Vorlesung
Logik und Komplexität

Prof. Dr. Nicole Schweikardt

Lehrstuhl Logik in der Informatik
Institut für Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

Kapitel 0:
Einleitung

Kapitel 1:

Grundlagen und der Satz von Trakhtenbrot

Kapitel 2:

Logik zweiter Stufe und die Sätze von Büchi und Fagin

Kapitel 3:

Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele

In diesem Kapitel werden Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele (kurz: EF-Spiele) eingeführt. Diese liefern ein Werkzeug, mit dessen Hilfe man zeigen kann, dass bestimmte Anfragen oder Klassen von Strukturen <u>nicht</u> in bestimmten Logiken definiert werden können.

In diesem Kapitel werden Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele (kurz: EF-Spiele) eingeführt. Diese liefern ein Werkzeug, mit dessen Hilfe man zeigen kann, dass bestimmte Anfragen oder Klassen von Strukturen <u>nicht</u> in bestimmten Logiken definiert werden können.

Der Einfachheit halber betrachten wir hier meistens nur Signaturen, die keine Funktionssymbole und keine Konstantensymbole enthalten. Solche Signaturen werden im Folgenden relationale Signaturen genannt.

In diesem Kapitel werden Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele (kurz: EF-Spiele) eingeführt. Diese liefern ein Werkzeug, mit dessen Hilfe man zeigen kann, dass bestimmte Anfragen oder Klassen von Strukturen nicht in bestimmten Logiken definiert werden können.

Der Einfachheit halber betrachten wir hier meistens nur Signaturen, die keine Funktionssymbole und keine Konstantensymbole enthalten. Solche Signaturen werden im Folgenden relationale Signaturen genannt.

Außerdem werden wir im Folgenden bei zwei gegebenen Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ immer o.B.d.A. annehmen, dass ihre Universen disjunkt sind, d.h. $A \cap B = \emptyset$.

Abschnitt 3.1:

Das m-Runden EF-Spiel

Das m-Runden EF-Spiel

Sei σ eine relationale Signatur und seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen.

Das m-Runden EF-Spiel

Sei σ eine relationale Signatur und seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen.

Für $k \in \mathbb{N}$ seien $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A$ und $\overline{b} := b_1, \ldots, b_k \in B$ Folgen der Länge k von Elementen aus A bzw. B.

Das m-Runden EF-Spiel

Sei σ eine relationale Signatur und seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen.

Für $k \in \mathbb{N}$ seien $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A$ und $\overline{b} := b_1, \ldots, b_k \in B$ Folgen der Länge k von Elementen aus A bzw. B.

Sei $m \in \mathbb{N}$.

Das m-Runden EF-Spiel

Sei σ eine relationale Signatur und seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen.

Für $k \in \mathbb{N}$ seien $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A$ und $\overline{b} := b_1, \ldots, b_k \in B$ Folgen der Länge k von Elementen aus A bzw. B.

Sei $m \in \mathbb{N}$.

Das m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$

Das m-Runden EF-Spiel

Sei σ eine relationale Signatur und seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen.

Für $k \in \mathbb{N}$ seien $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A$ und $\overline{b} := b_1, \ldots, b_k \in B$ Folgen der Länge k von Elementen aus A bzw. B.

Sei $m \in \mathbb{N}$.

Das m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ (bzw. auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, falls $k = 0$ ist) wird gemäß folgender Spielregeln gespielt:

Spielregeln des m-Runden EF-Spiels auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$

- Es gibt 2 Spieler

Spielregeln des m-Runden EF-Spiels auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$

- Es gibt 2 Spieler, genannt Spoiler (kurz: *Sp*) und Duplicator (kurz: *Dupl*).

Spielregeln des m-Runden EF-Spiels auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$

- Es gibt 2 Spieler, genannt Spoiler (kurz: *Sp*) und Duplicator (kurz: *Dupl*).
- Das Spielbrett besteht aus $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$.

Spielregeln des m-Runden EF-Spiels auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$

- Es gibt 2 Spieler, genannt Spoiler (kurz: *Sp*) und Duplicator (kurz: *Dupl*).
- Das Spielbrett besteht aus $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$.
- Eine Partie des Spiels besteht aus m Runden.

  In jeder Runde $i \in \{1, \ldots, m\}$ geschieht Folgendes:

  1. Zunächst wählt Spoiler entweder ein Element in A

Spielregeln des m-Runden EF-Spiels auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$

- Es gibt 2 Spieler, genannt Spoiler (kurz: *Sp*) und Duplicator (kurz: *Dupl*).
- Das Spielbrett besteht aus $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$.
- Eine Partie des Spiels besteht aus m Runden.

  In jeder Runde $i \in \{1, \ldots, m\}$ geschieht Folgendes:

  1. Zunächst wählt Spoiler entweder ein Element in A, das im Folgenden mit a_{k+i} bezeichnet wird

Spielregeln des *m*-Runden EF-Spiels auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$

- Es gibt 2 Spieler, genannt Spoiler (kurz: *Sp*) und Duplicator (kurz: *Dupl*).
- Das Spielbrett besteht aus $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$.
- Eine Partie des Spiels besteht aus m Runden.

  In jeder Runde $i \in \{1, \ldots, m\}$ geschieht Folgendes:

  1. Zunächst wählt Spoiler entweder ein Element in A, das im Folgenden mit a_{k+i} bezeichnet wird, oder er wählt ein Element in B

Spielregeln des m-Runden EF-Spiels auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$

- Es gibt 2 Spieler, genannt Spoiler (kurz: *Sp*) und Duplicator (kurz: *Dupl*).
- Das Spielbrett besteht aus $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$.
- Eine Partie des Spiels besteht aus m Runden.

  In jeder Runde $i \in \{1, \ldots, m\}$ geschieht Folgendes:

  1. Zunächst wählt Spoiler entweder ein Element in A, das im Folgenden mit a_{k+i} bezeichnet wird, oder er wählt ein Element in B, das im Folgenden mit b_{k+i} bezeichnet wird.

Spielregeln des m-Runden EF-Spiels auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$

- Es gibt 2 Spieler, genannt Spoiler (kurz: *Sp*) und Duplicator (kurz: *Dupl*).
- Das Spielbrett besteht aus $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$.
- Eine Partie des Spiels besteht aus m Runden.

  In jeder Runde $i \in \{1, \ldots, m\}$ geschieht Folgendes:

  1. Zunächst wählt Spoiler entweder ein Element in A, das im Folgenden mit a_{k+i} bezeichnet wird, oder er wählt ein Element in B, das im Folgenden mit b_{k+i} bezeichnet wird.

     Beachte: Insbes. kann Spoiler in jeder Runde neu entscheiden, in welcher der beiden Strukturen er ein Element wählen möchte.

Spielregeln des m-Runden EF-Spiels auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$

- Es gibt 2 Spieler, genannt Spoiler (kurz: *Sp*) und Duplicator (kurz: *Dupl*).
- Das Spielbrett besteht aus $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$.
- Eine Partie des Spiels besteht aus m Runden.

  In jeder Runde $i \in \{1, \ldots, m\}$ geschieht Folgendes:

  1. Zunächst wählt Spoiler entweder ein Element in A, das im Folgenden mit a_{k+i} bezeichnet wird, oder er wählt ein Element in B, das im Folgenden mit b_{k+i} bezeichnet wird.

     Beachte: Insbes. kann Spoiler in jeder Runde neu entscheiden, in welcher der beiden Strukturen er ein Element wählen möchte.

  2. Danach antwortet Duplicator mit einem Element aus dem Universum der anderen Struktur

Spielregeln des m-Runden EF-Spiels auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$

- Es gibt 2 Spieler, genannt Spoiler (kurz: *Sp*) und Duplicator (kurz: *Dupl*).
- Das Spielbrett besteht aus $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$.
- Eine Partie des Spiels besteht aus m Runden.

  In jeder Runde $i \in \{1, \ldots, m\}$ geschieht Folgendes:

  1. Zunächst wählt Spoiler entweder ein Element in A, das im Folgenden mit a_{k+i} bezeichnet wird, oder er wählt ein Element in B, das im Folgenden mit b_{k+i} bezeichnet wird.

     Beachte: Insbes. kann Spoiler in jeder Runde neu entscheiden, in welcher der beiden Strukturen er ein Element wählen möchte.

  2. Danach antwortet Duplicator mit einem Element aus dem Universum der anderen Struktur, d.h. er wählt ein $b_{k+i} \in B$, falls Spoiler ein $a_{k+i} \in A$ gewählt hat

Spielregeln des m-Runden EF-Spiels auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$

- Es gibt 2 Spieler, genannt Spoiler (kurz: *Sp*) und Duplicator (kurz: *Dupl*).
- Das Spielbrett besteht aus $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$.
- Eine Partie des Spiels besteht aus m Runden.

  In jeder Runde $i \in \{1, \ldots, m\}$ geschieht Folgendes:

  1. Zunächst wählt Spoiler entweder ein Element in A, das im Folgenden mit a_{k+i} bezeichnet wird, oder er wählt ein Element in B, das im Folgenden mit b_{k+i} bezeichnet wird.

     Beachte: Insbes. kann Spoiler in jeder Runde neu entscheiden, in welcher der beiden Strukturen er ein Element wählen möchte.

  2. Danach antwortet Duplicator mit einem Element aus dem Universum der anderen Struktur, d.h. er wählt ein $b_{k+i} \in B$, falls Spoiler ein $a_{k+i} \in A$ gewählt hat, bzw. ein Element $a_{k+i} \in A$, falls Spoiler ein $b_{k+i} \in B$ gewählt hat.

Spielregeln des m-Runden EF-Spiels auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$

- Es gibt 2 Spieler, genannt Spoiler (kurz: *Sp*) und Duplicator (kurz: *Dupl*).
- Das Spielbrett besteht aus $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$.
- Eine Partie des Spiels besteht aus m Runden.

  In jeder Runde $i \in \{1, \ldots, m\}$ geschieht Folgendes:

  1. Zunächst wählt Spoiler entweder ein Element in A, das im Folgenden mit a_{k+i} bezeichnet wird, oder er wählt ein Element in B, das im Folgenden mit b_{k+i} bezeichnet wird.

     Beachte: Insbes. kann Spoiler in jeder Runde neu entscheiden, in welcher der beiden Strukturen er ein Element wählen möchte.

  2. Danach antwortet Duplicator mit einem Element aus dem Universum der anderen Struktur, d.h. er wählt ein $b_{k+i} \in B$, falls Spoiler ein $a_{k+i} \in A$ gewählt hat, bzw. ein Element $a_{k+i} \in A$, falls Spoiler ein $b_{k+i} \in B$ gewählt hat.

  Nach Runde m ist die Partie beendet und der Gewinner wird wie folgt ermittelt:

Gewinnbedingung

Duplicator hat gewonnen, falls die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(1) Für alle $j, j' \in \{1, \ldots, k+m\}$ gilt: $a_j = a_{j'} \iff b_j = b_{j'}$.

Gewinnbedingung

Duplicator hat gewonnen, falls die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(1) Für alle $j, j' \in \{1, \ldots, k+m\}$ gilt: $a_j = a_{j'} \iff b_j = b_{j'}$.

(2) Die Abbildung $\pi : \{a_1, \ldots, a_{k+m}\} \to \{b_1, \ldots, b_{k+m}\}$ mit

$$\pi(a_j) \ := \ b_j\,, \qquad \text{für jedes } \ j \in \{1, \ldots, k+m\}$$

ist

Gewinnbedingung

Duplicator hat gewonnen, falls die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(1) Für alle $j, j' \in \{1, \ldots, k+m\}$ gilt: $\quad a_j = a_{j'} \iff b_j = b_{j'}$.

(2) Die Abbildung $\pi : \{a_1, \ldots, a_{k+m}\} \to \{b_1, \ldots, b_{k+m}\}$ mit

$$\pi(a_j) \ := \ b_j\,, \qquad \text{für jedes } \ j \in \{1, \ldots, k+m\}$$

ist ein partieller Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ (siehe Definition 3.1).

Gewinnbedingung

Duplicator hat gewonnen, falls die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(1) Für alle $j, j' \in \{1, \dots, k+m\}$ gilt: $\quad a_j = a_{j'} \iff b_j = b_{j'}$.

(2) Die Abbildung $\pi : \{a_1, \dots, a_{k+m}\} \to \{b_1, \dots, b_{k+m}\}$ mit

$$\pi(a_j) \ := \ b_j\,, \qquad \text{für jedes } \ j \in \{1, \dots, k+m\}$$

ist ein partieller Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ (siehe Definition 3.1).

Spoiler hat gewonnen, falls mindestens eine der beiden obigen Bedingungen verletzt ist.

Gewinnbedingung

Duplicator hat gewonnen, falls die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(1) Für alle $j, j' \in \{1, \ldots, k+m\}$ gilt: $\quad a_j = a_{j'} \iff b_j = b_{j'}$.

(2) Die Abbildung $\pi : \{a_1, \ldots, a_{k+m}\} \to \{b_1, \ldots, b_{k+m}\}$ mit

$$\pi(a_j) \ := \ b_j\,, \qquad \text{für jedes } \ j \in \{1, \ldots, k+m\}$$

ist ein partieller Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ (siehe Definition 3.1).

Spoiler hat gewonnen, falls mindestens eine der beiden obigen Bedingungen verletzt ist.

Definition 3.1 (partieller Isomorphismus)

Sei σ eine relationale Signatur, seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen, sei $X \subseteq A$. Eine Abbildung $\pi : X \to B$ heißt partieller Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$, falls gilt:

Gewinnbedingung

Duplicator hat gewonnen, falls die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(1) Für alle $j, j' \in \{1, \ldots, k+m\}$ gilt: $a_j = a_{j'} \iff b_j = b_{j'}$.

(2) Die Abbildung $\pi : \{a_1, \ldots, a_{k+m}\} \to \{b_1, \ldots, b_{k+m}\}$ mit

$$\pi(a_j) := b_j, \qquad \text{für jedes } j \in \{1, \ldots, k+m\}$$

ist ein partieller Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ (siehe Definition 3.1).

Spoiler hat gewonnen, falls mindestens eine der beiden obigen Bedingungen verletzt ist.

Definition 3.1 (partieller Isomorphismus)

Sei σ eine relationale Signatur, seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen, sei $X \subseteq A$. Eine Abbildung $\pi : X \to B$ heißt partieller Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$, falls gilt:

(1) π ist injektiv und

Gewinnbedingung

Duplicator hat gewonnen, falls die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(1) Für alle $j, j' \in \{1, \ldots, k+m\}$ gilt: $a_j = a_{j'} \iff b_j = b_{j'}$.

(2) Die Abbildung $\pi : \{a_1, \ldots, a_{k+m}\} \to \{b_1, \ldots, b_{k+m}\}$ mit

$$\pi(a_j) := b_j, \qquad \text{für jedes } j \in \{1, \ldots, k+m\}$$

ist ein partieller Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ (siehe Definition 3.1).

Spoiler hat gewonnen, falls mindestens eine der beiden obigen Bedingungen verletzt ist.

Definition 3.1 (partieller Isomorphismus)

Sei σ eine relationale Signatur, seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen, sei $X \subseteq A$. Eine Abbildung $\pi : X \to B$ heißt partieller Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$, falls gilt:

(1) π ist injektiv und

(2) für jedes $R \in \sigma$, für $r := \operatorname{ar}(R)$ und für alle $(x_1, \ldots, x_r) \in X^r$ gilt:

$$(x_1, \ldots, x_r) \in R^{\mathcal{A}} \iff (\pi(x_1), \ldots, \pi(x_r)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Beispiel 3.2

Sei $\sigma := \{ E/2 \}$ und sei $k := 0$.

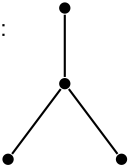
Beispiel 3.2

Sei $\sigma := \{ E/2 \}$ und sei $k := 0$.

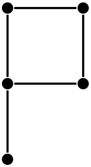
In den folgenden Darstellungen von Graphen repräsentiert jede ungerichtete Kante zwischen Knoten x, y die beiden gerichteten Kanten (x, y) und (y, x).

(a) Betrachte die folgenden beiden Graphen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$.

$\mathcal{A}$:

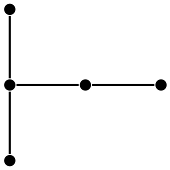


$\mathcal{B}$:

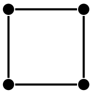


(b) Betrachte die beiden folgenden Graphen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$.

$\mathcal{A}$:



$\mathcal{B}$:



Notation 3.3

Wir schreiben $\mathrm{EF}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$, um das m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ zu bezeichnen.

Notation 3.3

Wir schreiben $\mathrm{EF}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$, um das m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ zu bezeichnen.

Ist $k = 0$ (d.h. $\overline{a}$ und $\overline{b}$ sind leer), so schreiben wir kurz $\mathrm{EF}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ an Stelle von $\mathrm{EF}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$.

Die Ziele von Spoiler und Duplicator

Die Gewinnbedingung im EF-Spiel ist so gewählt, dass die Ziele von Spoiler und Duplicator anschaulich folgendermaßen beschrieben werden können:

- Spoilers Ziel ist es,

Die Ziele von Spoiler und Duplicator

Die Gewinnbedingung im EF-Spiel ist so gewählt, dass die Ziele von Spoiler und Duplicator anschaulich folgendermaßen beschrieben werden können:

- Spoilers Ziel ist es, zu zeigen, dass die beiden Strukturen $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ verschieden sind.

Die Ziele von Spoiler und Duplicator

Die Gewinnbedingung im EF-Spiel ist so gewählt, dass die Ziele von Spoiler und Duplicator anschaulich folgendermaßen beschrieben werden können:

- Spoilers Ziel ist es, zu zeigen, dass die beiden Strukturen $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ verschieden sind.
- Duplicators Ziel ist es,

Die Ziele von Spoiler und Duplicator

Die Gewinnbedingung im EF-Spiel ist so gewählt, dass die Ziele von Spoiler und Duplicator anschaulich folgendermaßen beschrieben werden können:

- Spoilers Ziel ist es, zu zeigen, dass die beiden Strukturen $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ verschieden sind.
- Duplicators Ziel ist es, einen etwaigen Unterschied zwischen den beiden Strukturen zu vertuschen.

Gewinnstrategien

Eine Strategie für einen der beiden Spieler im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ ist eine Vorschrift, die ihm sagt, welchen Zug er als Nächstes machen soll.

Gewinnstrategien

Eine Strategie für einen der beiden Spieler im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ ist eine Vorschrift, die ihm sagt, welchen Zug er als Nächstes machen soll. Formal:

- Eine Strategie für Spoiler ist eine Abbildung

$$f_{Sp} \ : \ \bigcup_{i=0}^{m-1} (A \times B)^i \ \longrightarrow \ A \cup B.$$

Gewinnstrategien

Eine Strategie für einen der beiden Spieler im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ ist eine Vorschrift, die ihm sagt, welchen Zug er als Nächstes machen soll. Formal:

- Eine Strategie für Spoiler ist eine Abbildung

  $$f_{Sp} \ : \ \bigcup_{i=0}^{m-1} (A \times B)^i \ \longrightarrow \ A \cup B.$$

  Sind $a_{k+1}, \ldots, a_{k+i} \in A$ und $b_{k+1}, \ldots, b_{k+i} \in B$ die in den ersten i Runden gewählten Elemente, so gibt

  $$f_{Sp}(a_{k+1}, b_{k+1}, \ldots, a_{k+i}, b_{k+i})$$

  an, welches Element Spoiler in der $(i{+}1)$-ten Runde wählen soll.

- Eine Strategie für Duplicator ist eine Abbildung

$$f_{Dupl} \;:\; \bigcup_{i=0}^{m-1} (A \times B)^i \times (A \cup B) \;\longrightarrow\; B \cup A,$$

- Eine Strategie für Duplicator ist eine Abbildung

$$f_{Dupl} \ : \ \bigcup_{i=0}^{m-1} (A \times B)^i \times (A \cup B) \ \longrightarrow \ B \cup A,$$

so dass für alle $i \in \{0, \ldots, m-1\}$, alle $a_{k+1}, \ldots, a_{k+i} \in A$, alle $b_{k+1}, \ldots, b_{k+i} \in B$ und alle $c_{k+i+1} \in A \cup B$ gilt:

$$c_{k+i+1} \in A \quad \Longleftrightarrow \quad f_{Dupl}\big(a_{k+1}, b_{k+1}, \ldots, a_{k+i}, b_{k+i}, c_{k+i+1}\big) \ \in \ B.$$

- Eine Strategie für Duplicator ist eine Abbildung

$$f_{Dupl} \;:\; \bigcup_{i=0}^{m-1} (A \times B)^i \times (A \cup B) \;\longrightarrow\; B \cup A,$$

so dass für alle $i \in \{0, \ldots, m-1\}$, alle $a_{k+1}, \ldots, a_{k+i} \in A$, alle $b_{k+1}, \ldots, b_{k+i} \in B$ und alle $c_{k+i+1} \in A \cup B$ gilt:

$$c_{k+i+1} \in A \quad \Longleftrightarrow \quad f_{Dupl}(a_{k+1}, b_{k+1}, \ldots, a_{k+i}, b_{k+i}, c_{k+i+1}) \;\in\; B.$$

Sind $a_{k+1}, \ldots, a_{k+i} \in A$ und $b_{k+1}, \ldots, b_{k+i} \in B$ die in den ersten i Runden und ist $c_{k+i+1} \in A \cup B$ das von Spoiler in Runde $i+1$ gewählte Element, so gibt

$$f_{Dupl}(a_{k+1}, b_{k+1}, \ldots, a_{k+i}, b_{k+i}, c_{k+i+1})$$

an, welches Element Duplicator in der $(i+1)$-ten Runde wählen soll.

- Eine Strategie für Duplicator ist eine Abbildung

$$f_{Dupl} \ : \ \bigcup_{i=0}^{m-1} (A \times B)^i \times (A \cup B) \ \longrightarrow \ B \cup A,$$

so dass für alle $i \in \{0, \ldots, m-1\}$, alle $a_{k+1}, \ldots, a_{k+i} \in A$, alle $b_{k+1}, \ldots, b_{k+i} \in B$ und alle $c_{k+i+1} \in A \cup B$ gilt:

$$c_{k+i+1} \in A \quad \Longleftrightarrow \quad f_{Dupl}\big(a_{k+1}, b_{k+1}, \ldots, a_{k+i}, b_{k+i}, c_{k+i+1}\big) \ \in \ B.$$

Sind $a_{k+1}, \ldots, a_{k+i} \in A$ und $b_{k+1}, \ldots, b_{k+i} \in B$ die in den ersten i Runden und ist $c_{k+i+1} \in A \cup B$ das von Spoiler in Runde $i+1$ gewählte Element, so gibt

$$f_{Dupl}(a_{k+1}, b_{k+1}, \ldots, a_{k+i}, b_{k+i}, c_{k+i+1})$$

an, welches Element Duplicator in der $(i+1)$-ten Runde wählen soll.

- Eine Gewinnstrategie ist eine Strategie für einen der beiden Spieler, mit der er jede Partie des m-Runden EF-Spiels auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ gewinnt.

Per Induktion nach der Rundenzahl m lässt sich leicht nachweisen, dass stets einer der beiden Spieler eine Gewinnstrategie besitzt:

Satz 3.4

Für alle relationalen Signaturen σ, alle σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, alle $k \in \mathbb{N}$, alle $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A$, alle $\overline{b} := b_1, \ldots, b_k \in A$ und alle $m \in \mathbb{N}$ gilt: Genau einer der beiden Spieler hat eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathrm{EF}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$.

Per Induktion nach der Rundenzahl m lässt sich leicht nachweisen, dass stets einer der beiden Spieler eine Gewinnstrategie besitzt:

Satz 3.4

Für alle relationalen Signaturen σ, alle σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, alle $k \in \mathbb{N}$, alle $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A$, alle $\overline{b} := b_1, \ldots, b_k \in A$ und alle $m \in \mathbb{N}$ gilt: Genau einer der beiden Spieler hat eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathrm{EF}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$.

Beweis: Übung. $\square$

Per Induktion nach der Rundenzahl m lässt sich leicht nachweisen, dass stets einer der beiden Spieler eine Gewinnstrategie besitzt:

Satz 3.4

Für alle relationalen Signaturen σ, alle σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, alle $k \in \mathbb{N}$, alle $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A$, alle $\overline{b} := b_1, \ldots, b_k \in A$ und alle $m \in \mathbb{N}$ gilt: Genau einer der beiden Spieler hat eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathrm{EF}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$.

Beweis: Übung. $\square$

Definition 3.5

(a) Wir sagen

Spoiler (bzw. Duplicator) gewinnt $\mathrm{EF}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$,

falls er eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathrm{EF}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$ besitzt.

Per Induktion nach der Rundenzahl m lässt sich leicht nachweisen, dass stets einer der beiden Spieler eine Gewinnstrategie besitzt:

Satz 3.4

Für alle relationalen Signaturen σ, alle σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, alle $k \in \mathbb{N}$, alle $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A$, alle $\overline{b} := b_1, \ldots, b_k \in A$ und alle $m \in \mathbb{N}$ gilt: Genau einer der beiden Spieler hat eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathrm{EF}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$.

Beweis: Übung. □

Definition 3.5

(a) Wir sagen

Spoiler (bzw. Duplicator) gewinnt $\mathrm{EF}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$,

falls er eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathrm{EF}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$ besitzt.

(b) Wir schreiben $(\mathcal{A}, \overline{a}) \approx_m (\mathcal{B}, \overline{b})$, um auszudrücken, dass Duplicator eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathrm{EF}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$ besitzt.

Per Induktion nach der Rundenzahl m lässt sich leicht nachweisen, dass stets einer der beiden Spieler eine Gewinnstrategie besitzt:

Satz 3.4

Für alle relationalen Signaturen σ, alle σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, alle $k \in \mathbb{N}$, alle $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A$, alle $\overline{b} := b_1, \ldots, b_k \in A$ und alle $m \in \mathbb{N}$ gilt: Genau einer der beiden Spieler hat eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathrm{EF}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$.

Beweis: Übung. □

Definition 3.5

(a) Wir sagen

Spoiler (bzw. Duplicator) gewinnt $\mathrm{EF}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$,

falls er eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathrm{EF}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$ besitzt.

(b) Wir schreiben $(\mathcal{A}, \overline{a}) \approx_m (\mathcal{B}, \overline{b})$, um auszudrücken, dass Duplicator eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathrm{EF}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$ besitzt.

Ist $k = 0$ (d.h. $\overline{a}$ und $\overline{b}$ sind leer), so schreiben wir kurz $\mathcal{A} \approx_m \mathcal{B}$ an Stelle von $(\mathcal{A}, \overline{a}) \approx_m (\mathcal{B}, \overline{b})$.

Beispiel 3.6

Betrachte die linearen Ordnungen $\mathcal{A} = (A, \leqslant^{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{B} = (B, \leqslant^{\mathcal{B}})$ mit $A = \{1, \ldots, 8\}$ und $B = \{1, \ldots, 9\}$, wobei $\leqslant^{\mathcal{A}}$ und $\leqslant^{\mathcal{B}}$ die natürlichen linearen Ordnungen auf A und B sind.

Beispiel 3.6

Betrachte die linearen Ordnungen $\mathcal{A} = (A, \leqslant^{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{B} = (B, \leqslant^{\mathcal{B}})$ mit $A = \{1, \ldots, 8\}$ und $B = \{1, \ldots, 9\}$, wobei $\leqslant^{\mathcal{A}}$ und $\leqslant^{\mathcal{B}}$ die natürlichen linearen Ordnungen auf A und B sind.

Seien außerdem $k := 2$ und $\overline{a} := a_1, a_2$ und $\overline{b} := b_1, b_2$ mit $a_1 = b_1 = 1$ und $a_2 = 8$ und $b_2 = 9$ vorgegeben.

Beispiel 3.6

Betrachte die linearen Ordnungen $\mathcal{A} = (A, \leqslant^{\mathcal{A}})$ und $\mathcal{B} = (B, \leqslant^{\mathcal{B}})$ mit $A = \{1, \ldots, 8\}$ und $B = \{1, \ldots, 9\}$, wobei $\leqslant^{\mathcal{A}}$ und $\leqslant^{\mathcal{B}}$ die natürlichen linearen Ordnungen auf A und B sind.

Seien außerdem $k := 2$ und $\overline{a} := a_1, a_2$ und $\overline{b} := b_1, b_2$ mit $a_1 = b_1 = 1$ und $a_2 = 8$ und $b_2 = 9$ vorgegeben.

Frage: Was ist die größte Zahl m, so dass gilt: $(\mathcal{A}, \overline{a}) \approx_m (\mathcal{B}, \overline{b})$?

Dies lässt sich zu folgender Aussage verallgemeinern:

Satz 3.7

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ endliche lineare Ordnungen,

Dies lässt sich zu folgender Aussage verallgemeinern:

Satz 3.7

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ endliche lineare Ordnungen, sei $k := 2$, und sei $\overline{a} := a_1, a_2$ und $\overline{b} := b_1, b_2$, wobei a_1, b_1 die kleinsten und a_2, b_2 die größten Elemente in A und B bezüglich $\leqslant^{\mathcal{A}}$ und $\leqslant^{\mathcal{B}}$ sind.

Dies lässt sich zu folgender Aussage verallgemeinern:

Satz 3.7

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ endliche lineare Ordnungen, sei $k := 2$, und sei $\overline{a} := a_1, a_2$ und $\overline{b} := b_1, b_2$, wobei a_1, b_1 die kleinsten und a_2, b_2 die größten Elemente in A und B bezüglich $\leqslant^{\mathcal{A}}$ und $\leqslant^{\mathcal{B}}$ sind.

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(\mathcal{A}, \overline{a}) \approx_m (\mathcal{B}, \overline{b}) \quad \iff \quad |A| = |B| \ \textit{ oder } \ |A|, |B| > 2^m.$$

Dies lässt sich zu folgender Aussage verallgemeinern:

Satz 3.7

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ endliche lineare Ordnungen, sei $k := 2$, und sei $\overline{a} := a_1, a_2$ und $\overline{b} := b_1, b_2$, wobei a_1, b_1 die kleinsten und a_2, b_2 die größten Elemente in A und B bezüglich $\leqslant^{\mathcal{A}}$ und $\leqslant^{\mathcal{B}}$ sind.

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(\mathcal{A}, \overline{a}) \approx_m (\mathcal{B}, \overline{b}) \quad \iff \quad |A| = |B| \ \text{ oder } \ |A|, |B| > 2^m.$$

D.h.: Duplicator hat genau dann eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$, wenn die Kardinalität von A und B gleich ist oder größer ist als 2^m.

Wir zeigen nun, dass Duplicator so spielen kann, dass für jedes $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ die folgende Invariante $(*)_i$ erfüllt ist:

Wir zeigen nun, dass Duplicator so spielen kann, dass für jedes $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ die folgende Invariante $(*)_i$ erfüllt ist:

$(*)_i$: Sind $a_{2+1}, \dots, a_{2+i}$ und $b_{2+1}, \dots, b_{2+i}$ die in den Runden $1, \dots, i$ gewählten Elemente in A und B,

Wir zeigen nun, dass Duplicator so spielen kann, dass für jedes $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ die folgende Invariante $(*)_i$ erfüllt ist:

$(*)_i$: Sind $a_{2+1}, \ldots, a_{2+i}$ und $b_{2+1}, \ldots, b_{2+i}$ die in den Runden $1, \ldots, i$ gewählten Elemente in A und B, so gilt für alle $j, j' \in \{1, \ldots, 2+i\}$:

Wir zeigen nun, dass Duplicator so spielen kann, dass für jedes $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ die folgende Invariante $(*)_i$ erfüllt ist:

$(*)_i$: Sind $a_{2+1}, \ldots, a_{2+i}$ und $b_{2+1}, \ldots, b_{2+i}$ die in den Runden $1, \ldots, i$ gewählten Elemente in A und B, so gilt für alle $j, j' \in \{1, \ldots, 2+i\}$:

1. $a_j \leqslant^{\mathcal{A}} a_{j'} \iff b_j \leqslant^{\mathcal{B}} b_{j'}$

Wir zeigen nun, dass Duplicator so spielen kann, dass für jedes $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ die folgende Invariante $(*)_i$ erfüllt ist:

$(*)_i$: Sind $a_{2+1}, \ldots, a_{2+i}$ und $b_{2+1}, \ldots, b_{2+i}$ die in den Runden $1, \ldots, i$ gewählten Elemente in A und B, so gilt für alle $j, j' \in \{1, \ldots, 2+i\}$:

1. $a_j \leqslant^{\mathcal{A}} a_{j'} \iff b_j \leqslant^{\mathcal{B}} b_{j'}$ und
2. $Dist(a_j, a_{j'}) = Dist(b_j, b_{j'})$

Wir zeigen nun, dass Duplicator so spielen kann, dass für jedes $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ die folgende Invariante $(*)_i$ erfüllt ist:

$(*)_i$: Sind $a_{2+1}, \ldots, a_{2+i}$ und $b_{2+1}, \ldots, b_{2+i}$ die in den Runden $1, \ldots, i$ gewählten Elemente in A und B, so gilt für alle $j, j' \in \{1, \ldots, 2+i\}$:

1. $a_j \leqslant^{\mathcal{A}} a_{j'} \iff b_j \leqslant^{\mathcal{B}} b_{j'}$ und
2. $Dist(a_j, a_{j'}) = Dist(b_j, b_{j'})$ oder $Dist(a_j, a_{j'}), Dist(b_j, b_{j'}) \geqslant 2^{m-i}$.

Wir zeigen nun, dass Duplicator so spielen kann, dass für jedes $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ die folgende Invariante $(*)_i$ erfüllt ist:

$(*)_i$: Sind $a_{2+1}, \ldots, a_{2+i}$ und $b_{2+1}, \ldots, b_{2+i}$ die in den Runden $1, \ldots, i$ gewählten Elemente in A und B, so gilt für alle $j, j' \in \{1, \ldots, 2+i\}$:

1. $a_j \leqslant^{\mathcal{A}} a_{j'} \iff b_j \leqslant^{\mathcal{B}} b_{j'}$ und
2. $Dist(a_j, a_{j'}) = Dist(b_j, b_{j'})$ oder $Dist(a_j, a_{j'}), Dist(b_j, b_{j'}) \geqslant 2^{m-i}$.

Der Beweis folgt per Induktion nach i.

„$\Longrightarrow$“:

Offensichtlich genügt es, Folgendes zu zeigen:

> *Falls $|A| < |B|$ und $|A| \leqslant 2^m$, so hat Spoiler eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathrm{EF}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$.*

Dies kann man beweisen, indem man zeigt, dass Spoiler so spielen kann, dass für jedes $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ die folgende Invariante $(**)_i$ erfüllt ist.

$(**)_i$: Sind $a_{2+1}, \ldots, a_{2+i}$ und $b_{2+1}, \ldots, b_{2+i}$ die in den Runden $1, \ldots, i$ gewählten Elemente in A und B,

„$\Longrightarrow$“:

Offensichtlich genügt es, Folgendes zu zeigen:

> *Falls $|A| < |B|$ und $|A| \leqslant 2^m$, so hat Spoiler eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathrm{EF}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$.*

Dies kann man beweisen, indem man zeigt, dass Spoiler so spielen kann, dass für jedes $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ die folgende Invariante $(**)_i$ erfüllt ist.

$(**)_i$: Sind $a_{2+1}, \ldots, a_{2+i}$ und $b_{2+1}, \ldots, b_{2+i}$ die in den Runden $1, \ldots, i$ gewählten Elemente in A und B, so gibt es $j, j' \in \{1, \ldots, 2+i\}$, so dass gilt:

„$\Longrightarrow$“:

Offensichtlich genügt es, Folgendes zu zeigen:

> *Falls $|A| < |B|$ und $|A| \leqslant 2^m$, so hat Spoiler eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathrm{EF}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$.*

Dies kann man beweisen, indem man zeigt, dass Spoiler so spielen kann, dass für jedes $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ die folgende Invariante $(**)_i$ erfüllt ist.

$(**)_i$: Sind $a_{2+1}, \ldots, a_{2+i}$ und $b_{2+1}, \ldots, b_{2+i}$ die in den Runden $1, \ldots, i$ gewählten Elemente in A und B, so gibt es $j, j' \in \{1, \ldots, 2+i\}$, so dass gilt:

1. $\big(\ a_j <^{\mathcal{A}} a_{j'}\ \text{ und }\ b_j \geqslant^{\mathcal{B}} b_{j'}\ \big)$ oder $\big(\ a_j \geqslant^{\mathcal{A}} a_{j'}\ \text{ und }\ b_j <^{\mathcal{B}} b_{j'}\ \big)$

„$\Longrightarrow$“:

Offensichtlich genügt es, Folgendes zu zeigen:

Falls $|A| < |B|$ und $|A| \leqslant 2^m$, so hat Spoiler eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathrm{EF}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$.

Dies kann man beweisen, indem man zeigt, dass Spoiler so spielen kann, dass für jedes $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ die folgende Invariante $(**)_i$ erfüllt ist.

$(**)_i$: Sind $a_{2+1}, \ldots, a_{2+i}$ und $b_{2+1}, \ldots, b_{2+i}$ die in den Runden $1, \ldots, i$ gewählten Elemente in A und B, so gibt es $j, j' \in \{1, \ldots, 2+i\}$, so dass gilt:

1. $\big(a_j <^{\mathcal{A}} a_{j'}$ und $b_j \geqslant^{\mathcal{B}} b_{j'} \big)$ oder $\big(a_j \geqslant^{\mathcal{A}} a_{j'}$ und $b_j <^{\mathcal{B}} b_{j'} \big)$

   oder

2. $\mathit{Dist}(a_j, a_{j'}) < 2^{m-i}$ und $\mathit{Dist}(a_j, a_{j'}) < \mathit{Dist}(b_j, b_{j'})$.

„$\Longrightarrow$“:

Offensichtlich genügt es, Folgendes zu zeigen:

> *Falls $|A| < |B|$ und $|A| \leqslant 2^m$, so hat Spoiler eine Gewinnstrategie im Spiel $\mathrm{EF}_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$.*

Dies kann man beweisen, indem man zeigt, dass Spoiler so spielen kann, dass für jedes $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ die folgende Invariante $(**)_i$ erfüllt ist.

$(**)_i$: Sind $a_{2+1}, \ldots, a_{2+i}$ und $b_{2+1}, \ldots, b_{2+i}$ die in den Runden $1, \ldots, i$ gewählten Elemente in A und B, so gibt es $j, j' \in \{1, \ldots, 2+i\}$, so dass gilt:

1. $\big(a_j <^{\mathcal{A}} a_{j'} \;\text{ und }\; b_j \geqslant^{\mathcal{B}} b_{j'} \big)$ oder $\big(a_j \geqslant^{\mathcal{A}} a_{j'} \;\text{ und }\; b_j <^{\mathcal{B}} b_{j'} \big)$

   oder

2. $\mathit{Dist}(a_j, a_{j'}) < 2^{m-i}$ und $\mathit{Dist}(a_j, a_{j'}) < \mathit{Dist}(b_j, b_{j'})$.

Details: Übung.

Abschnitt 3.2:

Der Satz von Ehrenfeucht

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass ein enger Zusammenhang zwischen EF-Spielen und der Ausdrucksstärke der Logik erster Stufe besteht. Zur Formulierung dieses Zusammenhangs ist der folgende Begriff der m-Äquivalenz nützlich.

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass ein enger Zusammenhang zwischen EF-Spielen und der Ausdrucksstärke der Logik erster Stufe besteht. Zur Formulierung dieses Zusammenhangs ist der folgende Begriff der m-Äquivalenz nützlich.

Zur Erinnerung:

Die Quantorentiefe bzw. der Quantorenrang $\text{qr}(\varphi)$ einer Formel φ ist die maximale Anzahl von ineinander geschachtelten Quantoren, die in φ vorkommen.

Die m-Äquivalenz zweier Strukturen (kurz: $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$)

Definition 3.8

Sei σ eine Signatur, seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen und sei $m \in \mathbb{N}$.

(a) $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen m-äquivalent (kurz: $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$), falls

Die m-Äquivalenz zweier Strukturen (kurz: $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$)

Definition 3.8

Sei σ eine Signatur, seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen und sei $m \in \mathbb{N}$.

(a) $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen *m-äquivalent* (kurz: $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$), falls sie die gleichen FO[σ]-Sätze der Quantorentiefe $\leqslant m$ erfüllen, d.h. falls für alle FO[σ]-Sätze φ mit $\text{qr}(\varphi) \leqslant m$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{B} \models \varphi\,.$$

Die m-Äquivalenz zweier Strukturen (kurz: $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$)

Definition 3.8

Sei σ eine Signatur, seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen und sei $m \in \mathbb{N}$.

(a) $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen *m-äquivalent* (kurz: $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$), falls sie die gleichen FO[σ]-Sätze der Quantorentiefe $\leqslant m$ erfüllen, d.h. falls für alle FO[σ]-Sätze φ mit $\mathrm{qr}(\varphi) \leqslant m$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi \iff \mathcal{B} \models \varphi .$$

(b) Allgemein schreiben wir für $k \in \mathbb{N}$ und Elemente $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A$ und $\overline{b} := b_1, \ldots, b_k \in B$

$$(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$$

und sagen, dass $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ m-äquivalent sind, falls für alle FO[σ]-Formeln φ mit höchstens k freien Variablen und mit Quantorentiefe $\mathrm{qr}(\varphi) \leqslant m$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}] \iff \mathcal{B} \models \varphi[\overline{b}] .$$

Die m-Äquivalenz zweier Strukturen (kurz: $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$)

Definition 3.8

Sei σ eine Signatur, seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen und sei $m \in \mathbb{N}$.

(a) $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen *m-äquivalent* (kurz: $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$), falls sie die gleichen FO[σ]-Sätze der Quantorentiefe $\leqslant m$ erfüllen, d.h. falls für alle FO[σ]-Sätze φ mit $\mathrm{qr}(\varphi) \leqslant m$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi \iff \mathcal{B} \models \varphi .$$

(b) Allgemein schreiben wir für $k \in \mathbb{N}$ und Elemente $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A$ und $\overline{b} := b_1, \ldots, b_k \in B$

$$(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$$

und sagen, dass $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ m-äquivalent sind, falls für alle FO[σ]-Formeln φ mit höchstens k freien Variablen und mit Quantorentiefe $\mathrm{qr}(\varphi) \leqslant m$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}] \iff \mathcal{B} \models \varphi[\overline{b}] .$$

Anschaulich bedeutet $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$ also, dass $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ sich durch FO-Formeln der Quantorentiefe $\leqslant m$ <u>nicht</u> unterscheiden lassen

Die m-Äquivalenz zweier Strukturen (kurz: $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$)

Definition 3.8

Sei σ eine Signatur, seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen und sei $m \in \mathbb{N}$.

(a) $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen *m-äquivalent* (kurz: $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$), falls sie die gleichen FO[σ]-Sätze der Quantorentiefe $\leqslant m$ erfüllen, d.h. falls für alle FO[σ]-Sätze φ mit $\mathrm{qr}(\varphi) \leqslant m$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi \quad\Longleftrightarrow\quad \mathcal{B} \models \varphi\,.$$

(b) Allgemein schreiben wir für $k \in \mathbb{N}$ und Elemente $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A$ und $\overline{b} := b_1, \ldots, b_k \in B$

$$(\mathcal{A}, \overline{a}) \;\equiv_m\; (\mathcal{B}, \overline{b})$$

und sagen, dass $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ m-äquivalent sind, falls für alle FO[σ]-Formeln φ mit höchstens k freien Variablen und mit Quantorentiefe $\mathrm{qr}(\varphi) \leqslant m$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}] \quad\Longleftrightarrow\quad \mathcal{B} \models \varphi[\overline{b}]\,.$$

Anschaulich bedeutet $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$ also, dass $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ sich durch FO-Formeln der Quantorentiefe $\leqslant m$ nicht unterscheiden lassen (d.h., sie sehen aus Sicht dieser Formeln identisch aus).

Der Satz von Ehrenfeucht

Theorem 3.9 (Der Satz von Ehrenfeucht)

Sei σ eine endliche relationale Signatur, seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen, sei $m \in \mathbb{N}$, sei $k \in \mathbb{N}$, sei $\overline{a} = a_1, \ldots, a_k \in A$ und $\overline{b} = b_1, \ldots, b_k \in B$.

Der Satz von Ehrenfeucht

Theorem 3.9 (Der Satz von Ehrenfeucht)

Sei σ eine endliche relationale Signatur, seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen, sei $m \in \mathbb{N}$, sei $k \in \mathbb{N}$, sei $\overline{a} = a_1, \ldots, a_k \in A$ und $\overline{b} = b_1, \ldots, b_k \in B$. Dann gilt:

$$(\mathcal{A}, \overline{a}) \approx_m (\mathcal{B}, \overline{b}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}).$$

Der Satz von Ehrenfeucht

Theorem 3.9 (Der Satz von Ehrenfeucht)

Sei σ eine endliche relationale Signatur, seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen, sei $m \in \mathbb{N}$, sei $k \in \mathbb{N}$, sei $\overline{a} = a_1, \ldots, a_k \in A$ und $\overline{b} = b_1, \ldots, b_k \in B$. Dann gilt:

$$(\mathcal{A}, \overline{a}) \approx_m (\mathcal{B}, \overline{b}) \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}).$$

D.h.: Duplicator hat genau dann eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$, wenn

Der Satz von Ehrenfeucht

Theorem 3.9 (Der Satz von Ehrenfeucht)

Sei σ eine endliche relationale Signatur, seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen, sei $m \in \mathbb{N}$, sei $k \in \mathbb{N}$, sei $\overline{a} = a_1, \ldots, a_k \in A$ und $\overline{b} = b_1, \ldots, b_k \in B$. Dann gilt:

$$(\mathcal{A}, \overline{a}) \approx_m (\mathcal{B}, \overline{b}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}).$$

D.h.: Duplicator hat genau dann eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$, wenn $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ <u>nicht</u> durch FO[σ]-Formeln der Quantorentiefe $\leqslant m$ unterschieden werden können.

Der Satz von Ehrenfeucht

Theorem 3.9 (Der Satz von Ehrenfeucht)

Sei σ eine endliche relationale Signatur, seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen, sei $m \in \mathbb{N}$, sei $k \in \mathbb{N}$, sei $\overline{a} = a_1, \ldots, a_k \in A$ und $\overline{b} = b_1, \ldots, b_k \in B$. Dann gilt:

$$(\mathcal{A}, \overline{a}) \approx_m (\mathcal{B}, \overline{b}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}).$$

D.h.: Duplicator hat genau dann eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$, wenn $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ nicht durch FO[σ]-Formeln der Quantorentiefe $\leqslant m$ unterschieden werden können.

Umgekehrt heißt dies: Spoiler hat genau dann eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$, wenn

Der Satz von Ehrenfeucht

Theorem 3.9 (Der Satz von Ehrenfeucht)

Sei σ eine endliche relationale Signatur, seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen, sei $m \in \mathbb{N}$, sei $k \in \mathbb{N}$, sei $\overline{a} = a_1, \ldots, a_k \in A$ und $\overline{b} = b_1, \ldots, b_k \in B$. Dann gilt:

$$(\mathcal{A}, \overline{a}) \approx_m (\mathcal{B}, \overline{b}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}).$$

D.h.: Duplicator hat genau dann eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$, wenn $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ nicht durch FO$[\sigma]$-Formeln der Quantorentiefe $\leqslant m$ unterschieden werden können.

Umgekehrt heißt dies: Spoiler hat genau dann eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$, wenn es eine FO$[\sigma]$-Formel der Quantorentiefe $\leqslant m$ gibt, die in $(\mathcal{A}, \overline{a})$ gilt, aber nicht in $(\mathcal{B}, \overline{b})$.

Der Satz von Ehrenfeucht

Theorem 3.9 (Der Satz von Ehrenfeucht)

Sei σ eine endliche relationale Signatur, seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen, sei $m \in \mathbb{N}$, sei $k \in \mathbb{N}$, sei $\overline{a} = a_1, \ldots, a_k \in A$ und $\overline{b} = b_1, \ldots, b_k \in B$. Dann gilt:

$$(\mathcal{A}, \overline{a}) \approx_m (\mathcal{B}, \overline{b}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}).$$

D.h.: Duplicator hat genau dann eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$, wenn $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ <u>nicht</u> durch FO[σ]-Formeln der Quantorentiefe $\leqslant m$ unterschieden werden können.

Umgekehrt heißt dies: Spoiler hat genau dann eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$, wenn es eine FO[$\sigma$]-Formel der Quantorentiefe $\leqslant m$ gibt, die in $(\mathcal{A}, \overline{a})$ gilt, aber nicht in $(\mathcal{B}, \overline{b})$.

Wir werden den Satz von Ehrenfeucht durch eine Folge von Hilfssätzen beweisen. Vorher betrachten wir jedoch kurz eine Anwendung des Satzes von Ehrenfeucht.

Eine Anwendung des Satzes von Ehrenfeucht

Aus der Richtung „$\Longrightarrow$“ des Satzes von Ehrenfeucht (Theorem 3.9) und der Richtung „$\Longleftarrow$“ von Satz 3.7 (Gewinnstrategie auf linearen Ordnungen) folgt direkt:

Eine Anwendung des Satzes von Ehrenfeucht

Aus der Richtung „$\Longrightarrow$“ des Satzes von Ehrenfeucht (Theorem 3.9) und der Richtung „$\Longleftarrow$“ von Satz 3.7 (Gewinnstrategie auf linearen Ordnungen) folgt direkt:

Satz 3.10 (Endliche lineare Ordnungen gerader Kardinalität)

Es gibt <u>keinen</u> FO[$\leqslant$]*-Satz ψ, so dass für alle endlichen linearen Ordnungen $\mathcal{B}$ gilt:* $\mathcal{B} \models \psi \iff |B|$ *ist gerade.*

Beweis der Richtung „$\Longrightarrow$“ des Satzes von Ehrenfeucht

Die Richtung „$\Longrightarrow$“ folgt direkt aus dem nächsten Satz, dessen Aussage die Kontraposition der Richtung „$\Longrightarrow$“ von Theorem 3.9 darstellt.

Beweis der Richtung „$\Longrightarrow$“ des Satzes von Ehrenfeucht

Die Richtung „$\Longrightarrow$“ folgt direkt aus dem nächsten Satz, dessen Aussage die Kontraposition der Richtung „$\Longrightarrow$“ von Theorem 3.9 darstellt.

Satz 3.11

Sei σ eine relationale Signatur und seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen,

Beweis der Richtung „$\Longrightarrow$“ des Satzes von Ehrenfeucht

Die Richtung „$\Longrightarrow$“ folgt direkt aus dem nächsten Satz, dessen Aussage die Kontraposition der Richtung „$\Longrightarrow$“ von Theorem 3.9 darstellt.

Satz 3.11

Sei σ eine relationale Signatur und seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen, sei $m \in \mathbb{N}$,

Beweis der Richtung „$\Longrightarrow$“ des Satzes von Ehrenfeucht

Die Richtung „$\Longrightarrow$“ folgt direkt aus dem nächsten Satz, dessen Aussage die Kontraposition der Richtung „$\Longrightarrow$“ von Theorem 3.9 darstellt.

Satz 3.11

Sei σ eine relationale Signatur und seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen, sei $m \in \mathbb{N}$, sei $k \in \mathbb{N}$, sei $\overline{a} = a_1, \ldots, a_k \in A$ und sei $\overline{b} = b_1, \ldots, b_k \in B$.

Beweis der Richtung „$\Longrightarrow$“ des Satzes von Ehrenfeucht

Die Richtung „$\Longrightarrow$“ folgt direkt aus dem nächsten Satz, dessen Aussage die Kontraposition der Richtung „$\Longrightarrow$“ von Theorem 3.9 darstellt.

Satz 3.11

Sei σ eine relationale Signatur und seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen, sei $m \in \mathbb{N}$, sei $k \in \mathbb{N}$, sei $\overline{a} = a_1, \ldots, a_k \in A$ und sei $\overline{b} = b_1, \ldots, b_k \in B$.

Falls es eine FO[σ]*-Formel* $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ *mit* $\mathrm{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_k\}$ *und* $\mathrm{qr}(\varphi) \leqslant m$ *gibt, so dass*

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_k] \qquad \textit{und} \qquad \mathcal{B} \not\models \varphi[b_1, \ldots, b_k]\,,$$

so hat Spoiler eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$.

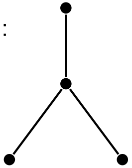
Beweisidee:

Zunächst illustrieren wir die Beweisidee an einem Beispiel. Betrachte dazu die Formel

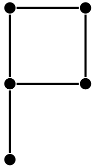
$$\varphi \;:=\; \exists x_1 \forall x_2 \left(x_1 = x_2 \;\vee\; E(x_1, x_2) \right)$$

und die beiden Graphen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ aus Beispiel 3.2(a).

$\mathcal{A}$:



$\mathcal{B}$:



Es gilt: $\mathcal{A} \models \varphi$ und $\mathcal{B} \not\models \varphi$, d.h. $\mathcal{B} \models \neg\varphi$.

Beweis von Satz 3.11:

Per Induktion über den Aufbau von Formeln.

Beweis von Satz 3.11:

Per Induktion über den Aufbau von Formeln. Es seien eine relationale Signatur σ und zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gegeben. Die Aussage $\mathbb{A}(\varphi)$, die wir für alle FO[σ]-Formeln φ beweisen wollen, besagt Folgendes:

Beweis von Satz 3.11:

Per Induktion über den Aufbau von Formeln. Es seien eine relationale Signatur σ und zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gegeben. Die Aussage $\mathbb{A}(\varphi)$, die wir für alle FO[σ]-Formeln φ beweisen wollen, besagt Folgendes:

> *Für alle $m, k \in \mathbb{N}$, alle $\overline{a} = a_1, \ldots, a_k \in A$ und alle $\overline{b} = b_1, \ldots, b_k \in B$ gilt:*
>
> *Falls* $\mathrm{qr}(\varphi) \leqslant m$

Beweis von Satz 3.11:

Per Induktion über den Aufbau von Formeln. Es seien eine relationale Signatur σ und zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gegeben. Die Aussage $\mathbb{A}(\varphi)$, die wir für alle FO[σ]-Formeln φ beweisen wollen, besagt Folgendes:

> *Für alle $m, k \in \mathbb{N}$, alle $\overline{a} = a_1, \ldots, a_k \in A$ und alle $\overline{b} = b_1, \ldots, b_k \in B$ gilt:*
>
> *Falls* $\mathrm{qr}(\varphi) \leqslant m$ *und* $|\mathrm{frei}(\varphi)| \leqslant k$

Beweis von Satz 3.11:

Per Induktion über den Aufbau von Formeln. Es seien eine relationale Signatur σ und zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gegeben. Die Aussage $\mathbb{A}(\varphi)$, die wir für alle FO[σ]-Formeln φ beweisen wollen, besagt Folgendes:

> *Für alle* $m, k \in \mathbb{N}$, *alle* $\overline{a} = a_1, \ldots, a_k \in A$ *und alle* $\overline{b} = b_1, \ldots, b_k \in B$ *gilt:*
>
> *Falls* $\operatorname{qr}(\varphi) \leqslant m$ *und* $|\operatorname{frei}(\varphi)| \leqslant k$ *und*
>
> $$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_k] \iff \mathcal{B} \not\models \varphi[b_1, \ldots, b_k]\,,$$

Beweis von Satz 3.11:

Per Induktion über den Aufbau von Formeln. Es seien eine relationale Signatur σ und zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gegeben. Die Aussage $\mathbb{A}(\varphi)$, die wir für alle FO[σ]-Formeln φ beweisen wollen, besagt Folgendes:

> *Für alle $m, k \in \mathbb{N}$, alle $\overline{a} = a_1, \ldots, a_k \in A$ und alle $\overline{b} = b_1, \ldots, b_k \in B$ gilt:*
>
> *Falls* $\mathrm{qr}(\varphi) \leqslant m$ *und* $|\mathrm{frei}(\varphi)| \leqslant k$ *und*
>
> $$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_k] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{B} \not\models \varphi[b_1, \ldots, b_k]\,,$$
>
> *so hat* Spoiler eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$*.*

Beweis von Satz 3.11:

Per Induktion über den Aufbau von Formeln. Es seien eine relationale Signatur σ und zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gegeben. Die Aussage $\mathbb{A}(\varphi)$, die wir für alle FO[σ]-Formeln φ beweisen wollen, besagt Folgendes:

> *Für alle $m, k \in \mathbb{N}$, alle $\overline{a} = a_1, \ldots, a_k \in A$ und alle $\overline{b} = b_1, \ldots, b_k \in B$ gilt:*
>
> *Falls $\mathrm{qr}(\varphi) \leqslant m$ und $|\mathrm{frei}(\varphi)| \leqslant k$ und*
>
> $$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_k] \iff \mathcal{B} \not\models \varphi[b_1, \ldots, b_k]\,,$$
>
> *so hat Spoiler eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$.*

Um $\mathbb{A}(\varphi)$ für eine gegebene Formel φ zu beweisen, seien im Folgenden $m, k \in \mathbb{N}$, $\overline{a} = a_1, \ldots, a_k \in A$ und $\overline{b} = b_1, \ldots, b_k \in B$ beliebig gewählt.

Beweis von Satz 3.11:

Per Induktion über den Aufbau von Formeln. Es seien eine relationale Signatur σ und zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gegeben. Die Aussage $\mathbb{A}(\varphi)$, die wir für alle FO[σ]-Formeln φ beweisen wollen, besagt Folgendes:

> *Für alle $m, k \in \mathbb{N}$, alle $\overline{a} = a_1, \ldots, a_k \in A$ und alle $\overline{b} = b_1, \ldots, b_k \in B$ gilt:*
>
> *Falls* $\mathrm{qr}(\varphi) \leqslant m$ *und* $|\mathrm{frei}(\varphi)| \leqslant k$ *und*
>
> $$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_k] \iff \mathcal{B} \not\models \varphi[b_1, \ldots, b_k]\,,$$
>
> *so hat* Spoiler eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$.

Um $\mathbb{A}(\varphi)$ für eine gegebene Formel φ zu beweisen, seien im Folgenden $m, k \in \mathbb{N}$, $\overline{a} = a_1, \ldots, a_k \in A$ und $\overline{b} = b_1, \ldots, b_k \in B$ beliebig gewählt.
Es genügt, den Fall zu betrachten, in dem gilt:

$$(*):\quad m \geqslant \mathrm{qr}(\varphi), \quad k \geqslant |\mathrm{frei}(\varphi)| \quad \text{und} \quad \mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}] \iff \mathcal{B} \not\models \varphi[\overline{b}]\,,$$

denn andernfalls muss gemäß der Formulierung von $\mathbb{A}(\varphi)$ nichts gezeigt werden.

Beweis der Richtung „$\Longleftarrow$" des Satzes von Ehrenfeucht

Zum Beweis der Richtung „$\Longleftarrow$" von Theorem 3.9 nutzen wir die wie folgt definierten Hintikka-Formeln.

Beweis der Richtung „$\Longleftarrow$“ des Satzes von Ehrenfeucht

Zum Beweis der Richtung „$\Longleftarrow$“ von Theorem 3.9 nutzen wir die wie folgt definierten Hintikka-Formeln.

Definition 3.12 (Hintikka-Formeln)

Sei σ eine endliche relationale Signatur, sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur, sei $k \in \mathbb{N}$, sei $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A$ eine Folge von Elementen aus A und sei $\overline{x} := x_1, \ldots, x_k$ eine Folge von k verschiedenen FO-Variablen.

Beweis der Richtung „$\Longleftarrow$“ des Satzes von Ehrenfeucht

Zum Beweis der Richtung „$\Longleftarrow$“ von Theorem 3.9 nutzen wir die wie folgt definierten Hintikka-Formeln.

Definition 3.12 (Hintikka-Formeln)

Sei σ eine endliche relationale Signatur, sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur, sei $k \in \mathbb{N}$, sei $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A$ eine Folge von Elementen aus A und sei $\overline{x} := x_1, \ldots, x_k$ eine Folge von k verschiedenen FO-Variablen.

Wir definieren rekursiv für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine Formel $\varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x})$, die wir als m-Hintikka-Formel (bzw. m-Isomorphietyp) von $\overline{a}$ in $\mathcal{A}$ bezeichnen, wie folgt:

- $\varphi^0_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x})$ ist die Konjunktion aller Formeln ψ, für die gilt:
  ψ ist eine atomare oder eine negierte atomare FO[σ]-Formel mit frei(ψ) $\subseteq \{x_1, \ldots, x_k\}$, so dass $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$.

- $\varphi^0_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x})$ ist die Konjunktion aller Formeln ψ, für die gilt:
  ψ ist eine atomare oder eine negierte atomare FO[σ]-Formel mit frei(ψ) $\subseteq \{x_1, \ldots, x_k\}$, so dass $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$.

  Beachte: Da σ endlich ist, gibt es nur endlich viele solche Formeln ψ.

- $\varphi^0_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x})$ ist die Konjunktion aller Formeln ψ, für die gilt:
  ψ ist eine atomare oder eine negierte atomare FO[σ]-Formel mit frei$(\psi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_k\}$, so dass $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$.

  Beachte: Da σ endlich ist, gibt es nur endlich viele solche Formeln ψ.

- Für $m > 0$ setzen wir

$$\varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) \quad := \quad \Big(\bigwedge_{a' \in A} \exists x_{k+1}\ \varphi^{m-1}_{\mathcal{A},\overline{a},a'}(\overline{x}, x_{k+1}) \Big) \quad \wedge \quad \forall x_{k+1} \bigvee_{a' \in A} \varphi^{m-1}_{\mathcal{A},\overline{a},a'}(\overline{x}, x_{k+1}) .$$

- $\varphi^0_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x})$ ist die Konjunktion aller Formeln ψ, für die gilt: ψ ist eine atomare oder eine negierte atomare FO[σ]-Formel mit $\text{frei}(\psi) \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$, so dass $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$.

  Beachte: Da σ endlich ist, gibt es nur endlich viele solche Formeln ψ.

- Für $m > 0$ setzen wir

$$\varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) \quad := \quad \Big(\bigwedge_{a' \in A} \exists x_{k+1}\ \varphi^{m-1}_{\mathcal{A},\overline{a},a'}(\overline{x}, x_{k+1}) \Big) \quad \wedge \quad \forall x_{k+1} \bigvee_{a' \in A} \varphi^{m-1}_{\mathcal{A},\overline{a},a'}(\overline{x}, x_{k+1}) \,.$$

  Präzise ist mit $\bigwedge_{a' \in A} \exists x_{k+1}\ \varphi^{m-1}_{\mathcal{A},\overline{a},a'}(\overline{x}, x_{k+1})$ gemeint, dass

- $\varphi^0_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x})$ ist die Konjunktion aller Formeln ψ, für die gilt: ψ ist eine atomare oder eine negierte atomare FO[σ]-Formel mit $\text{frei}(\psi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_k\}$, so dass $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$.

  Beachte: Da σ endlich ist, gibt es nur endlich viele solche Formeln ψ.

- Für $m > 0$ setzen wir

$$\varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) \quad := \quad \Big(\bigwedge_{a' \in A} \exists x_{k+1}\ \varphi^{m-1}_{\mathcal{A},\overline{a},a'}(\overline{x}, x_{k+1}) \Big) \quad \wedge \quad \forall x_{k+1} \bigvee_{a' \in A} \varphi^{m-1}_{\mathcal{A},\overline{a},a'}(\overline{x}, x_{k+1}) \,.$$

  Präzise ist mit $\bigwedge_{a' \in A} \exists x_{k+1}\ \varphi^{m-1}_{\mathcal{A},\overline{a},a'}(\overline{x}, x_{k+1})$ gemeint, dass wir für die Menge $M := \{\, \exists x_{k+1}\ \varphi^{m-1}_{\mathcal{A},\overline{a},a'}(\overline{x}, x_{k+1}) \ : \ a' \in A \,\}$ die Konjunktion bilden, in der jede Formel aus M genau einmal vorkommt.

- $\varphi^0_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x})$ ist die Konjunktion aller Formeln ψ, für die gilt:
  ψ ist eine atomare oder eine negierte atomare FO[σ]-Formel mit $\text{frei}(\psi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_k\}$, so dass $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]$.

  Beachte: Da σ endlich ist, gibt es nur endlich viele solche Formeln ψ.

- Für $m > 0$ setzen wir

$$\varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) \;:=\; \Big(\bigwedge_{a' \in A} \exists x_{k+1}\, \varphi^{m-1}_{\mathcal{A},\overline{a},a'}(\overline{x}, x_{k+1}) \Big) \;\wedge\; \forall x_{k+1} \bigvee_{a' \in A} \varphi^{m-1}_{\mathcal{A},\overline{a},a'}(\overline{x}, x_{k+1}) \,.$$

  Präzise ist mit $\bigwedge_{a' \in A} \exists x_{k+1}\, \varphi^{m-1}_{\mathcal{A},\overline{a},a'}(\overline{x}, x_{k+1})$ gemeint, dass wir für die Menge $M := \{\, \exists x_{k+1}\, \varphi^{m-1}_{\mathcal{A},\overline{a},a'}(\overline{x}, x_{k+1}) \;:\; a' \in A \,\}$ die Konjunktion bilden, in der jede Formel aus M genau einmal vorkommt.
  Analoges gilt auch für $\bigvee_{a' \in A} \varphi^{m-1}_{\mathcal{A},\overline{a},a'}(\overline{x}, x_{k+1})$.

Bemerkung 3.13

(a) Für alle endlichen relationalen Signaturen σ und alle $k, m \in \mathbb{N}$ ist die Menge

$$m\text{-Typen}_k[\sigma] \quad := \quad \left\{ \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) \ : \ \begin{array}{l} \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Struktur} \\ \text{und } \ \overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A \end{array} \right\}$$

endlich.

Bemerkung 3.13

(a) Für alle endlichen relationalen Signaturen σ und alle $k, m \in \mathbb{N}$ ist die Menge

$$m\text{-Typen}_k[\sigma] \quad := \quad \left\{ \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) \ : \ \begin{array}{l} \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Struktur} \\ \text{und } \ \overline{a} := a_1, \dots, a_k \in A \end{array} \right\}$$

endlich.

Für $m = 0$ gilt das, da

Bemerkung 3.13

(a) Für alle endlichen relationalen Signaturen σ und alle $k, m \in \mathbb{N}$ ist die Menge

$$m\text{-Typen}_k[\sigma] \quad := \quad \left\{ \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) \ : \ \begin{array}{l} \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Struktur} \\ \text{und } \ \overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A \end{array} \right\}$$

endlich.

Für $m = 0$ gilt das, da es nur endlich viele verschiedene atomare FO[σ]-Formeln über den Variablen $x_1, \ldots, x_k$ gibt.

Bemerkung 3.13

(a) Für alle endlichen relationalen Signaturen σ und alle $k, m \in \mathbb{N}$ ist die Menge

$$m\text{-Typen}_k[\sigma] \quad := \quad \left\{ \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) \ : \ \begin{array}{l} \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Struktur} \\ \text{und } \ \overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A \end{array} \right\}$$

endlich.

Für $m = 0$ gilt das, da es nur endlich viele verschiedene atomare FO[σ]-Formeln über den Variablen $x_1, \ldots, x_k$ gibt.
Für $m > 0$ folgt die Endlichkeit dann per Induktion.

Bemerkung 3.13

(a) Für alle endlichen relationalen Signaturen σ und alle $k, m \in \mathbb{N}$ ist die Menge

$$m\text{-Typen}_k[\sigma] \quad := \quad \left\{ \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) \ : \ \begin{array}{l} \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Struktur} \\ \text{und } \ \overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A \end{array} \right\}$$

endlich.

Für $m = 0$ gilt das, da es nur endlich viele verschiedene atomare FO[σ]-Formeln über den Variablen $x_1, \ldots, x_k$ gibt.
Für $m > 0$ folgt die Endlichkeit dann per Induktion.

Insbes. folgt dadurch, dass auch für unendliche Strukturen A und $m > 0$ die Konjunktion $\bigwedge\limits_{a' \in A}$ und die Disjunktion $\bigvee\limits_{a' \in A}$ jeweils nur <u>endlich</u> viele verschiedene Formeln enthält.

Bemerkung 3.13

(a) Für alle endlichen relationalen Signaturen σ und alle $k, m \in \mathbb{N}$ ist die Menge

$$m\text{-Typen}_k[\sigma] \quad := \quad \left\{ \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) \ : \ \begin{array}{l} \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Struktur} \\ \text{und } \ \overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A \end{array} \right\}$$

endlich.

Für $m = 0$ gilt das, da es nur endlich viele verschiedene atomare FO[σ]-Formeln über den Variablen $x_1, \ldots, x_k$ gibt.
Für $m > 0$ folgt die Endlichkeit dann per Induktion.

Insbes. folgt dadurch, dass auch für unendliche Strukturen A und $m > 0$ die Konjunktion $\bigwedge_{a' \in A}$ und die Disjunktion $\bigvee_{a' \in A}$ jeweils nur endlich viele verschiedene Formeln enthält.
Wir können daher die m-Hintikka-Formel $\varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}$ als FO[σ]-Formel auffassen.

Bemerkung 3.13

(a) Für alle endlichen relationalen Signaturen σ und alle $k, m \in \mathbb{N}$ ist die Menge

$$m\text{-Typen}_k[\sigma] \quad := \quad \left\{ \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) \ : \ \begin{array}{l} \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Struktur} \\ \text{und } \ \overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A \end{array} \right\}$$

endlich.

Für $m = 0$ gilt das, da es nur endlich viele verschiedene atomare FO[σ]-Formeln über den Variablen $x_1, \ldots, x_k$ gibt.
Für $m > 0$ folgt die Endlichkeit dann per Induktion.

Insbes. folgt dadurch, dass auch für unendliche Strukturen A und $m > 0$ die Konjunktion $\bigwedge_{a' \in A}$ und die Disjunktion $\bigvee_{a' \in A}$ jeweils nur endlich viele verschiedene Formeln enthält.
Wir können daher die m-Hintikka-Formel $\varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}$ als FO[σ]-Formel auffassen.

(b) Die m-Hintikka-Formel $\varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}$ hat die Quantorentiefe

Bemerkung 3.13

(a) Für alle endlichen relationalen Signaturen σ und alle $k, m \in \mathbb{N}$ ist die Menge

$$m\text{-Typen}_k[\sigma] \quad := \quad \left\{ \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) \ : \ \begin{array}{l} \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Struktur} \\ \text{und } \ \overline{a} := a_1, \dots, a_k \in A \end{array} \right\}$$

endlich.

Für $m = 0$ gilt das, da es nur endlich viele verschiedene atomare FO[σ]-Formeln über den Variablen $x_1, \dots, x_k$ gibt.
Für $m > 0$ folgt die Endlichkeit dann per Induktion.

Insbes. folgt dadurch, dass auch für unendliche Strukturen A und $m > 0$ die Konjunktion $\bigwedge_{a' \in A}$ und die Disjunktion $\bigvee_{a' \in A}$ jeweils nur endlich viele verschiedene Formeln enthält.
Wir können daher die m-Hintikka-Formel $\varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}$ als FO[σ]-Formel auffassen.

(b) Die m-Hintikka-Formel $\varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}$ hat die Quantorentiefe m,

Bemerkung 3.13

(a) Für alle endlichen relationalen Signaturen σ und alle $k, m \in \mathbb{N}$ ist die Menge

$$m\text{-Typen}_k[\sigma] \quad := \quad \left\{ \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) \ : \ \begin{array}{l} \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Struktur} \\ \text{und } \ \overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A \end{array} \right\}$$

endlich.

Für $m = 0$ gilt das, da es nur endlich viele verschiedene atomare FO[σ]-Formeln über den Variablen $x_1, \ldots, x_k$ gibt.
Für $m > 0$ folgt die Endlichkeit dann per Induktion.

Insbes. folgt dadurch, dass auch für unendliche Strukturen A und $m > 0$ die Konjunktion $\bigwedge_{a' \in A}$ und die Disjunktion $\bigvee_{a' \in A}$ jeweils nur endlich viele verschiedene Formeln enthält.
Wir können daher die m-Hintikka-Formel $\varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}$ als FO[σ]-Formel auffassen.

(b) Die m-Hintikka-Formel $\varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}$ hat die Quantorentiefe m, und es gilt: $\mathcal{A} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{a}]$.

Bemerkung 3.13

(a) Für alle endlichen relationalen Signaturen σ und alle $k, m \in \mathbb{N}$ ist die Menge

$$m\text{-Typen}_k[\sigma] \quad := \quad \left\{ \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) \ : \ \begin{array}{l} \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Struktur} \\ \text{und } \ \overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A \end{array} \right\}$$

endlich.

Für $m = 0$ gilt das, da es nur endlich viele verschiedene atomare FO[σ]-Formeln über den Variablen $x_1, \ldots, x_k$ gibt.
Für $m > 0$ folgt die Endlichkeit dann per Induktion.

Insbes. folgt dadurch, dass auch für unendliche Strukturen A und $m > 0$ die Konjunktion $\bigwedge_{a' \in A}$ und die Disjunktion $\bigvee_{a' \in A}$ jeweils nur endlich viele verschiedene Formeln enthält.
Wir können daher die m-Hintikka-Formel $\varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}$ als FO[σ]-Formel auffassen.

(b) Die m-Hintikka-Formel $\varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}$ hat die Quantorentiefe m, und es gilt: $\mathcal{A} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{a}]$.
Dies folgt leicht per Induktion nach m.

Bemerkung 3.13

(a) Für alle endlichen relationalen Signaturen σ und alle $k, m \in \mathbb{N}$ ist die Menge

$$m\text{-Typen}_k[\sigma] \quad := \quad \{\ \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) \ :\ \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Struktur und } \overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A \ \}$$

endlich.

Für $m = 0$ gilt das, da es nur endlich viele verschiedene atomare FO$[\sigma]$-Formeln über den Variablen $x_1, \ldots, x_k$ gibt.
Für $m > 0$ folgt die Endlichkeit dann per Induktion.

Insbes. folgt dadurch, dass auch für unendliche Strukturen A und $m > 0$ die Konjunktion $\bigwedge\limits_{a' \in A}$ und die Disjunktion $\bigvee\limits_{a' \in A}$ jeweils nur endlich viele verschiedene Formeln enthält.
Wir können daher die m-Hintikka-Formel $\varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}$ als FO$[\sigma]$-Formel auffassen.

(b) Die m-Hintikka-Formel $\varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}$ hat die Quantorentiefe m, und es gilt: $\mathcal{A} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{a}]$.
Dies folgt leicht per Induktion nach m.

(c) In der Definition der m-Hintikka-Formeln ist $k = 0$ erlaubt. Die m-Hintikka-Formel ist dann ein FO$[\sigma]$-Satz $\varphi^m_{\mathcal{A}}$ der Quantorentiefe m, für den gilt: $\mathcal{A} \models \varphi^m_{\mathcal{A}}$.

Die für den Beweis der Richtung „$\Longleftarrow$" von Theorem 3.9 zentrale Beobachtung wird im folgenden Satz zusammengefasst.

Die für den Beweis der Richtung „$\Longleftarrow$“ von Theorem 3.9 zentrale Beobachtung wird im folgenden Satz zusammengefasst.

Satz 3.14 (Hintikka-Formeln beschreiben Gewinnstrategien für Duplicator)

Sei σ eine endliche relationale Signatur, seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen, seien $k, m \in \mathbb{N}$ und seien $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A$ und $\overline{b} := b_1, \ldots, b_k \in B$. Dann gilt:

$$(\mathcal{A}, \overline{a}) \approx_m (\mathcal{B}, \overline{b}) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{b}] \,.$$

Beweis der Richtung „$\Longleftarrow$" von Theorem 3.9:

Beweis der Richtung „$\Longleftarrow$“ von Theorem 3.9:

Gemäß Voraussetzung gilt $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$, d.h.

Beweis der Richtung „$\Longleftarrow$“ von Theorem 3.9:

Gemäß Voraussetzung gilt $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$, d.h. $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ erfüllen dieselben FO$[\sigma]$-Formeln der Quantorentiefe $\leqslant m$.

Beweis der Richtung „$\Longleftarrow$“ von Theorem 3.9:

Gemäß Voraussetzung gilt $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$, d.h. $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ erfüllen dieselben FO[σ]-Formeln der Quantorentiefe $\leqslant m$.

Da die m-Hintikka-Formel $\varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x})$ die Quantorentiefe m hat, und da $\mathcal{A} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{a}]$ gilt (siehe Bemerkung 3.13), gilt auch

Beweis der Richtung „$\Longleftarrow$“ von Theorem 3.9:

Gemäß Voraussetzung gilt $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$, d.h. $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ erfüllen dieselben FO[σ]-Formeln der Quantorentiefe $\leqslant m$.

Da die m-Hintikka-Formel $\varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x})$ die Quantorentiefe m hat, und da $\mathcal{A} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{a}]$ gilt (siehe Bemerkung 3.13), gilt auch $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{b}]$.

Beweis der Richtung „$\Longleftarrow$“ von Theorem 3.9:

Gemäß Voraussetzung gilt $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$, d.h. $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ erfüllen dieselben FO[σ]-Formeln der Quantorentiefe $\leqslant m$.

Da die m-Hintikka-Formel $\varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x})$ die Quantorentiefe m hat, und da $\mathcal{A} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{a}]$ gilt (siehe Bemerkung 3.13), gilt auch $\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{b}]$.

Gemäß der Richtung „$\Longleftarrow$“ von Satz 3.14 gilt also $(\mathcal{A}, \overline{a}) \approx_m (\mathcal{B}, \overline{b})$. $\square$

Zusammenfassung

Theorem 3.9 und Satz 3.14 besagen zusammen:

Korollar 3.15

Sei σ eine endliche relationale Signatur, seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen, seien $k, m \in \mathbb{N}$ und seien $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A$ und $\overline{b} := b_1, \ldots, b_k \in B$. Dann gilt:

$$(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}) \quad \Longleftrightarrow$$

Zusammenfassung

Theorem 3.9 und Satz 3.14 besagen zusammen:

Korollar 3.15

Sei σ eine endliche relationale Signatur, seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen, seien $k, m \in \mathbb{N}$ und seien $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A$ und $\overline{b} := b_1, \ldots, b_k \in B$. Dann gilt:

$$(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}) \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathcal{A}, \overline{a}) \approx_m (\mathcal{B}, \overline{b}) \quad \Longleftrightarrow$$

Zusammenfassung

Theorem 3.9 und Satz 3.14 besagen zusammen:

Korollar 3.15

Sei σ eine endliche relationale Signatur, seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei σ-Strukturen, seien $k, m \in \mathbb{N}$ und seien $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A$ und $\overline{b} := b_1, \ldots, b_k \in B$. Dann gilt:

$$(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b}) \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathcal{A}, \overline{a}) \approx_m (\mathcal{B}, \overline{b}) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{b}]\,.$$

Zusammen mit Bemerkung 3.13 folgt dann insbesondere, dass es für jede endliche relationale Signatur σ bis auf logische Äquivalenz für jedes $m \in \mathbb{N}$ nur <u>endlich</u> viele verschiedene FO[σ]-Sätze der Quantorentiefe $\leqslant m$ gibt.

Zusammen mit Bemerkung 3.13 folgt dann insbesondere, dass es für jede endliche relationale Signatur σ bis auf logische Äquivalenz für jedes $m \in \mathbb{N}$ nur endlich viele verschiedene FO[σ]-Sätze der Quantorentiefe $\leqslant m$ gibt. Genauer:

Korollar 3.16

Für jede endliche relationale Signatur σ und alle $k, m \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) *Die Relation $\equiv_m$ besitzt nur endlich viele Äquivalenzklassen auf der Klasse $\{\ (\mathcal{A}, \overline{a})\ :\ \mathcal{A}$ ist eine σ-Struktur und $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A\ \}$.*

Zusammen mit Bemerkung 3.13 folgt dann insbesondere, dass es für jede endliche relationale Signatur σ bis auf logische Äquivalenz für jedes $m \in \mathbb{N}$ nur endlich viele verschiedene FO[σ]-Sätze der Quantorentiefe $\leqslant m$ gibt. Genauer:

Korollar 3.16

Für jede endliche relationale Signatur σ und alle $k, m \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) *Die Relation $\equiv_m$ besitzt nur endlich viele Äquivalenzklassen auf der Klasse $\{ (\mathcal{A}, \overline{a}) \ : \ \mathcal{A}$ ist eine σ-Struktur und $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k \in A \}$.*

(b) *Bis auf logische Äquivalenz gibt es nur endlich viele verschiedene FO[σ]-Formeln mit $\leqslant k$ freien Variablen und Quantorentiefe $\leqslant m$.*

Abschnitt 3.3:

Kompositionslemmata

Unter gewissen Umständen ist es möglich, Gewinnstrategien für Duplicator auf „kleinen" Strukturen zu Gewinnstrategien für Duplicator auf größeren Strukturen zusammenzusetzen. Die folgenden Kompositionslemmata fassen einige einfache Situationen zusammen, in denen dies möglich ist.

Kompositionslemma für die Vereinigung disjunkter Strukturen

Notation 3.17

Sei σ eine relationale Signatur.
Zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen disjunkt, falls ihre Universen disjunkt sind.

Kompositionslemma für die Vereinigung disjunkter Strukturen

Notation 3.17

Sei σ eine relationale Signatur.
Zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen disjunkt, falls ihre Universen disjunkt sind.
Für disjunkte σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ schreiben wir $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$, um die σ-Struktur mit Universum $A \cup B$ zu bezeichnen, bei der jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ mit $R^{\mathcal{A}} \cup R^{\mathcal{B}}$ interpretiert wird.

Kompositionslemma für die Vereinigung disjunkter Strukturen

Notation 3.17

Sei σ eine relationale Signatur.
Zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen disjunkt, falls ihre Universen disjunkt sind.
Für disjunkte σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ schreiben wir $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$, um die σ-Struktur mit Universum $A \cup B$ zu bezeichnen, bei der jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ mit $R^{\mathcal{A}} \cup R^{\mathcal{B}}$ interpretiert wird. Wir sagen auch: $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$ ist die disjunkte Vereinigung von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Kompositionslemma für die Vereinigung disjunkter Strukturen

Notation 3.17

Sei σ eine relationale Signatur.
Zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen disjunkt, falls ihre Universen disjunkt sind.
Für disjunkte σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ schreiben wir $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$, um die σ-Struktur mit Universum $A \cup B$ zu bezeichnen, bei der jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ mit $R^{\mathcal{A}} \cup R^{\mathcal{B}}$ interpretiert wird. Wir sagen auch: $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$ ist die disjunkte Vereinigung von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Lemma 3.18

Sei σ eine relationale Signatur, seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ zwei disjunkte σ-Strukturen und seien $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ zwei disjunkte σ-Strukturen. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathcal{A}_1 \approx_m \mathcal{B}_1 \ \text{ und } \ \mathcal{A}_2 \approx_m \mathcal{B}_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2 \ \approx_m \ \mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2.$$

Kompositionslemma für die Vereinigung disjunkter Strukturen

Notation 3.17

Sei σ eine relationale Signatur.
Zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen disjunkt, falls ihre Universen disjunkt sind.
Für disjunkte σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ schreiben wir $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$, um die σ-Struktur mit Universum $A \cup B$ zu bezeichnen, bei der jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ mit $R^{\mathcal{A}} \cup R^{\mathcal{B}}$ interpretiert wird. Wir sagen auch: $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$ ist die disjunkte Vereinigung von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Lemma 3.18

Sei σ eine relationale Signatur, seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ zwei disjunkte σ-Strukturen und seien $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ zwei disjunkte σ-Strukturen. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathcal{A}_1 \approx_m \mathcal{B}_1 \quad \textit{und} \quad \mathcal{A}_2 \approx_m \mathcal{B}_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2 \ \approx_m \ \mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2.$$

Beweis.

Übung. □

Beispiel 3.19

Die Signatur $\sigma := \{R, B\}$ bestehe aus zwei einstelligen Relationssymbolen R (für „rote Knoten“) und B (für „blaue Knoten“).

Beispiel 3.19

Die Signatur $\sigma := \{R, B\}$ bestehe aus zwei einstelligen Relationssymbolen R (für „rote Knoten“) und B (für „blaue Knoten“).
Für $k, \ell \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{A}_{k,\ell}$ eine σ-Struktur, die aus k roten und ℓ blauen Knoten besteht, d.h. $A_{k,\ell}$ ist die disjunkte Vereinigung der k-elementigen Menge $R^{\mathcal{A}_{k,\ell}}$ und der ℓ-elementigen Menge $B^{\mathcal{A}_{k,\ell}}$.

Beispiel 3.19

Die Signatur $\sigma := \{R, B\}$ bestehe aus zwei einstelligen Relationssymbolen R (für „rote Knoten“) und B (für „blaue Knoten“).
Für $k, \ell \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{A}_{k,\ell}$ eine σ-Struktur, die aus k roten und ℓ blauen Knoten besteht, d.h. $A_{k,\ell}$ ist die disjunkte Vereinigung der k-elementigen Menge $R^{\mathcal{A}_{k,\ell}}$ und der ℓ-elementigen Menge $B^{\mathcal{A}_{k,\ell}}$.

Für alle Zahlen $k_1, \ell_1, k_2, \ell_2 \in \mathbb{N}$ und alle $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left.\begin{array}{c} (\ k_1 = k_2 \ \text{ oder } \ k_1, k_2 \geqslant m\ ) \\ \text{und} \\ (\ \ell_1 = \ell_2 \ \text{ oder } \ \ell_1, \ell_2 \geqslant m\ ) \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}_{k_1,\ell_1} \approx_m \mathcal{A}_{k_2,\ell_2}.$$

Beispiel 3.19

Die Signatur $\sigma := \{R, B\}$ bestehe aus zwei einstelligen Relationssymbolen R (für „rote Knoten") und B (für „blaue Knoten").
Für $k, \ell \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{A}_{k,\ell}$ eine σ-Struktur, die aus k roten und ℓ blauen Knoten besteht, d.h. $A_{k,\ell}$ ist die disjunkte Vereinigung der k-elementigen Menge $R^{\mathcal{A}_{k,\ell}}$ und der ℓ-elementigen Menge $B^{\mathcal{A}_{k,\ell}}$.

Für alle Zahlen $k_1, \ell_1, k_2, \ell_2 \in \mathbb{N}$ und alle $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left.\begin{array}{c} \big(\; k_1 = k_2 \;\;\text{oder}\;\; k_1, k_2 \geqslant m \;\big) \\ \text{und} \\ \big(\; \ell_1 = \ell_2 \;\;\text{oder}\;\; \ell_1, \ell_2 \geqslant m \;\big) \end{array}\right\} \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{A}_{k_1,\ell_1} \approx_m \mathcal{A}_{k_2,\ell_2}.$$

Unter Verwendung von Lemma 3.18 erhält man einen kurzen Beweis für diese Aussage.

Beispiel 3.19

Die Signatur $\sigma := \{R, B\}$ bestehe aus zwei einstelligen Relationssymbolen R (für „rote Knoten“) und B (für „blaue Knoten“).
Für $k, \ell \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{A}_{k,\ell}$ eine σ-Struktur, die aus k roten und ℓ blauen Knoten besteht, d.h. $A_{k,\ell}$ ist die disjunkte Vereinigung der k-elementigen Menge $R^{\mathcal{A}_{k,\ell}}$ und der ℓ-elementigen Menge $B^{\mathcal{A}_{k,\ell}}$.

Für alle Zahlen $k_1, \ell_1, k_2, \ell_2 \in \mathbb{N}$ und alle $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left.\begin{array}{c} \big(\ k_1 = k_2 \ \text{ oder } \ k_1, k_2 \geqslant m\ \big) \\ \text{und} \\ \big(\ \ell_1 = \ell_2 \ \text{ oder } \ \ell_1, \ell_2 \geqslant m\ \big) \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}_{k_1,\ell_1} \approx_m \mathcal{A}_{k_2,\ell_2}.$$

Unter Verwendung von Lemma 3.18 erhält man einen kurzen Beweis für diese Aussage.

Auch die Richtung „$\Longleftarrow$“ gilt und lässt sich leicht durch Angabe einer Gewinnstrategie für Spoiler beweisen.

Details: Übung.

Kompositionslemma für das kartesische Produkt

Notation 3.20

Sei σ eine funktionenfreie Signatur.
Für zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ schreiben wir $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, um die σ-Struktur mit Universum $A \times B$ zu bezeichnen, bei der jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ mit $(c^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{B}})$

Kompositionslemma für das kartesische Produkt

Notation 3.20

Sei σ eine funktionenfreie Signatur.
Für zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ schreiben wir $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, um die σ-Struktur mit Universum $A \times B$ zu bezeichnen, bei der jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ mit $(c^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{B}})$ und jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ mit $r := \mathrm{ar}(R)$ mit

Kompositionslemma für das kartesische Produkt

Notation 3.20

Sei σ eine funktionenfreie Signatur.
Für zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ schreiben wir $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, um die σ-Struktur mit Universum $A \times B$ zu bezeichnen, bei der jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ mit $(c^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{B}})$ und jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ mit $r := \mathrm{ar}(R)$ mit

$$\left\{ \left((a_1, b_1), \ldots, (a_r, b_r) \right) \ : \ (a_1, \ldots, a_r) \in R^{\mathcal{A}} \ \text{ und } \ (b_1, \ldots, b_r) \in R^{\mathcal{B}} \right\}$$

interpretiert wird.

Kompositionslemma für das kartesische Produkt

Notation 3.20

Sei σ eine funktionenfreie Signatur.
Für zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ schreiben wir $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, um die σ-Struktur mit Universum $A \times B$ zu bezeichnen, bei der jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ mit $(c^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{B}})$ und jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ mit $r := \mathrm{ar}(R)$ mit

$$\left\{ \big((a_1, b_1), \ldots, (a_r, b_r) \big) \ : \ (a_1, \ldots, a_r) \in R^{\mathcal{A}} \ \text{ und } \ (b_1, \ldots, b_r) \in R^{\mathcal{B}} \right\}$$

interpretiert wird. Wir sagen auch: $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ ist das kartesische Produkt (oder Tensorprodukt) von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Kompositionslemma für das kartesische Produkt

Notation 3.20

Sei σ eine funktionenfreie Signatur.

Für zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ schreiben wir $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, um die σ-Struktur mit Universum $A \times B$ zu bezeichnen, bei der jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ mit $(c^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{B}})$ und jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ mit $r := \mathrm{ar}(R)$ mit

$$\left\{ \left((a_1, b_1), \ldots, (a_r, b_r) \right) \ : \ (a_1, \ldots, a_r) \in R^{\mathcal{A}} \ \text{ und } \ (b_1, \ldots, b_r) \in R^{\mathcal{B}} \right\}$$

interpretiert wird. Wir sagen auch: $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ ist das kartesische Produkt (oder Tensorprodukt) von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Lemma 3.21

Sei σ eine relationale Signatur und seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ vier σ-Strukturen. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathcal{A}_1 \approx_m \mathcal{B}_1 \ \ \textit{und} \ \ \mathcal{A}_2 \approx_m \mathcal{B}_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \ \approx_m \ \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2.$$

Kompositionslemma für das kartesische Produkt

Notation 3.20

Sei σ eine funktionenfreie Signatur.
Für zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ schreiben wir $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, um die σ-Struktur mit Universum $A \times B$ zu bezeichnen, bei der jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ mit $(c^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{B}})$ und jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ mit $r := \mathrm{ar}(R)$ mit

$$\left\{ \,\big((a_1, b_1), \ldots, (a_r, b_r) \big) \;:\; (a_1, \ldots, a_r) \in R^{\mathcal{A}} \text{ und } (b_1, \ldots, b_r) \in R^{\mathcal{B}} \,\right\}$$

interpretiert wird. Wir sagen auch: $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ ist das kartesische Produkt (oder Tensorprodukt) von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Lemma 3.21

Sei σ eine relationale Signatur und seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ vier σ-Strukturen. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathcal{A}_1 \approx_m \mathcal{B}_1 \;\; \textit{und} \;\; \mathcal{A}_2 \approx_m \mathcal{B}_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \;\approx_m\; \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 .$$

Beweis.

Übung. $\square$

Beispiel 3.22

Die Signatur $\sigma := \{S_v, S_h\}$ bestehe aus zwei 2-stelligen Relationssymbolen S_v und S_h (für „vertikale“ und „horizontale“ Kanten).

Beispiel 3.22

Die Signatur $\sigma := \{S_v, S_h\}$ bestehe aus zwei 2-stelligen Relationssymbolen S_v und S_h (für „vertikale“ und „horizontale“ Kanten). Für $k, \ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ ist das $(k\times\ell)$-*Gitter* $\mathcal{G}_{k,\ell}$ die σ-Struktur mit Universum $\{1, \ldots, k\} \times \{1, \ldots, \ell\}$

Beispiel 3.22

Die Signatur $\sigma := \{S_v, S_h\}$ bestehe aus zwei 2-stelligen Relationssymbolen S_v und S_h (für „vertikale" und „horizontale" Kanten). Für $k, \ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ ist das $(k{\times}\ell)$-*Gitter* $\mathcal{G}_{k,\ell}$ die σ-Struktur mit Universum $\{1, \ldots, k\} \times \{1, \ldots, \ell\}$ und Relationen

$$
\begin{aligned}
S_v^{\mathcal{G}_{k,\ell}} &:= \big\{ \big((i,j),(i{+}1,j)\big) \ : \ 1 \leqslant i < k,\ 1 \leqslant j \leqslant \ell \big\}, \\
S_h^{\mathcal{G}_{k,\ell}} &:= \big\{ \big((i,j),(i,j{+}1)\big) \ : \ 1 \leqslant i \leqslant k,\ 1 \leqslant j < \ell \big\}.
\end{aligned}
$$

Beispiel 3.22

Die Signatur $\sigma := \{S_v, S_h\}$ bestehe aus zwei 2-stelligen Relationssymbolen S_v und S_h (für „vertikale" und „horizontale" Kanten). Für $k, \ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ ist das $(k{\times}\ell)$-*Gitter* $\mathcal{G}_{k,\ell}$ die σ-Struktur mit Universum $\{1, \ldots, k\} \times \{1, \ldots, \ell\}$ und Relationen

$$\begin{aligned} S_v^{\mathcal{G}_{k,\ell}} &:= \big\{ \big((i,j),(i{+}1,j)\big) \ : \ 1 \leqslant i < k,\ 1 \leqslant j \leqslant \ell \big\}, \\ S_h^{\mathcal{G}_{k,\ell}} &:= \big\{ \big((i,j),(i,j{+}1)\big) \ : \ 1 \leqslant i \leqslant k,\ 1 \leqslant j < \ell \big\}. \end{aligned}$$

Unter Verwendung von Lemma 3.21 erhält man einen kurzen Beweis dafür, dass es keinen FO[σ]-Satz φ gibt, der die Gitter quadratischer Größe beschreibt

Beispiel 3.22

Die Signatur $\sigma := \{S_v, S_h\}$ bestehe aus zwei 2-stelligen Relationssymbolen S_v und S_h (für „vertikale" und „horizontale" Kanten). Für $k, \ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ ist das $(k \times \ell)$-*Gitter* $\mathcal{G}_{k,\ell}$ die σ-Struktur mit Universum $\{1, \ldots, k\} \times \{1, \ldots, \ell\}$ und Relationen

$$\begin{aligned} S_v^{\mathcal{G}_{k,\ell}} &:= \left\{ \big((i,j),(i{+}1,j)\big) \ : \ 1 \leqslant i < k,\ 1 \leqslant j \leqslant \ell \right\}, \\ S_h^{\mathcal{G}_{k,\ell}} &:= \left\{ \big((i,j),(i,j{+}1)\big) \ : \ 1 \leqslant i \leqslant k,\ 1 \leqslant j < \ell \right\}. \end{aligned}$$

Unter Verwendung von Lemma 3.21 erhält man einen kurzen Beweis dafür, dass es keinen FO[σ]-Satz φ gibt, der die Gitter quadratischer Größe beschreibt, d.h. bei dem für alle $k, \ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ gilt: $\mathcal{G}_{k,\ell} \models \varphi \iff k = \ell$.

Details: Übung.

Kompositionslemma für die Konkatenation linear geordneter Strukturen

Notation 3.23

Sei σ eine relationale Signatur, die das Symbol $\leqslant$ enthält.

Kompositionslemma für die Konkatenation linear geordneter Strukturen

Notation 3.23

Sei σ eine relationale Signatur, die das Symbol $\leqslant$ enthält. Für zwei linear geordnete, disjunkte σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ schreiben wir $\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}$, um die linear geordnete σ-Struktur mit Universum $A \cup B$ zu bezeichnen, bei der jedes Relationssymbol $R \in \sigma \setminus \{\leqslant\}$ mit $R^{\mathcal{A}} \cup R^{\mathcal{B}}$ interpretiert wird, und bei der $\leqslant^{\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}}$ die natürliche Erweiterung von $\leqslant^{\mathcal{A}}$ und $\leqslant^{\mathcal{B}}$ auf $A \cup B$ ist, bei der jedes Element aus A kleiner als jedes Element aus B ist,

Kompositionslemma für die Konkatenation linear geordneter Strukturen

Notation 3.23

Sei σ eine relationale Signatur, die das Symbol $\leqslant$ enthält. Für zwei linear geordnete, disjunkte σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ schreiben wir $\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}$, um die linear geordnete σ-Struktur mit Universum $A \cup B$ zu bezeichnen, bei der jedes Relationssymbol $R \in \sigma \setminus \{\leqslant\}$ mit $R^{\mathcal{A}} \cup R^{\mathcal{B}}$ interpretiert wird, und bei der $\leqslant^{\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}}$ die natürliche Erweiterung von $\leqslant^{\mathcal{A}}$ und $\leqslant^{\mathcal{B}}$ auf $A \cup B$ ist, bei der jedes Element aus A kleiner als jedes Element aus B ist, d.h.:

$$\leqslant^{\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}} \quad =$$

Kompositionslemma für die Konkatenation linear geordneter Strukturen

Notation 3.23

Sei σ eine relationale Signatur, die das Symbol $\leqslant$ enthält. Für zwei linear geordnete, disjunkte σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ schreiben wir $\mathcal{A}{\cdot}\mathcal{B}$, um die linear geordnete σ-Struktur mit Universum $A \cup B$ zu bezeichnen, bei der jedes Relationssymbol $R \in \sigma \setminus \{\leqslant\}$ mit $R^{\mathcal{A}} \cup R^{\mathcal{B}}$ interpretiert wird, und bei der $\leqslant^{\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}}$ die natürliche Erweiterung von $\leqslant^{\mathcal{A}}$ und $\leqslant^{\mathcal{B}}$ auf $A \cup B$ ist, bei der jedes Element aus A kleiner als jedes Element aus B ist, d.h.:

$$\leqslant^{\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}} \quad = \quad \leqslant^{\mathcal{A}} \ \cup \ \leqslant^{\mathcal{B}} \ \cup \ (A \times B).$$

Kompositionslemma für die Konkatenation linear geordneter Strukturen

Notation 3.23

Sei σ eine relationale Signatur, die das Symbol $\leqslant$ enthält. Für zwei linear geordnete, disjunkte σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ schreiben wir $\mathcal{A}{\cdot}\mathcal{B}$, um die linear geordnete σ-Struktur mit Universum $A \cup B$ zu bezeichnen, bei der jedes Relationssymbol $R \in \sigma \setminus \{\leqslant\}$ mit $R^{\mathcal{A}} \cup R^{\mathcal{B}}$ interpretiert wird, und bei der $\leqslant^{\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}}$ die natürliche Erweiterung von $\leqslant^{\mathcal{A}}$ und $\leqslant^{\mathcal{B}}$ auf $A \cup B$ ist, bei der jedes Element aus A kleiner als jedes Element aus B ist, d.h.:

$$\leqslant^{\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}} \quad = \quad \leqslant^{\mathcal{A}} \ \cup \ \leqslant^{\mathcal{B}} \ \cup \ (A \times B).$$

Wir sagen auch: $\mathcal{A}{\cdot}\mathcal{B}$ ist die Konkatenation von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Kompositionslemma für die Konkatenation linear geordneter Strukturen

Notation 3.23

Sei σ eine relationale Signatur, die das Symbol $\leqslant$ enthält. Für zwei linear geordnete, disjunkte σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ schreiben wir $\mathcal{A}{\cdot}\mathcal{B}$, um die linear geordnete σ-Struktur mit Universum $A \cup B$ zu bezeichnen, bei der jedes Relationssymbol $R \in \sigma \setminus \{\leqslant\}$ mit $R^{\mathcal{A}} \cup R^{\mathcal{B}}$ interpretiert wird, und bei der $\leqslant^{\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}}$ die natürliche Erweiterung von $\leqslant^{\mathcal{A}}$ und $\leqslant^{\mathcal{B}}$ auf $A \cup B$ ist, bei der jedes Element aus A kleiner als jedes Element aus B ist, d.h.:

$$\leqslant^{\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}} \quad = \quad \leqslant^{\mathcal{A}} \ \cup \ \leqslant^{\mathcal{B}} \ \cup \ (A \times B).$$

Wir sagen auch: $\mathcal{A}{\cdot}\mathcal{B}$ ist die Konkatenation von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Lemma 3.24

Sei σ eine relationale Signatur, die das Symbol $\leqslant$ enthält. Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ linear geordnete σ-Strukturen, so dass gilt: $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ sind disjunkt, $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ sind disjunkt, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ besitzen maximale Elemente a_1, a_2, b_1, b_2 bzgl. $\leqslant^{\mathcal{A}_1}$, $\leqslant^{\mathcal{A}_2}$, $\leqslant^{\mathcal{B}_1}$, $\leqslant^{\mathcal{B}_2}$.

Kompositionslemma für die Konkatenation linear geordneter Strukturen

Notation 3.23

Sei σ eine relationale Signatur, die das Symbol $\leqslant$ enthält. Für zwei linear geordnete, disjunkte σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ schreiben wir $\mathcal{A}{\cdot}\mathcal{B}$, um die linear geordnete σ-Struktur mit Universum $A \cup B$ zu bezeichnen, bei der jedes Relationssymbol $R \in \sigma \setminus \{\leqslant\}$ mit $R^{\mathcal{A}} \cup R^{\mathcal{B}}$ interpretiert wird, und bei der $\leqslant^{\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}}$ die natürliche Erweiterung von $\leqslant^{\mathcal{A}}$ und $\leqslant^{\mathcal{B}}$ auf $A \cup B$ ist, bei der jedes Element aus A kleiner als jedes Element aus B ist, d.h.:

$$\leqslant^{\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}} \quad = \quad \leqslant^{\mathcal{A}} \ \cup \ \leqslant^{\mathcal{B}} \ \cup \ (A \times B).$$

Wir sagen auch: $\mathcal{A}{\cdot}\mathcal{B}$ ist die Konkatenation von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Lemma 3.24

Sei σ eine relationale Signatur, die das Symbol $\leqslant$ enthält. Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ linear geordnete σ-Strukturen, so dass gilt: $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ sind disjunkt, $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ sind disjunkt, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ besitzen maximale Elemente a_1, a_2, b_1, b_2 bzgl. $\leqslant^{\mathcal{A}_1}$, $\leqslant^{\mathcal{A}_2}$, $\leqslant^{\mathcal{B}_1}$, $\leqslant^{\mathcal{B}_2}$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(\mathcal{A}_1, a_1) \approx_m (\mathcal{B}_1, b_1) \quad \textit{und} \quad (\mathcal{A}_2, a_2) \approx_m (\mathcal{B}_2, b_2) \quad \Longrightarrow$$

Kompositionslemma für die Konkatenation linear geordneter Strukturen

Notation 3.23

Sei σ eine relationale Signatur, die das Symbol $\leqslant$ enthält. Für zwei linear geordnete, disjunkte σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ schreiben wir $\mathcal{A}{\cdot}\mathcal{B}$, um die linear geordnete σ-Struktur mit Universum $A \cup B$ zu bezeichnen, bei der jedes Relationssymbol $R \in \sigma \setminus \{\leqslant\}$ mit $R^{\mathcal{A}} \cup R^{\mathcal{B}}$ interpretiert wird, und bei der $\leqslant^{\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}}$ die natürliche Erweiterung von $\leqslant^{\mathcal{A}}$ und $\leqslant^{\mathcal{B}}$ auf $A \cup B$ ist, bei der jedes Element aus A kleiner als jedes Element aus B ist, d.h.:

$$\leqslant^{\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}} \quad = \quad \leqslant^{\mathcal{A}} \;\cup\; \leqslant^{\mathcal{B}} \;\cup\; (A \times B).$$

Wir sagen auch: $\mathcal{A}{\cdot}\mathcal{B}$ ist die Konkatenation von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Lemma 3.24

Sei σ eine relationale Signatur, die das Symbol $\leqslant$ enthält. Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ linear geordnete σ-Strukturen, so dass gilt: $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ sind disjunkt, $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ sind disjunkt, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ besitzen maximale Elemente a_1, a_2, b_1, b_2 bzgl. $\leqslant^{\mathcal{A}_1}$, $\leqslant^{\mathcal{A}_2}$, $\leqslant^{\mathcal{B}_1}$, $\leqslant^{\mathcal{B}_2}$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(\mathcal{A}_1, a_1) \approx_m (\mathcal{B}_1, b_1) \quad \textit{und} \quad (\mathcal{A}_2, a_2) \approx_m (\mathcal{B}_2, b_2) \quad \Longrightarrow$$

$$(\mathcal{A}_1{\cdot}\mathcal{A}_2, a_1, a_2) \approx_m (\mathcal{B}_1{\cdot}\mathcal{B}_2, b_1, b_2)$$

Im nächsten Abschnitt werden wir dieses Lemma beim Beweis des Satzes von McNaughton und Papert benutzen, der eine logische Charakterisierung der sternfreien regulären Sprachen liefert.

Abschnitt 3.4:
Der Satz von McNaughton und Papert

Sternfreie reguläre Ausdrücke

In diesem Abschnitt sei Σ stets ein endliches, nicht-leeres Alphabet.

Definition 3.25 (sternfreie reguläre Ausdrücke)

Die Klasse SFR_Σ aller sternfreien regulären Ausdrücke über Σ ist rekursiv wie folgt definiert:

Sternfreie reguläre Ausdrücke

In diesem Abschnitt sei Σ stets ein endliches, nicht-leeres Alphabet.

Definition 3.25 (sternfreie reguläre Ausdrücke)

Die Klasse SFR_Σ aller sternfreien regulären Ausdrücke über Σ ist rekursiv wie folgt definiert:

(1) Das Symbol $\emptyset$ gehört zu SFR_Σ

Sternfreie reguläre Ausdrücke

In diesem Abschnitt sei Σ stets ein endliches, nicht-leeres Alphabet.

Definition 3.25 (sternfreie reguläre Ausdrücke)

Die Klasse SFR_Σ aller sternfreien regulären Ausdrücke über Σ ist rekursiv wie folgt definiert:

(1) Das Symbol $\emptyset$ gehört zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L(\emptyset) := \emptyset$.

Sternfreie reguläre Ausdrücke

In diesem Abschnitt sei Σ stets ein endliches, nicht-leeres Alphabet.

Definition 3.25 (sternfreie reguläre Ausdrücke)

Die Klasse SFR_Σ aller sternfreien regulären Ausdrücke über Σ ist rekursiv wie folgt definiert:

(1) Das Symbol $\emptyset$ gehört zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L(\emptyset) := \emptyset$.

(2) Für jedes $a \in \Sigma$ gehört das Symbol a zu SFR_Σ

Sternfreie reguläre Ausdrücke

In diesem Abschnitt sei Σ stets ein endliches, nicht-leeres Alphabet.

Definition 3.25 (sternfreie reguläre Ausdrücke)

Die Klasse SFR_Σ aller sternfreien regulären Ausdrücke über Σ ist rekursiv wie folgt definiert:

(1) Das Symbol $\emptyset$ gehört zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L(\emptyset) := \emptyset$.

(2) Für jedes $a \in \Sigma$ gehört das Symbol a zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L(a) := \{a\}$.

Sternfreie reguläre Ausdrücke

In diesem Abschnitt sei Σ stets ein endliches, nicht-leeres Alphabet.

Definition 3.25 (sternfreie reguläre Ausdrücke)

Die Klasse SFR_Σ aller sternfreien regulären Ausdrücke über Σ ist rekursiv wie folgt definiert:

(1) Das Symbol $\emptyset$ gehört zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L(\emptyset) := \emptyset$.

(2) Für jedes $a \in \Sigma$ gehört das Symbol a zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L(a) := \{a\}$.

(3) Sind $r \in \text{SFR}_\Sigma$ und $s \in \text{SFR}_\Sigma$, so gehört auch

- $(r \mid s)$ zu SFR_Σ

Sternfreie reguläre Ausdrücke

In diesem Abschnitt sei Σ stets ein endliches, nicht-leeres Alphabet.

Definition 3.25 (sternfreie reguläre Ausdrücke)

Die Klasse SFR_Σ aller sternfreien regulären Ausdrücke über Σ ist rekursiv wie folgt definiert:

(1) Das Symbol $\emptyset$ gehört zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L(\emptyset) := \emptyset$.

(2) Für jedes $a \in \Sigma$ gehört das Symbol a zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L(a) := \{a\}$.

(3) Sind $r \in \mathrm{SFR}_\Sigma$ und $s \in \mathrm{SFR}_\Sigma$, so gehört auch

- $(r \mid s)$ zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L((r \mid s)) := L(r) \cup L(s)$,

Sternfreie reguläre Ausdrücke

In diesem Abschnitt sei Σ stets ein endliches, nicht-leeres Alphabet.

Definition 3.25 (sternfreie reguläre Ausdrücke)

Die Klasse SFR_Σ aller sternfreien regulären Ausdrücke über Σ ist rekursiv wie folgt definiert:

(1) Das Symbol $\emptyset$ gehört zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L(\emptyset) := \emptyset$.

(2) Für jedes $a \in \Sigma$ gehört das Symbol a zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L(a) := \{a\}$.

(3) Sind $r \in \mathrm{SFR}_\Sigma$ und $s \in \mathrm{SFR}_\Sigma$, so gehört auch

- $(r \mid s)$ zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L((r \mid s)) := L(r) \cup L(s)$,
- $(r \cdot s)$ zu SFR_Σ

Sternfreie reguläre Ausdrücke

In diesem Abschnitt sei Σ stets ein endliches, nicht-leeres Alphabet.

Definition 3.25 (sternfreie reguläre Ausdrücke)

Die Klasse SFR_Σ aller sternfreien regulären Ausdrücke über Σ ist rekursiv wie folgt definiert:

(1) Das Symbol $\emptyset$ gehört zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L(\emptyset) := \emptyset$.

(2) Für jedes $a \in \Sigma$ gehört das Symbol a zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L(a) := \{a\}$.

(3) Sind $r \in \mathrm{SFR}_\Sigma$ und $s \in \mathrm{SFR}_\Sigma$, so gehört auch

- $(r \mid s)$ zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L((r \mid s)) := L(r) \cup L(s)$,
- $(r \cdot s)$ zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L((r \cdot s)) := L(r) \cdot L(s)$,

Sternfreie reguläre Ausdrücke

In diesem Abschnitt sei Σ stets ein endliches, nicht-leeres Alphabet.

Definition 3.25 (sternfreie reguläre Ausdrücke)

Die Klasse SFR_Σ aller sternfreien regulären Ausdrücke über Σ ist rekursiv wie folgt definiert:

(1) Das Symbol $\emptyset$ gehört zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L(\emptyset) := \emptyset$.

(2) Für jedes $a \in \Sigma$ gehört das Symbol a zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L(a) := \{a\}$.

(3) Sind $r \in \mathrm{SFR}_\Sigma$ und $s \in \mathrm{SFR}_\Sigma$, so gehört auch

- $(r \mid s)$ zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L((r \mid s)) := L(r) \cup L(s)$,
- $(r \cdot s)$ zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L((r \cdot s)) := L(r) \cdot L(s)$, wobei die Konkatenation $L_1 \cdot L_2$ zweier Sprachen $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ definiert ist als $L_1 \cdot L_2 := \{\, uv \; : \; u \in L_1,\; v \in L_2 \,\}$,

Sternfreie reguläre Ausdrücke

In diesem Abschnitt sei Σ stets ein endliches, nicht-leeres Alphabet.

Definition 3.25 (sternfreie reguläre Ausdrücke)

Die Klasse SFR_Σ aller sternfreien regulären Ausdrücke über Σ ist rekursiv wie folgt definiert:

(1) Das Symbol $\emptyset$ gehört zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L(\emptyset) := \emptyset$.

(2) Für jedes $a \in \Sigma$ gehört das Symbol a zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L(a) := \{a\}$.

(3) Sind $r \in \text{SFR}_\Sigma$ und $s \in \text{SFR}_\Sigma$, so gehört auch

- $(r \mid s)$ zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L((r \mid s)) := L(r) \cup L(s)$,
- $(r \cdot s)$ zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L((r \cdot s)) := L(r) \cdot L(s)$, wobei die Konkatenation $L_1 \cdot L_2$ zweier Sprachen $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ definiert ist als $L_1 \cdot L_2 := \{\, uv \;:\; u \in L_1,\; v \in L_2 \,\}$,
- $\overline{r}$ zu SFR_Σ

Sternfreie reguläre Ausdrücke

In diesem Abschnitt sei Σ stets ein endliches, nicht-leeres Alphabet.

Definition 3.25 (sternfreie reguläre Ausdrücke)

Die Klasse SFR_Σ aller sternfreien regulären Ausdrücke über Σ ist rekursiv wie folgt definiert:

(1) Das Symbol $\emptyset$ gehört zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L(\emptyset) := \emptyset$.

(2) Für jedes $a \in \Sigma$ gehört das Symbol a zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L(a) := \{a\}$.

(3) Sind $r \in \text{SFR}_\Sigma$ und $s \in \text{SFR}_\Sigma$, so gehört auch

- $(r \mid s)$ zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L((r \mid s)) := L(r) \cup L(s)$,
- $(r \cdot s)$ zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L((r \cdot s)) := L(r) \cdot L(s)$, wobei die Konkatenation $L_1 \cdot L_2$ zweier Sprachen $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ definiert ist als $L_1 \cdot L_2 := \{ uv \ : \ u \in L_1, \ v \in L_2 \}$,
- $\overline{r}$ zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L(\overline{r}) := \Sigma^* \setminus L(r)$.

Sternfreie reguläre Ausdrücke

In diesem Abschnitt sei Σ stets ein endliches, nicht-leeres Alphabet.

Definition 3.25 (sternfreie reguläre Ausdrücke)

Die Klasse SFR_Σ aller sternfreien regulären Ausdrücke über Σ ist rekursiv wie folgt definiert:

(1) Das Symbol $\emptyset$ gehört zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L(\emptyset) := \emptyset$.

(2) Für jedes $a \in \Sigma$ gehört das Symbol a zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L(a) := \{a\}$.

(3) Sind $r \in \mathrm{SFR}_\Sigma$ und $s \in \mathrm{SFR}_\Sigma$, so gehört auch

- $(r \mid s)$ zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L((r \mid s)) := L(r) \cup L(s)$,
- $(r \cdot s)$ zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L((r \cdot s)) := L(r) \cdot L(s)$, wobei die Konkatenation $L_1 \cdot L_2$ zweier Sprachen $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ definiert ist als $L_1 \cdot L_2 := \{\, uv \;:\; u \in L_1,\ v \in L_2 \,\}$,
- $\overline{r}$ zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L(\overline{r}) := \Sigma^* \setminus L(r)$.

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt sternfrei regulär, falls es ein $r \in \mathrm{SFR}_\Sigma$ gibt mit $L = L(r)$.

Der Satz von McNaughton und Papert (1971)

Definition 3.26

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt FO-definierbar, falls es einen FO$[\sigma_\Sigma]$-Satz φ gibt, der L beschreibt, d.h. für jedes nicht-leere Wort $w \in \Sigma^*$ gilt: $w \in L \iff \mathcal{A}_w \models \varphi$.

Der Satz von McNaughton und Papert (1971)

Definition 3.26

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt FO-definierbar, falls es einen $\mathrm{FO}[\sigma_\Sigma]$-Satz φ gibt, der L beschreibt, d.h. für jedes nicht-leere Wort $w \in \Sigma^*$ gilt: $w \in L \iff \mathcal{A}_w \models \varphi$.

Theorem 3.27 (Satz von McNaughton und Papert)

Für jede Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ gilt:
L ist sternfrei regulär $\iff$ L ist FO-*definierbar.*

„$\Longrightarrow$“: Per Induktion über den Aufbau der Menge SFR_Σ kann man leicht zeigen, dass es für jedes $r \in \mathrm{SFR}_\Sigma$ einen $\mathrm{FO}[\sigma_\Sigma]$-Satz φ_r gibt, der die Sprache $L(r)$ beschreibt.

„$\Longrightarrow$“: Per Induktion über den Aufbau der Menge SFR_Σ kann man leicht zeigen, dass es für jedes $r \in \mathrm{SFR}_\Sigma$ einen $\mathrm{FO}[\sigma_\Sigma]$-Satz φ_r gibt, der die Sprache $L(r)$ beschreibt.

Details: *Übung*.

„$\Longleftarrow$“:

Wir erweitern die Signatur σ_Σ um ein Konstantensymbol *max*

„$\Longleftarrow$“:

Wir erweitern die Signatur σ_Σ um ein Konstantensymbol *max*, setzen $\sigma'_\Sigma := \sigma_\Sigma \cup \{max\}$

„$\Longleftarrow$“:

Wir erweitern die Signatur σ_Σ um ein Konstantensymbol *max*, setzen $\sigma'_\Sigma := \sigma_\Sigma \cup \{max\}$ und bezeichnen mit $\mathcal{A}'_w$ die σ'_Σ-Expansion von $\mathcal{A}_w$, bei der *max* durch $|w|$ (also durch das größte Element von A_w bzgl. $\leqslant^{\mathcal{A}_w}$) interpretiert wird.

„$\Longleftarrow$“:

Wir erweitern die Signatur σ_Σ um ein Konstantensymbol *max*, setzen $\sigma'_\Sigma := \sigma_\Sigma \cup \{max\}$ und bezeichnen mit $\mathcal{A}'_w$ die σ'_Σ-Expansion von $\mathcal{A}_w$, bei der *max* durch $|w|$ (also durch das größte Element von A_w bzgl. $\leqslant^{\mathcal{A}_w}$) interpretiert wird. Die von einem FO$[\sigma'_\Sigma]$-Satz φ *beschriebene* Sprache $L(\varphi)$ ist definiert als $L(\varphi) := \{w \in \Sigma^+ \ : \ \mathcal{A}'_w \models \varphi\}$. Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ sagen wir, dass L durch φ *beschrieben* wird, falls für jedes *nicht-leere* Wort $w \in \Sigma^*$ gilt: $w \in L \iff w \in L(\varphi)$.

„$\Longleftarrow$“:

Wir erweitern die Signatur σ_Σ um ein Konstantensymbol *max*, setzen $\sigma'_\Sigma := \sigma_\Sigma \cup \{max\}$ und bezeichnen mit $\mathcal{A}'_w$ die σ'_Σ-Expansion von $\mathcal{A}_w$, bei der *max* durch $|w|$ (also durch das größte Element von A_w bzgl. $\leqslant^{\mathcal{A}_w}$) interpretiert wird. Die von einem FO$[\sigma'_\Sigma]$-Satz φ *beschriebene* Sprache $L(\varphi)$ ist definiert als $L(\varphi) := \{w \in \Sigma^+ \ : \ \mathcal{A}'_w \models \varphi\}$. Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ sagen wir, dass L durch φ *beschrieben* wird, falls für jedes *nicht-leere* Wort $w \in \Sigma^*$ gilt: $w \in L \iff w \in L(\varphi)$.

Per Induktion nach der Quantorentiefe m zeigen wir, dass es für jeden FO$[\sigma'_\Sigma]$-Satz φ einen sternfreien regulären Ausdruck $r_\varphi \in \text{SFR}_\Sigma$ gibt, so dass φ die Sprache $L(r_\varphi)$ beschreibt.

Induktionsschritt $m \to m{+}1$*:* Sei $m \geqslant 0$.

Induktionsannahme:

Induktionsschritt $m \to m{+}1$*:* Sei $m \geqslant 0$.

Induktionsannahme: Für jeden $\mathsf{FO}[\sigma'_\Sigma]$-Satz ψ der Quantorentiefe $\leqslant m$ gibt es ein $r_\psi \in \mathsf{SFR}_\Sigma$, so dass ψ die Sprache $L(r_\psi)$ beschreibt.

Induktionsschritt $m \to m{+}1$: Sei $m \geqslant 0$.

Induktionsannahme: Für jeden FO[σ'_Σ]-Satz ψ der Quantorentiefe $\leqslant m$ gibt es ein $r_\psi \in \mathsf{SFR}_\Sigma$, so dass ψ die Sprache $L(r_\psi)$ beschreibt.

Behauptung:

Induktionsschritt $m \to m{+}1$*:* Sei $m \geqslant 0$.

Induktionsannahme: Für jeden FO[σ'_Σ]-Satz ψ der Quantorentiefe $\leqslant m$ gibt es ein $r_\psi \in \mathrm{SFR}_\Sigma$, so dass ψ die Sprache $L(r_\psi)$ beschreibt.

Behauptung: Für jeden FO[σ'_Σ]-Satz φ der Quantorentiefe $m{+}1$ gibt es ein $r_\varphi \in \mathrm{SFR}_\Sigma$, so dass φ die Sprache $L(r_\varphi)$ beschreibt.

Induktionsschritt $m \to m{+}1$*:* Sei $m \geqslant 0$.

Induktionsannahme: Für jeden $\mathrm{FO}[\sigma'_\Sigma]$-Satz ψ der Quantorentiefe $\leqslant m$ gibt es ein $r_\psi \in \mathrm{SFR}_\Sigma$, so dass ψ die Sprache $L(r_\psi)$ beschreibt.

Behauptung: Für jeden $\mathrm{FO}[\sigma'_\Sigma]$-Satz φ der Quantorentiefe $m{+}1$ gibt es ein $r_\varphi \in \mathrm{SFR}_\Sigma$, so dass φ die Sprache $L(r_\varphi)$ beschreibt.

Beweis: Per Induktion nach dem Aufbau von $\mathrm{FO}[\sigma'_\Sigma]$-Sätzen der Quantorentiefe $m{+}1$.

Bevor wir den (schwierigen) Induktionsanfang betrachten, behandeln wir zunächst den (trivialen) Induktionsschritt.

Bevor wir den (schwierigen) Induktionsanfang betrachten, behandeln wir zunächst den (trivialen) Induktionsschritt.

Induktionsschritt: Hier betrachten wir den Fall, dass φ von der Form $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ oder von der Form $\neg\varphi_1$ ist, wobei φ_1 und φ_2 FO[σ'_Σ]-Sätze der Quantorentiefe $\leqslant m{+}1$ sind

Bevor wir den (schwierigen) Induktionsanfang betrachten, behandeln wir zunächst den (trivialen) Induktionsschritt.

Induktionsschritt: Hier betrachten wir den Fall, dass φ von der Form $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ oder von der Form $\neg\varphi_1$ ist, wobei φ_1 und φ_2 FO$[\sigma'_\Sigma]$-Sätze der Quantorentiefe $\leqslant m{+}1$ sind, für die gemäß Induktionsannahme bereits bekannt ist, dass es für jedes $i \in \{1,2\}$ einen sternfreien regulären Ausdruck r_{φ_i} gibt, so dass φ_i die Sprache $L(r_{\varphi_i})$ beschreibt.

$$S_\psi \;:=\; \Big\{ (\tau,\tau') \;:\; \begin{array}{l} \tau,\tau' \in m\text{-Typen}_1[\sigma_\Sigma], \\ \text{es gibt } \tilde{w} \in \Sigma^+ \text{ und } \tilde{u} \in \Sigma^+, \text{ so dass für } \tilde{p} := |\tilde{w}| \text{ und } \tilde{q} := |\tilde{u}| \\ \text{gilt:} \\ \text{(1)} \quad \mathcal{A}'_{\tilde{w}\tilde{u}} \models \psi[\tilde{p}] \;\text{ und} \\ \text{(2)} \quad \mathcal{A}_{\tilde{w}} \models \tau[\tilde{p}] \quad \text{und} \quad \mathcal{A}_{\tilde{u}} \models \tau'[\tilde{q}]. \end{array} \Big\}$$

$$S_\psi \;:=\; \Big\{ (\tau,\tau') \;:\; \begin{array}{l} \tau,\tau' \in m\text{-Typen}_1[\sigma_\Sigma], \\ \text{es gibt } \tilde{w} \in \Sigma^+ \text{ und } \tilde{u} \in \Sigma^+, \text{ so dass für } \tilde{p} := |\tilde{w}| \text{ und } \tilde{q} := |\tilde{u}| \\ \text{gilt:} \\ (1) \quad \mathcal{A}'_{\tilde{w}\tilde{u}} \models \psi[\tilde{p}] \;\text{ und} \\ (2) \quad \mathcal{A}_{\tilde{w}} \models \tau[\tilde{p}] \quad \text{und} \quad \mathcal{A}_{\tilde{u}} \models \tau'[\tilde{q}]. \end{array} \Big\}$$

Die Menge S_ψ ist endlich, da die Menge m-Typen$_1[\sigma_\Sigma]$ endlich ist.

$$
S_\psi \;:=\; \Big\{ (\tau,\tau') \;:\; \begin{array}{l} \tau,\tau' \in m\text{-Typen}_1[\sigma_\Sigma], \\ \text{es gibt } \tilde{w} \in \Sigma^+ \text{ und } \tilde{u} \in \Sigma^+ \text{, so dass für } \tilde{p} := |\tilde{w}| \text{ und } \tilde{q} := |\tilde{u}| \\ \text{gilt:} \\ \text{(1)} \quad \mathcal{A}'_{\tilde{w}\tilde{u}} \models \psi[\tilde{p}] \;\text{ und} \\ \text{(2)} \quad \mathcal{A}_{\tilde{w}} \models \tau[\tilde{p}] \quad \text{und} \quad \mathcal{A}_{\tilde{u}} \models \tau'[\tilde{q}]. \end{array} \Big\}
$$

Die Menge S_ψ ist endlich, da die Menge m-Typen$_1[\sigma_\Sigma]$ endlich ist.

Aussage (1) bedeutet insbesondere, dass für $\tilde{v} := \tilde{w}\tilde{u}$ gilt: $\mathcal{A}'_{\tilde{v}} \models \exists y\, \psi(y)$.

$$S_\psi := \Big\{ (\tau, \tau') \ : \ \begin{array}{l} \tau, \tau' \in m\text{-Typen}_1[\sigma_\Sigma], \\ \text{es gibt } \tilde{w} \in \Sigma^+ \text{ und } \tilde{u} \in \Sigma^+, \text{ so dass für } \tilde{p} := |\tilde{w}| \text{ und } \tilde{q} := |\tilde{u}| \\ \text{gilt:} \\ (1) \quad \mathcal{A}'_{\tilde{w}\tilde{u}} \models \psi[\tilde{p}] \ \text{ und} \\ (2) \quad \mathcal{A}_{\tilde{w}} \models \tau[\tilde{p}] \quad \text{und} \quad \mathcal{A}_{\tilde{u}} \models \tau'[\tilde{q}]. \end{array} \Big\}$$

Die Menge S_ψ ist endlich, da die Menge m-Typen$_1[\sigma_\Sigma]$ endlich ist.

Aussage (1) bedeutet insbesondere, dass für $\tilde{v} := \tilde{w}\tilde{u}$ gilt: $\mathcal{A}'_{\tilde{v}} \models \exists y\, \psi(y)$.

Aussage (2) bedeutet, dass τ und τ' die m-Hintikka-Formeln von $(\mathcal{A}_{\tilde{w}}, |\tilde{w}|)$ und von $(\mathcal{A}_{\tilde{u}}, |\tilde{u}|)$ sind

$$S_\psi \;:=\; \Big\{\, (\tau,\tau') \;:\; \begin{array}{l} \tau,\tau' \in m\text{-Typen}_1[\sigma_\Sigma], \\ \text{es gibt } \tilde{w}\in\Sigma^+ \text{ und } \tilde{u}\in\Sigma^+, \text{ so dass für } \tilde{p} := |\tilde{w}| \text{ und } \tilde{q} := |\tilde{u}| \\ \text{gilt:} \\ (1) \quad \mathcal{A}'_{\tilde{w}\tilde{u}} \models \psi[\tilde{p}] \ \text{ und} \\ (2) \quad \mathcal{A}_{\tilde{w}} \models \tau[\tilde{p}] \quad \text{und} \quad \mathcal{A}_{\tilde{u}} \models \tau'[\tilde{q}]. \end{array} \Big\}$$

Die Menge S_ψ ist endlich, da die Menge m-Typen$_1[\sigma_\Sigma]$ endlich ist.

Aussage (1) bedeutet insbesondere, dass für $\tilde{v} := \tilde{w}\tilde{u}$ gilt: $\mathcal{A}'_{\tilde{v}} \models \exists y\, \psi(y)$.

Aussage (2) bedeutet, dass τ und τ' die m-Hintikka-Formeln von $(\mathcal{A}_{\tilde{w}}, |\tilde{w}|)$ und von $(\mathcal{A}_{\tilde{u}}, |\tilde{u}|)$ sind, d.h.

$$\tau \;=\; \varphi^m_{\mathcal{A}_{\tilde{w}},|\tilde{w}|}(x) \qquad \text{und} \qquad \tau' \;=\; \varphi^m_{\mathcal{A}_{\tilde{u}},|\tilde{u}|}(x)\,. \tag{1}$$

Die Menge S_ψ wurde so gewählt, dass Folgendes gilt:

Behauptung $(*)$. Für alle Worte $v \in \Sigma^+$ gilt: $\mathcal{A}'_v \models \exists y\, \psi(y) \iff$

- $\mathcal{A}'_v \models \psi[p]$, wobei die freie Variable y von ψ durch die maximale Position $p := |v|$ interpretiert wird, *oder*
- es gibt eine Position $p \in \{1, \ldots, |v|{-}1\}$ und ein Paar $(\tau, \tau') \in S_\psi$, so dass für die (nicht-leeren) Worte w und u mit $v = wu$ und $|w| = p$ gilt: $\mathcal{A}_w \models \tau[p]$ und $\mathcal{A}_u \models \tau'[q]$, wobei die freie Variable x von τ und τ' durch die maximalen Positionen $p = |w|$ von w und $q := |u|$ von u interpretiert wird.

Abschnitt 3.5:

Logische Reduktionen

Graph-Zusammenhang und Erreichbarkeit sind nicht FO-definierbar

Zur Erinnerung:

Aus Satz 3.10 wissen wir, dass es keinen FO[$\leqslant$]-Satz ψ gibt, so dass für jede endliche lineare Ordnung $\mathcal{B}$ gilt: $\mathcal{B} \models \psi \iff |B|$ ist gerade.

Graph-Zusammenhang und Erreichbarkeit sind nicht FO-definierbar

Zur Erinnerung:

Aus Satz 3.10 wissen wir, dass es keinen FO[$\leqslant$]-Satz ψ gibt, so dass für jede endliche lineare Ordnung $\mathcal{B}$ gilt: $\mathcal{B} \models \psi \iff |B|$ ist gerade. Unter Verwendung von „logischen Reduktionen" können wir daraus folgern, dass Zusammenhang von und Erreichbarkeit in Graphen nicht FO-definierbar sind:

Satz 3.28

Sei E ein 2-stelliges Relationssymbol.

(a) *Graph-Zusammenhang ist nicht FO-definierbar.*

D.h.: Es gibt keinen FO[E]-Satz φ_{Conn}, so dass für jeden endlichen ungerichteten Graphen $\mathcal{G} = (V^{\mathcal{G}}, E^{\mathcal{G}})$ und die zugehörige $\{E\}$-Struktur $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ gilt:
$\mathcal{A} \models \varphi_{Conn} \iff \mathcal{G}$ ist zusammenhängend.

Graph-Zusammenhang und Erreichbarkeit sind nicht FO-definierbar

Zur Erinnerung:

Aus Satz 3.10 wissen wir, dass es keinen FO[$\leqslant$]-Satz ψ gibt, so dass für jede endliche lineare Ordnung $\mathcal{B}$ gilt: $\mathcal{B} \models \psi \iff |B|$ ist gerade. Unter Verwendung von „logischen Reduktionen" können wir daraus folgern, dass Zusammenhang von und Erreichbarkeit in Graphen nicht FO-definierbar sind:

Satz 3.28

Sei E ein 2-stelliges Relationssymbol.

(a) *Graph-Zusammenhang ist nicht FO-definierbar.*

D.h.: Es gibt keinen FO[E]-Satz φ_{Conn}, so dass für jeden endlichen ungerichteten Graphen $\mathcal{G} = (V^{\mathcal{G}}, E^{\mathcal{G}})$ und die zugehörige $\{E\}$-Struktur $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ gilt:
$\mathcal{A} \models \varphi_{Conn} \iff \mathcal{G}$ *ist zusammenhängend.*

(b) *Erreichbarkeit ist nicht FO-definierbar.*

D.h.: Es gibt keine FO[E]-Formel $\varphi_{Reach}(x, y)$, so dass für alle endlichen gerichteten Graphen $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ und alle Knoten $a, b \in A$ gilt:
$\mathcal{A} \models \varphi_{Reach}[a, b] \iff$ *es gibt in $\mathcal{A}$ einen Weg von Knoten a zu Knoten b.*

(b) folgt direkt aus *(a)*, denn:

(b) folgt direkt aus *(a)*, denn:

Angenommen $\varphi_{Reach}(x, y)$ wäre eine FO[E]-Formel, so dass für alle gerichteten Graphen $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ und alle Knoten $a, b \in A$ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi_{Reach}[a, b] \iff$ es gibt in $\mathcal{A}$ einen Weg von Knoten a zu Knoten b.

(b) folgt direkt aus *(a)*, denn:

Angenommen $\varphi_{Reach}(x, y)$ wäre eine FO$[E]$-Formel, so dass für alle gerichteten Graphen $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ und alle Knoten $a, b \in A$ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi_{Reach}[a, b] \iff$ es gibt in $\mathcal{A}$ einen Weg von Knoten a zu Knoten b.

Dann ist

$$\varphi_{Conn} \;:=$$

(b) folgt direkt aus *(a)*, denn:

Angenommen $\varphi_{Reach}(x, y)$ wäre eine FO[E]-Formel, so dass für alle gerichteten Graphen $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ und alle Knoten $a, b \in A$ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi_{Reach}[a, b] \iff$ es gibt in $\mathcal{A}$ einen Weg von Knoten a zu Knoten b.

Dann ist

$$\varphi_{Conn} \;:=\; \forall x\, \forall y\; \varphi_{Reach}(x, y)$$

ein FO[E]-Satz, der in einem gerichteten Graphen $\mathcal{A}$ genau dann erfüllt ist, wenn

(b) folgt direkt aus *(a)*, denn:

Angenommen $\varphi_{Reach}(x, y)$ wäre eine FO[E]-Formel, so dass für alle gerichteten Graphen $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ und alle Knoten $a, b \in A$ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi_{Reach}[a, b] \iff$ es gibt in $\mathcal{A}$ einen Weg von Knoten a zu Knoten b.

Dann ist

$$\varphi_{Conn} \ := \ \forall x \, \forall y \ \varphi_{Reach}(x, y)$$

ein FO[E]-Satz, der in einem gerichteten Graphen $\mathcal{A}$ genau dann erfüllt ist, wenn $\mathcal{A}$ stark zusammenhängend ist.

(b) folgt direkt aus *(a)*, denn:

Angenommen $\varphi_{Reach}(x, y)$ wäre eine FO[E]-Formel, so dass für alle gerichteten Graphen $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ und alle Knoten $a, b \in A$ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi_{Reach}[a, b] \iff$ es gibt in $\mathcal{A}$ einen Weg von Knoten a zu Knoten b.

Dann ist

$$\varphi_{Conn} \ := \ \ \forall x \, \forall y \ \varphi_{Reach}(x, y)$$

ein FO[E]-Satz, der in einem gerichteten Graphen $\mathcal{A}$ genau dann erfüllt ist, wenn $\mathcal{A}$ stark zusammenhängend ist.

Insbesondere gilt dann für jeden ungerichteten Graphen $\mathcal{G}$ und die zu $\mathcal{G}$ gehörende $\{E\}$-Struktur $\mathcal{A}$: $\mathcal{A} \models \varphi_{Conn} \iff \mathcal{G}$ ist zusammenhängend.

(b) folgt direkt aus *(a)*, denn:

Angenommen $\varphi_{Reach}(x, y)$ wäre eine FO[E]-Formel, so dass für alle gerichteten Graphen $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ und alle Knoten $a, b \in A$ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi_{Reach}[a, b] \iff$ es gibt in $\mathcal{A}$ einen Weg von Knoten a zu Knoten b.

Dann ist

$$\varphi_{Conn} \ := \ \ \forall x \, \forall y \ \varphi_{Reach}(x, y)$$

ein FO[E]-Satz, der in einem gerichteten Graphen $\mathcal{A}$ genau dann erfüllt ist, wenn $\mathcal{A}$ stark zusammenhängend ist.

Insbesondere gilt dann für jeden ungerichteten Graphen $\mathcal{G}$ und die zu $\mathcal{G}$ gehörende $\{E\}$-Struktur $\mathcal{A}$: $\mathcal{A} \models \varphi_{Conn} \iff \mathcal{G}$ ist zusammenhängend.

Dies ist ein Widerspruch zu *(a)*.

Logische Reduktionen

Bemerkung 3.29

Die im Beweis von Satz 3.28 benutzte Vorgehensweise ist unter dem Begriff logische Reduktion bekannt.

Logische Reduktionen

Bemerkung 3.29

Die im Beweis von Satz 3.28 benutzte Vorgehensweise ist unter dem Begriff logische Reduktion bekannt.

Im Beweis von Teil *(b)* wurde gezeigt:

Logische Reduktionen

Bemerkung 3.29

Die im Beweis von Satz 3.28 benutzte Vorgehensweise ist unter dem Begriff logische Reduktion bekannt.

Im Beweis von Teil *(b)* wurde gezeigt: Falls es eine FO[E]-Formel gibt, die ausdrückt, dass Knoten y von Knoten x aus erreichbar ist, dann

Logische Reduktionen

Bemerkung 3.29

Die im Beweis von Satz 3.28 benutzte Vorgehensweise ist unter dem Begriff logische Reduktion bekannt.

Im Beweis von Teil *(b)* wurde gezeigt: Falls es eine FO[E]-Formel gibt, die ausdrückt, dass Knoten y von Knoten x aus erreichbar ist, dann gibt es auch eine FO[E]-Formel, die Graph-Zusammenhang definiert.

Logische Reduktionen

Bemerkung 3.29

Die im Beweis von Satz 3.28 benutzte Vorgehensweise ist unter dem Begriff logische Reduktion bekannt.

Im Beweis von Teil *(b)* wurde gezeigt: Falls es eine FO[E]-Formel gibt, die ausdrückt, dass Knoten y von Knoten x aus erreichbar ist, dann gibt es auch eine FO[E]-Formel, die Graph-Zusammenhang definiert.

Somit wurde das Problem, einen FO[E]-Satz zu finden, der Graph-Zusammenhang definiert, auf das Problem reduziert, eine FO[E]-Formel zu finden, die ausdrückt, dass Knoten y von Knoten x aus erreichbar ist.

Im Beweis von Teil *(a)* wurde das Problem, einen FO[$\leqslant$]-Satz zu finden, der ausdrückt, dass eine endliche lineare Ordnung eine gerade Kardinalität besitzt,

Im Beweis von Teil *(a)* wurde das Problem, einen FO[$\leqslant$]-Satz zu finden, der ausdrückt, dass eine endliche lineare Ordnung eine gerade Kardinalität besitzt, auf das Problem reduziert, einen FO[E]-Satz zu finden, der Graph-Zusammenhang definiert.

Im Beweis von Teil *(a)* wurde das Problem, einen FO[$\leqslant$]-Satz zu finden, der ausdrückt, dass eine endliche lineare Ordnung eine gerade Kardinalität besitzt, auf das Problem reduziert, einen FO[E]-Satz zu finden, der Graph-Zusammenhang definiert.

D.h. es wurde gezeigt:

Im Beweis von Teil *(a)* wurde das Problem, einen FO[$\leqslant$]-Satz zu finden, der ausdrückt, dass eine endliche lineare Ordnung eine gerade Kardinalität besitzt, auf das Problem reduziert, einen FO[E]-Satz zu finden, der Graph-Zusammenhang definiert.

D.h. es wurde gezeigt: Falls Graph-Zusammenhang FO-definierbar ist, so ist auch

Im Beweis von Teil *(a)* wurde das Problem, einen FO[$\leqslant$]-Satz zu finden, der ausdrückt, dass eine endliche lineare Ordnung eine gerade Kardinalität besitzt, auf das Problem reduziert, einen FO[E]-Satz zu finden, der Graph-Zusammenhang definiert.

D.h. es wurde gezeigt: Falls Graph-Zusammenhang FO-definierbar ist, so ist auch die Aussage „eine endliche lineare Ordnung besitzt eine gerade Kardinalität" FO-definierbar.

Im Beweis von Teil *(a)* wurde das Problem, einen FO[$\leqslant$]-Satz zu finden, der ausdrückt, dass eine endliche lineare Ordnung eine gerade Kardinalität besitzt, auf das Problem reduziert, einen FO[E]-Satz zu finden, der Graph-Zusammenhang definiert.

D.h. es wurde gezeigt: Falls Graph-Zusammenhang FO-definierbar ist, so ist auch die Aussage „eine endliche lineare Ordnung besitzt eine gerade Kardinalität" FO-definierbar.

Dies wurde dadurch erreicht, dass man

Im Beweis von Teil *(a)* wurde das Problem, einen FO[$\leqslant$]-Satz zu finden, der ausdrückt, dass eine endliche lineare Ordnung eine gerade Kardinalität besitzt, auf das Problem reduziert, einen FO[E]-Satz zu finden, der Graph-Zusammenhang definiert.

D.h. es wurde gezeigt: Falls Graph-Zusammenhang FO-definierbar ist, so ist auch die Aussage „eine endliche lineare Ordnung besitzt eine gerade Kardinalität" FO-definierbar.

Dies wurde dadurch erreicht, dass man innerhalb einer linearen Ordnung einen geeigneten Graphen „simuliert"

Im Beweis von Teil *(a)* wurde das Problem, einen FO[$\leqslant$]-Satz zu finden, der ausdrückt, dass eine endliche lineare Ordnung eine gerade Kardinalität besitzt, auf das Problem reduziert, einen FO[E]-Satz zu finden, der Graph-Zusammenhang definiert.

D.h. es wurde gezeigt: Falls Graph-Zusammenhang FO-definierbar ist, so ist auch die Aussage „eine endliche lineare Ordnung besitzt eine gerade Kardinalität" FO-definierbar.

Dies wurde dadurch erreicht, dass man innerhalb einer linearen Ordnung einen geeigneten Graphen „simuliert" (bzw. "interpretiert"),

Im Beweis von Teil *(a)* wurde das Problem, einen FO[$\leqslant$]-Satz zu finden, der ausdrückt, dass eine endliche lineare Ordnung eine gerade Kardinalität besitzt, auf das Problem reduziert, einen FO[E]-Satz zu finden, der Graph-Zusammenhang definiert.

D.h. es wurde gezeigt: Falls Graph-Zusammenhang FO-definierbar ist, so ist auch die Aussage „eine endliche lineare Ordnung besitzt eine gerade Kardinalität“ FO-definierbar.

Dies wurde dadurch erreicht, dass man innerhalb einer linearen Ordnung einen geeigneten Graphen „simuliert“ (bzw. “interpretiert“), indem man die Kantenrelation des Graphen durch eine FO[$\leqslant$]-Formel beschreibt.

Im Beweis von Teil *(a)* wurde das Problem, einen FO[$\leqslant$]-Satz zu finden, der ausdrückt, dass eine endliche lineare Ordnung eine gerade Kardinalität besitzt, auf das Problem reduziert, einen FO[E]-Satz zu finden, der Graph-Zusammenhang definiert.

D.h. es wurde gezeigt: Falls Graph-Zusammenhang FO-definierbar ist, so ist auch die Aussage „eine endliche lineare Ordnung besitzt eine gerade Kardinalität" FO-definierbar.

Dies wurde dadurch erreicht, dass man innerhalb einer linearen Ordnung einen geeigneten Graphen „simuliert" (bzw. "interpretiert"), indem man die Kantenrelation des Graphen durch eine FO[$\leqslant$]-Formel beschreibt.

Generell ist diese Methode der logischen Reduktionen oft nützlich, um

Im Beweis von Teil *(a)* wurde das Problem, einen FO[$\leqslant$]-Satz zu finden, der ausdrückt, dass eine endliche lineare Ordnung eine gerade Kardinalität besitzt, auf das Problem reduziert, einen FO[E]-Satz zu finden, der Graph-Zusammenhang definiert.

D.h. es wurde gezeigt: Falls Graph-Zusammenhang FO-definierbar ist, so ist auch die Aussage „eine endliche lineare Ordnung besitzt eine gerade Kardinalität" FO-definierbar.

Dies wurde dadurch erreicht, dass man innerhalb einer linearen Ordnung einen geeigneten Graphen „simuliert" (bzw. "interpretiert"), indem man die Kantenrelation des Graphen durch eine FO[$\leqslant$]-Formel beschreibt.

Generell ist diese Methode der logischen Reduktionen oft nützlich, um bereits bekannte Nicht-Definierbarkeits-Resultate auf neue Nicht-Definierbarkeits-Resultate zu übertragen.

Im Beweis von Teil *(a)* wurde das Problem, einen FO[$\leqslant$]-Satz zu finden, der ausdrückt, dass eine endliche lineare Ordnung eine gerade Kardinalität besitzt, auf das Problem reduziert, einen FO[E]-Satz zu finden, der Graph-Zusammenhang definiert.

D.h. es wurde gezeigt: Falls Graph-Zusammenhang FO-definierbar ist, so ist auch die Aussage „eine endliche lineare Ordnung besitzt eine gerade Kardinalität" FO-definierbar.

Dies wurde dadurch erreicht, dass man innerhalb einer linearen Ordnung einen geeigneten Graphen „simuliert" (bzw. "interpretiert"), indem man die Kantenrelation des Graphen durch eine FO[$\leqslant$]-Formel beschreibt.

Generell ist diese Methode der logischen Reduktionen oft nützlich, um bereits bekannte Nicht-Definierbarkeits-Resultate auf neue Nicht-Definierbarkeits-Resultate zu übertragen.

Wir haben diese Methode bereits in einem früheren Kapitel angewendet, um nachzuweisen, dass Hamiltonkreis nicht MSO-definierbar ist.

Abschnitt 3.6:

Der Satz von Hanf