Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

26. Juni 2018

Logik und Komplexität

Sommersemester 2018

Übungsblatt 9

Zu bearbeiten bis 3. Juli 2018

Aufgabe 1: **(25 Punkte)**

Beweisen Sie Theorem 4.24, d.h. zeigen Sie, dass Duplicator genau dann eine Gewinnstrategie im k-Pebble Spiel auf $(\mathcal{A}, \vec{a})$ und $(\mathcal{B}, \vec{b})$ hat, wenn $(\mathcal{A}, \vec{a}) \equiv_{\mathrm{L}^k_{\infty\omega}} (\mathcal{B}, \vec{b})$ gilt.

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Beweisen Sie Lemma 4.26, d.h. zeigen Sie, dass Folgendes gilt: Sei $k \geqslant 1$ und seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei ungerichtete Graphen, die das Erweiterungsaxiom $\mathrm{EA}_{\ell,m}$ für alle $\ell \geqslant 1$ und $m \geqslant 0$ mit $m \leqslant \ell < k$ erfüllen. Dann gilt $\mathcal{A} \equiv_{\mathrm{L}^k_{\infty\omega}} \mathcal{B}$.

Aufgabe 3: **(10 + 15 = 25 Punkte)**

Sei $\sigma = \{E\}$. Sei Conn die Klasse aller zusammenhängenden endlichen ungerichteten Graphen und sei UGraphs die Klasse aller endlichen ungerichteten Graphen.

(a) Zeigen Sie, dass Conn nicht $\mathrm{L}^2_{\infty\omega}[\sigma]$-definierbar in UGraphs ist.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: Conn ist $\mathrm{L}^\omega_{\infty\omega}[\sigma]$-definierbar in UGraphs.

Aufgabe 4: **(25 Punkte)**

Sei $p_1 < p_2 < \ldots$ eine Aufzählung der Primzahlen gemäß der natürlichen linearen Ordnung auf $\mathbb{N}$. Wir definieren einen abzählbar unendlichen ungerichteten Graphen $G := (\mathbb{N}, E)$ mit der folgenden Kantenmenge

$$E \ := \ \{\, \{n,m\} : m,n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1},\ p_n \text{ teilt } m \text{ oder } p_m \text{ teilt } n \,\}\,.$$

Zeigen Sie, dass G isomorph zum Rado-Graphen ist.