Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

5. Juni 2018

Logik und Komplexität

Sommersemester 2018

Übungsblatt 6

Zu bearbeiten bis 12. Juni 2018

Aufgabe 1: **(7 + 7 + 11 = 25 Punkte)**

(a) Arbeiten Sie die Details zu Beispiel 3.22 aus, d.h.:

Die Signatur $\sigma := \{S_v, S_h\}$ bestehe aus zwei 2-stelligen Relationssymbolen S_v und S_h (für „vertikale" und „horizontale" Kanten). Für $k, \ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ ist das $(k \times \ell)$-*Gitter* $\mathcal{G}_{k,\ell}$ die σ-Struktur mit Universum $\{1, \ldots, k\} \times \{1, \ldots, \ell\}$ und Relationen

$$\begin{aligned} S_v^{\mathcal{G}_{k,\ell}} &:= \Big\{ \big((i,j), (i{+}1, j) \big) \ : \ 1 \leqslant i < k, \ 1 \leqslant j \leqslant \ell \Big\}, \\ S_h^{\mathcal{G}_{k,\ell}} &:= \Big\{ \big((i,j), (i, j{+}1) \big) \ : \ 1 \leqslant i \leqslant k, \ 1 \leqslant j < \ell \Big\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass es keinen FO$[\sigma]$-Satz φ gibt, der die Gitter *quadratischer* Größe beschreibt, d.h. bei dem für alle $k, \ell \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ gilt: $\mathcal{G}_{k,\ell} \models \varphi \iff k = \ell$.

(b) Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und sei $L \subseteq T_\Sigma$ die Baumsprache, die aus allen Σ-Bäumen besteht, in der jedes Blatt gerade Höhe hat. Zeigen Sie, dass es keinen FO$[\tau_\Sigma]$-Satz φ gibt, so dass für jeden Σ-Baum t und die zu t gehörige τ_Σ-Struktur $\mathcal{A}_t$ gilt:

$$t \in L \quad \iff \quad \mathcal{A}_t \models \varphi$$

(c) Für jedes Alphabet Σ sei $\tau'_\Sigma := \tau_\Sigma \cup \{\mathrm{desc}\}$, wobei desc ein zweistelliges Relationssymbol ist. Die τ'_Σ-Struktur $\mathcal{B}_t$ ist eine Erweiterung der τ_Σ-Struktur $\mathcal{A}_t$ um die Relation $\mathrm{desc}^{\mathcal{B}_t}$, wobei

$$(u, v) \in \mathrm{desc}^{\mathcal{B}_t} \quad \iff \quad v \text{ ist ein Nachkomme von } u.$$

Dabei ist $v \in B_t$ ein Nachkomme von $u \in B_t$ genau dann, wenn es einen Weg der Länge $\geqslant 1$ von u nach v in dem Graphen $(B_t, E_1^{\mathcal{B}_t} \cup E_2^{\mathcal{B}_t})$ gibt. Zeigen Sie, dass es einen FO$[\tau'_\Sigma]$-Satz φ gibt, so dass für jeden Σ-Baum t und die zu t gehörende τ'_Σ-Struktur $\mathcal{B}_t$ gilt:

$$t \in L \quad \iff \quad \mathcal{B}_t \models \varphi$$

wobei L die Baumsprache aus **(b)** ist.

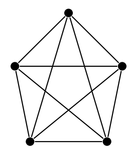
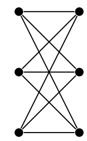
— *auf der nächsten Seite geht's weiter* —

Aufgabe 2: **(25 Punkte)**

Zeigen Sie, dass es keinen FO[$\{E\}$]-Satz φ gibt, so dass für jeden endlichen ungerichteten Graphen G und den zu G gehörenden gerichteten Graphen $\mathcal{A}$ gilt:

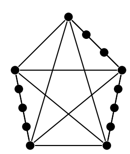
$$\mathcal{A} \models \varphi \quad \iff \quad G \text{ ist planar.}$$

Hinweis: Gemäß dem Satz von Kuratowski ist ein endlicher ungerichteter Graph G genau dann planar, wenn er keine Unterteilung eines der folgenden Graphen als Subgraphen enthält:

$K_5 :=$  $K_{3,3} :=$ 

Ein Graph G' geht durch Unterteilung einer Kante $e := \{u, v\} \in E$ aus $G = (V, E)$ hervor, falls $G' = (V \cup \{w\}, (E \setminus \{e\}) \cup \{\{u, w\}, \{w, v\}\})$ für einen Knoten $w \notin V$. Ein Graph U ist eine *Unterteilung* eines Graphen G, wenn es eine Folge $G_1, \ldots, G_\ell$ von Graphen mit $\ell \geqslant 1$ gibt, so dass gilt: $G_1 = G$, $G_\ell = U$, und für jedes $i \in \{2, \ldots, \ell\}$ geht G_i aus G_{i-1} durch Unterteilung einer Kante von G_{i-1} hervor.

Beispiel: Eine Unterteilung von K_5



Aufgabe 3: **(25 Punkte)**

Benutzen Sie den Satz von Hanf (Satz 3.32), um Folgendes zu beweisen:

Sei $d \in \mathbb{N}$, sei σ eine endliche relationale Signatur, sei $k \in \mathbb{N}$, sei $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ wobei $x_1, \ldots, x_k$ k verschiedene Variablen sind, und sei φ eine FO[σ]-Formel mit frei(φ) $\subseteq \{x_1, \ldots, x_k\}$.

Dann existiert eine FO[σ]-Formel ψ, so dass für alle σ-Strukturen $\mathcal{A}$ vom Grad $\leq d$ und alle $\vec{a} \in A^k$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \psi[\vec{a}] \quad \iff \quad \mathcal{A} \models \varphi[\vec{a}] \quad \text{, und}$$

ψ ist eine endliche Boolsche Kombination von Formeln der Form $\mathrm{sph}_{\tau,r}(\vec{x})$ mit $\tau \in \mathcal{L}_r^{\sigma,d}(k)$ und Sätzen der Form $\exists^{\geqslant s} y \; \mathrm{sph}_{\rho,r}(y)$ mit $s \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}, \rho \in \mathcal{L}_r^{\sigma,d}(1)$ für $r := \frac{3^{\mathrm{qr}(\varphi)}-1}{2}$.

Bemerkung: ψ wird „FO[σ]-Formel in Hanf-Normalform“ genannt.

Aufgabe 4: **(10 + 15 = 25 Punkte)**

Sei σ eine endliche relationale Signatur.

(a) Definieren Sie Spielregeln und Gewinnbedingung eines m-*Runden* MSO-*Spiels*, so dass für alle $m \geqslant 0$ und alle σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ folgende Aussagen äquivalent sind:

- **(i)** Es gibt einen MSO[σ]-Satz Φ vom Quantorenrang $\mathrm{qr}(\Phi) \leqslant m$, so dass $\mathcal{A} \models \Phi$ und $\mathcal{B} \not\models \Phi$.
- **(ii)** Spoiler hat eine Gewinnstrategie im m-Runden MSO-Spiel auf $\mathcal{A}, \mathcal{B}$.

(b) Beweisen Sie, dass die Aussagen **(i)** und **(ii)** äquivalent sind.