak{A}}(a), a) \cong (W_r^{\mathfrak{B}}(b), b)$.

Somit gilt für jeden r-Umgebungstyp ρ: $\#_\rho(\mathfrak{A}_r) = \#_\rho(\mathfrak{B}_r)$, also $\mathfrak{A}_r \leftrightarrows_r \mathfrak{B}_r$.

Wegen $\mathfrak{A}_r \in$ Conn, $\mathfrak{B}_r \in$ UGraphs $\setminus$ Conn ist Conn daher <u>nicht</u> Hanf-lokal in UGraphs, also auch nicht FO-definierbar in UGraphs.

$\square$ Bsp 3.32

Beispiel 3.36)

Es gibt keinen FO[E]-Satz, der von genau denjenigen endlichen ungerichteten Graphen erfüllt wird, die Bäume sind.

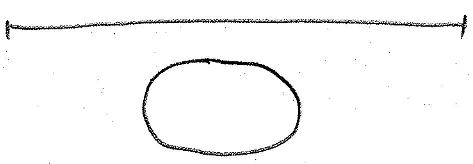
Beweis:

Unter Verwendung der Hanf-Lokalität der Logik erster Stufe genügt es, für jedes $r \in \mathbb{N}$ zwei endliche ungerichtete Graphen $\mathfrak{A}_r$ und $\mathfrak{B}_r$ zu finden, für die gilt:

1) $\mathfrak{A}_r$ ist ein Baum,
2) $\mathfrak{B}_r$ ist kein Baum und
3) $\mathfrak{A}_r \leftrightarrows_r \mathfrak{B}_r$

Idee: Wähle

$\mathfrak{A}_r$:  "ein (sehr) langer Weg"

$\mathfrak{B}_r$:  "ein langer Weg und ein Kreis"

- Länge L des Kreises von $\mathfrak{B}_r$: so, dass die r-Umgebung jedes Elements auf dem Kreis ein Pfad auf $2r+1$ Knoten ist. D.h.: $L \geq 2r+2$
- Länge L' des Weges von $\mathfrak{B}_r$: so, dass die r-Umgebung

keines Knotens den gesamten Weg enthält

- Länge des Weges in $\mathfrak{A}_r$: so, dass $|A_r| = |B_r|$ ist

- Nachprüfen, dass $\#_\rho(\mathfrak{A}) = \#_\rho(\mathfrak{B})$ für jeden r-Umgebungstyp ρ gilt
(alternativ: Angabe einer Bijektion f zwischen A_r und B_r, so dass für jedes $a \in A$ gilt:
$$\left(\left(W_r^{\mathfrak{A}}(a), a\right) \cong \left(W_r^{\mathfrak{B}}(f(a)), f(a)\right) \right)$$

- Details: Übung!